Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Ableitung aus einem Differenzansatz

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Längenänderung einer Stabzugsehne. Zur Bestimmung der Längenänderung einer Stabzugsehne wird die x-Achse mit dieser zusammengelegt. Dann ist in (224)

$$y_k = y_b, \quad y_b = y_a = 0, \quad y_b - y = -y,$$
$$x_a = 0, \quad x_k = x_b = l \text{ (Abb. 121)}$$

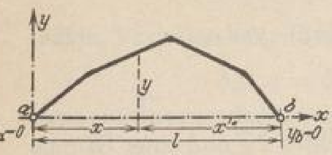

Abb. 121.

$$u_b - u_a = \Delta l = l\,\varepsilon_a + \int_0^l y\,d\psi + \int_0^l (l - x)\,d\varepsilon_0. \quad (231)$$

Biegelinie des Dreigelenkbogens. Die Biegelinie kann ebenfalls nach der Anweisung auf S. 133 gezeichnet werden, wenn die Verschiebungen u_c, w_c des Gelenkpunktes c oder die relative Drehung ψ_c der beiden Bogenschenkel bekannt sind. Diese wird dann als Drehungsgewicht $\mathfrak{W}_c$ ebenso verwendet wie die übrigen Drehungsgewichte $\mathfrak{W}'_m$, $\mathfrak{W}''_m$ (Abb. 122). Aus diesem Grunde kann $\psi_c = \mathfrak{W}_c$ auch aus der als Stützenbedingung vorgeschriebenen Längenänderung Δl der Sehne des Dreigelenkbogens berechnet werden. Bei unverschieblichen Widerlagern ist $\Delta l = 0$ und

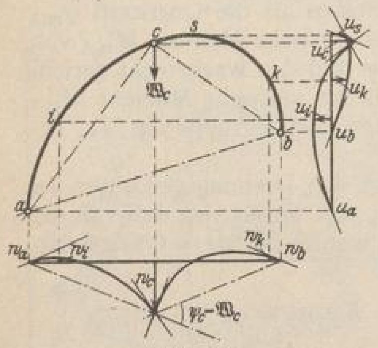

Abb. 122.
Bezeichnungen s. Abb. 121;
$y_c = f \perp \overline{ab}$, $x'_c = l_2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_c &= -\frac{1}{f}\left(l\,\varepsilon_a + \int_0^l y\,d\psi + \int_0^l (l - x)\,d\varepsilon_0\right); \\ \varphi_a &= \frac{1}{l}\left(\psi_c\,l_2 + \int_0^l (l - x)\,d\psi - \int_0^l y\,d\varepsilon_0\right). \end{aligned}\right\} \quad (232)$$

Ableitung aus einem Differenzenansatz. Die Verschiebung w_m und u_m einer ausgezeichneten Punktfolge $\ldots m, m+1 \ldots$ des Stabes können auch als die Unbekannten von Differenzengleichungen abgeleitet werden. Der Stab wird in diesem Falle durch eine Stabkette aus geraden Elementen $\ldots s_m, s_{m+1} \ldots$ ersetzt, welche konstantes Trägheitsmoment $\ldots J_m, J_{m+1} \ldots$ besitzen und gelenkig verbunden sind (Abb. 123). An dem Spannungszustand ändert sich nichts, wenn an der Gelenkkette neben der vorgegebenen Belastung $\mathfrak{P}$ die Biegungsmomente des Stabes in den Punkten $\ldots m, m+1 \ldots$ als äußere Kräfte wirken. Die Belastung besteht dann aus zwei Teilen.

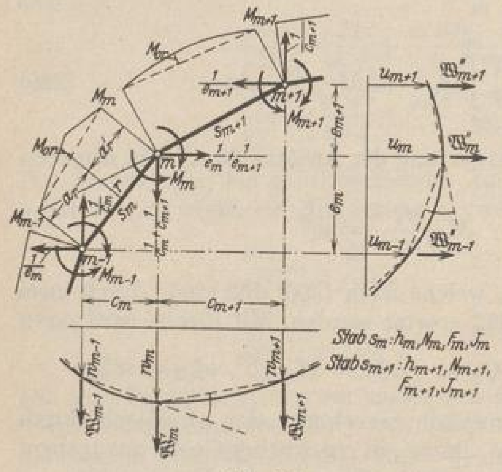

Abb. 123.

Die Endpunkte der senkrechten und waagerechten Verschiebungen w_m, u_m der Gelenkpunkte m werden durch je einen Geradenzug miteinander verbunden, dessen Elemente Sehnen der Biegelinien des Stabes sind. Ihre Richtungen schließen Winkel $\mathfrak{W}'_m$, $\mathfrak{W}''_m$ ein, die aus den Verschiebungen w_m, u_m berechnet werden können.

$$\mathfrak{W}'_m = \frac{w_m - w_{m-1}}{c_m} - \frac{w_{m+1} - w_m}{c_{m+1}}, \qquad \mathfrak{W}''_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{e_m} - \frac{u_{m+1} - u_m}{e_{m+1}}. \quad (233)$$

Werden beide Seiten des Ansatzes durch Multiplikation mit der Belastungseinheit des anliegenden Sehnenpaares (in mt) erweitert, so ist der Ausdruck für die virtuelle Arbeit auf der rechten Seite das Produkt der virtuellen äußeren Kräfte $1/c_m$, $1/c_{m+1}$

und $1/e_m$, $1/e_{m+1}$ mit den senkrechten oder waagerechten Verschiebungen w_m, u_m (Abb. 123). Sie kann in beiden Fällen als Funktion der Stabdrehwinkel ϑ_m, ϑ_{m+1} und der Längenänderung der Stäbe Δs_m, Δs_{m+1} angegeben werden.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}'_m &= \vartheta_m - \vartheta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{tg}\alpha_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\operatorname{tg}\alpha_{m+1}, \\ \mathfrak{W}''_m &= \vartheta_m - \vartheta_{m+1} + \frac{\Delta s_m}{s_m}\operatorname{ctg}\alpha_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}\operatorname{ctg}\alpha_{m+1}. \end{aligned}\right\} \tag{234}$$

Die Differenz der Stabdrehwinkel, gleichbedeutend mit der Änderung der Stabzugwinkel, wird für die beiden Belastungsanteile getrennt berechnet. Der Anteil $\vartheta_{m,1} - \vartheta_{(m+1),1} = \psi_{m,1}$ wird von den Biegungsmomenten $\ldots M_m, M_{m+1} \ldots$, nunmehr äußeren Kräften der Stabketten, hervorgerufen (Tabelle 12). Die Belastung $\mathfrak{P}$ der einzelnen Elemente s_m, s_{m+1} erzeugt den Anteil $(\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \psi_{m,2}$. Jedes Element wirkt nach Abb. 123 als frei drehbar gestützter Stab.

$$\psi_m = \psi_{m,1} + \psi_{m,2}; \qquad M_r = M_{m-1}\frac{a'_r}{s_m} + M_m\frac{a_r}{s_m} + M_{0r}; \tag{235}$$

$$6EJ_c(\vartheta_{m,1} - \vartheta_{(m+1),1}) = \frac{J_c}{J_m}\frac{c_m}{\cos\alpha_m}(M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J_{m+1}}\frac{c_{m+1}}{\cos\alpha_{m+1}}(2M_m + M_{m+1}); \tag{236}$$

$$6EJ_c(\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \frac{J_c}{J_m}\frac{c_m}{\cos\alpha_m}\int\limits_m M_{0r}\,\xi\,d\xi + \frac{J_c}{J_{m+1}}\frac{c_{m+1}}{\cos\alpha_{m+1}}\int\limits_{m+1} M_{0r}\,\xi'\,d\xi'. \tag{237}$$

Der Ansatz kann nach S. 96ff. auch für stetig veränderliches Trägheitsmoment der Elemente s_m angeschrieben werden. Besteht $\mathfrak{P}$ aus einer Gruppe von Einzellasten, deren Angriffspunkte mit $\ldots m, m+1 \ldots$ zusammenfallen, so ist $\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2} = \psi_{m,2} = 0$ und mit Berücksichtigung der Längskräfte N und einer Temperaturänderung t, Δt

$$\begin{aligned} 6EJ_c\mathfrak{W}'_m = {} & \frac{J_c}{J_m}\frac{c_m}{\cos\alpha_m}(M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J_{m+1}}\frac{c_{m+1}}{\cos\alpha_{m+1}}(2M_m + M_{m+1}) \\ & - 6\frac{J_c}{F_c}\left(N_m\frac{F_c}{F_m}\operatorname{tg}\alpha_m - N_{m+1}\frac{F_c}{F_{m+1}}\operatorname{tg}\alpha_{m+1}\right) \\ & - 6EJ_c\left[\alpha_t t(\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_{m+1}) - \frac{\alpha_t\Delta t}{2}\left(\frac{s_m}{h_m} + \frac{s_{m+1}}{h_{m+1}}\right)\right], \end{aligned} \tag{238}$$

$$\begin{aligned} 6EJ_c\mathfrak{W}''_m = {} & \frac{J_c}{J_m}\frac{c_m}{\cos\alpha_m}(M_{m-1} + 2M_m) + \frac{J_c}{J_{m+1}}\frac{c_{m+1}}{\cos\alpha_{m+1}}(2M_m + M_{m+1}) \\ & + 6\frac{J_c}{F_c}\left(N_m\frac{F_c}{F_m}\operatorname{ctg}\alpha_m - N_{m+1}\frac{F_c}{F_{m+1}}\operatorname{ctg}\alpha_{m+1}\right) \\ & + 6EJ_c\left[\alpha_t t(\operatorname{ctg}\alpha_m - \operatorname{ctg}\alpha_{m+1}) + \frac{\alpha_t\Delta t}{2}\left(\frac{s_m}{h_m} + \frac{s_{m+1}}{h_{m+1}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{239}$$

Die Integrale für $\vartheta_{m,2}$, $\vartheta_{(m+1),2}$ sind in der Tabelle 12 enthalten und werden hier für lotrechte Einzellasten und lotrechte, gleichförmige Streckenlast wiederholt:

Einzellasten:

$$6EJ_c(\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \frac{J_c}{J_m}\frac{c_m^2}{\cos\alpha}\Sigma_m P\,\omega_D + \frac{J_c}{J_{m+1}}\frac{c_{m+1}^2}{\cos\alpha_{m+1}}\Sigma_{m+1} P\,\omega'_D. \tag{240}$$

Gleichförmige Streckenlast:

$$6EJ_c(\vartheta_{m,2} - \vartheta_{(m+1),2}) = \frac{J_c}{4J_m}\frac{c_m^3}{\cos^2\alpha_m}p_m + \frac{J_c}{4J_{m+1}}\frac{c_{m+1}^3}{\cos^2\alpha_{m+1}}p_{m+1}. \tag{241}$$

Sind die Abschnitte s_m des Stabzugs gekrümmt, so erzeugen die Längskräfte Biegungsmomente, welche bei der Berechnung der Stabdrehwinkel in einem Anteil $\vartheta_{m,3}$ berücksichtigt werden. Ähnliches gilt von der Entwicklung der Biegelinie für den Gurt eines mehrteiligen Stabwerks. Bei geraden Abschnitten s_m sind die Beiträge der Längskräfte N_m zu den Stabdrehwinkeln in der Regel so unbedeutend, daß sie vernachlässigt werden. In diesem Falle ist $\mathfrak{W}'_m = \mathfrak{W}''_m$.

Die Größen $\mathfrak{W}'_m$, $\mathfrak{W}''_m$ sind Kontingenzwinkel der Sehnen der Biegelinien w, u. Um sie in einem Richtungsbüschel zusammenzufassen, werden ihre positiven Werte als gerichtete Strecken $\mathfrak{W}'_m$, $\mathfrak{W}''_m$ im Sinne von $\vec{w}$, $\vec{u}$ auf einer Parallelen im Abstand 1 vom Pol des Richtungsbüschels und zwar in der Regel mit dem $6\,EJ_c$fachen Betrage aufgetragen. Wird daher bei einem Längenmaßstab $1:n$ die Polweite $6\,EJ_c/n$ an Stelle der Einheit verwendet, so liefert das Seileck wie auf S. 125 unter Beachtung der Stützenbedingungen die absoluten Verschiebungen in natürlicher Größe. Ebenso gelten die übrigen Bemerkungen der S. 125 zur rechnerischen Lösung der Aufgabe. Die Längenänderung der Stabzugsehne ist z. B.

$$\Delta l = \sum \mathfrak{W}''_m y_m \quad \text{(Abb. 121)}. \tag{242}$$

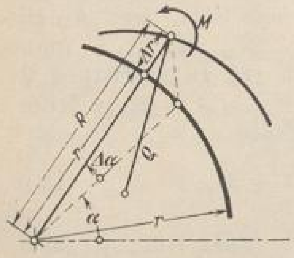

Abb. 124.

Die Biegelinie eines gekrümmten Trägers mit $r = \text{const}$. Der Verschiebungszustand eines Bogenträgers mit $r = \text{const}$ läßt sich einfacher durch die radiale Ausbiegung $\Delta r\,(r \to r + \Delta r)$ beschreiben (Abb. 124). Die Biegelinie mit ϱ als Krümmungshalbmesser wird dann auf Polarkoordinaten $(R,\ \alpha + \Delta\alpha,\ \Delta\alpha \approx 0)$ bezogen. Nach bekannten Regeln der Geometrie ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{R^2 + 2\,R'^2 - R\,R''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}}\,; \quad R = r + \Delta r\,, \\ R' &= \frac{dR}{d\alpha} = \Delta r', \quad R'' = \frac{d^2R}{d\alpha^2} = \Delta r''. \end{aligned}\right\} \tag{243}$$

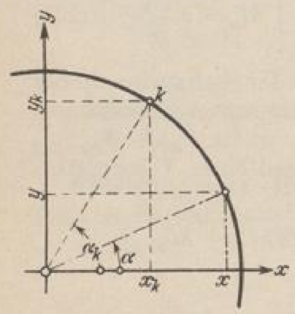

Abb. 125.

Bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung entsteht daher die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{-\Delta r - \Delta r''}{r^2} = \frac{1}{EJ}\,M(\alpha)\,. \tag{244}$$

Um ihre Lösung mit den Ergebnissen (224) und (225) zu vergleichen, wird Δr durch Integration nach bekannten Regeln berechnet (Abb. 125).

$$\Delta r = \left(C_1 - \int_0^\alpha M\frac{r^2}{EJ}\sin\alpha\,d\alpha\right)\cos\alpha + \left(C_2 + \int_0^\alpha M\frac{r^2}{EJ}\cos\alpha\,d\alpha\right)\sin\alpha\,. \tag{245}$$

$$r\,d\alpha = ds\,, \qquad r\sin\alpha = r\sin\alpha_k - (y_k - y)\,, \qquad r\cos\alpha = r\cos\alpha_k + (x - x_k)\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_k &= \left(C_1 + \int_0^{y_k} M\frac{y_k - y}{EJ}\,ds\right)\cos\alpha_k + \left(C_2 + \int_0^{x_k} M\frac{x - x_k}{EJ}\,ds\right)\sin\alpha_k\,, \\ \Delta r_k &= \Delta x_k\cos\alpha_k + \Delta y_k\sin\alpha_k\,. \end{aligned}\right| \tag{246}$$

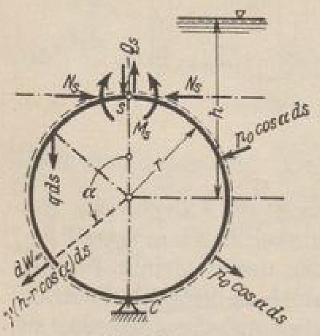

Abb. 126.

Spannungszustand in Rohren und Ringen. Um die Differentialgleichung (244) zur eindimensionalen Berechnung der Spannungen in Rohren und Ringen zu verwenden, werden die statisch unbekannten Schnittkräfte M_s, N_s, Q_s im Scheitelquerschnitt (Abb. 126) zunächst bekannt angenommen und zu den Integrationskonstanten gezählt. Bei einer zur senkrechten Achse symmetrischen Belastung und Punktstützung in C nach Abb. 126 sind $Q_s = 0$ und mit $-\pi < \alpha < \pi$ die

Biegungsmomente aus Eigengewicht $\gamma_0\delta = q$:

$$M = (M_s + N_s r - q r^2) - (N_s r - q r^2)\cos\alpha + q r^2\alpha\sin\alpha\,;$$