



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Spannungszustand in Rohren und Ringen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Größen $\mathfrak{W}'_m, \mathfrak{W}''_m$ sind Kontingenzwinkel der Sehnen der Biegelinien w, u . Um sie in einem Richtungsbüschel zusammenzufassen, werden ihre positiven Werte als gerichtete Strecken $\mathfrak{W}'_m, \mathfrak{W}''_m$ im Sinne von \vec{w}, \vec{u} auf einer Parallelen im Abstand 1 vom Pol des Richtungsbüschels und zwar in der Regel mit dem $6 EJ_c$ -fachen Betrage aufgetragen. Wird daher bei einem Längenmaßstab 1:n die Polweite $6 EJ_c/n$ an Stelle der Einheit verwendet, so liefert das Seileck wie auf S. 125 unter Beachtung der Stützenbedingungen die absoluten Verschiebungen in natürlicher Größe. Ebenso gelten die übrigen Bemerkungen der S. 125 zur rechnerischen Lösung der Aufgabe. Die Längenänderung der Stabzugssehne ist z. B.

$$\Delta l = \sum \mathfrak{W}''_m y_m \quad (\text{Abb. 121}). \quad (242)$$

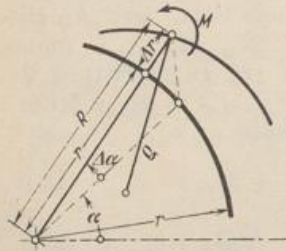


Abb. 124.

Die Biegelinie eines gekrümmten Trägers mit $r = \text{const}$. Der Verschiebungszustand eines Bogenträgers mit $r = \text{const}$ läßt sich einfacher durch die radiale Ausbiegung $\Delta r (r \rightarrow r + \Delta r)$ beschreiben (Abb. 124). Die Biegelinie mit ρ als Krümmungshalbmesser wird dann auf Polarkoordinaten $(R, \alpha + \Delta\alpha, \Delta\alpha \approx 0)$ bezogen. Nach bekannten Regeln der Geometrie ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{R^2 + 2R\Delta R - R\Delta R^2}{(R^2 + R\Delta R^2)^{3/2}}; \quad R = r + \Delta r, \\ R' &= \frac{dR}{d\alpha} = \Delta r', \quad R'' = \frac{d^2R}{d\alpha^2} = \Delta r''. \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung entsteht daher die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{-\Delta r - \Delta r''}{r^2} = \frac{1}{EJ} M(\alpha). \quad (244)$$

Um ihre Lösung mit den Ergebnissen (224) und (225) zu vergleichen, wird Δr durch Integration nach bekannten Regeln berechnet (Abb. 125).

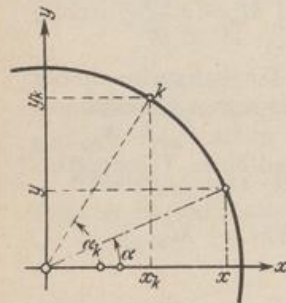


Abb. 125.

$$\Delta r = \left(C_1 - \int_0^\alpha M \frac{r^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha \right) \cos \alpha + \left(C_2 + \int_0^\alpha M \frac{r^2}{EJ} \cos \alpha d\alpha \right) \sin \alpha. \quad (245)$$

$$r d\alpha = ds, \quad r \sin \alpha = r \sin \alpha_k - (y_k - y), \quad r \cos \alpha = r \cos \alpha_k + (x - x_k),$$

$$\Delta r_k = \left(C_1 + \int_0^{y_k} M \frac{y_k - y}{EJ} ds \right) \cos \alpha_k + \left(C_2 + \int_0^{x_k} M \frac{x - x_k}{EJ} ds \right) \sin \alpha_k, \quad (246)$$

$$\Delta r_k = \Delta x_k \cos \alpha_k + \Delta y_k \sin \alpha_k.$$

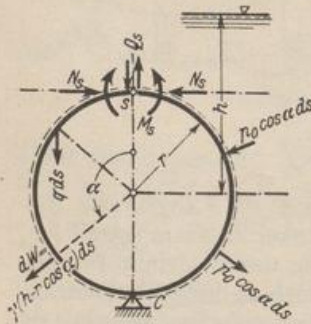


Abb. 126.

Spannungszustand in Rohren und Ringen. Um die Differentialgleichung (244) zur eindimensionalen Berechnung der Spannungen in Rohren und Ringen zu verwenden, werden die statisch unbekanntes Schnittkräfte M_s, N_s, Q_s im Scheitelquerschnitt (Abb. 126) zunächst bekannt angenommen und zu den Integrationskonstanten gezählt. Bei einer zur senkrechten Achse symmetrischen Belastung und Punktstützung in C nach Abb. 126 sind $Q_s = 0$ und mit $-\pi < \alpha < \pi$ die

Biegemomente aus Eigengewicht $\gamma_0 \delta = q$:

$$M = (M_s + N_s r - q r^2) - (N_s r - q r^2) \cos \alpha + q r^2 \alpha \sin \alpha;$$

Biegemomente aus Wasserdruck $\gamma(h - r \cos \alpha)$:

$$M = (M_s + N_s r - \gamma h r^2) - (N_s r - \gamma h r^2) \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma r^3 \alpha \sin \alpha ;$$

Biegemomente aus einer zur waagerechten Achse antisymmetrischen Windbelastung $p = p_0 \cos \alpha$:

$$M = (M_s + N_s r) - N_s r \cos \alpha + \frac{1}{2} p_0 r^2 \alpha \sin \alpha .$$

Mit der Abkürzung für $M = A_0 + A_1 \cos \alpha + A_2 \alpha \sin \alpha$ wird aus (245)

$$\frac{EJ}{r^2} \Delta r_k = A_0 + \frac{1}{4} (2A_1 + A_2) \alpha_k \sin \alpha_k - \frac{A_2}{4} \alpha_k^2 \cos \alpha_k + (C_1 - A_0) \cos \alpha_k + C_2 \sin \alpha_k, \quad (247)$$

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{r^2} \Delta r'_k &= \frac{1}{4} (2A_1 + A_2) (\sin \alpha_k + \alpha_k \cos \alpha_k) - \frac{A_2}{4} (2\alpha_k \cos \alpha_k - \alpha_k^2 \sin \alpha_k) \\ &\quad - (C_1 - A_0) \sin \alpha_k + C_2 \cos \alpha_k. \end{aligned} \quad (248)$$

Die vier Konstanten M_s, N_s, C_1, C_2 der Lösung sind zunächst durch drei Bedingungen:

$$\Delta r' = 0 \text{ für } \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \Delta r = 0, \quad \Delta r' = 0 \text{ für } \alpha = \pi$$

bestimmt. Wird außerdem die Längenänderung der Mittelebene des Rohres vernachlässigt, so gilt als vierte Bedingung $\int_0^\pi \Delta r d\alpha = 0$. Daher ist

$$A_0 = -A_2, \quad A_1 = \frac{1}{2} A_2, \quad -C_1 = \frac{8 - \pi^2}{4} A_2, \quad C_2 = 0.$$

Eigengewicht:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{q r^2}{2}, & N_s &= +\frac{q r}{2}, \\ M &= -q r^2 (1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha), & \max M &= +0,6408 q r^2, \\ \Delta r &= -\frac{q r^4}{EJ} \left(1 - \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \cos \alpha \right); \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

Wasserdruck:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{\gamma r^3}{4}, & N_s &= +\frac{\gamma r}{4} (4h - r), \\ M &= -\frac{\gamma r^3}{2} \left(1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right), & \max M &= +0,3204 \gamma r^3, \\ \Delta r &= \frac{\gamma r^5}{2EJ} \left(1 - \left(\frac{\pi^2 - \alpha^2}{4} - 1 \right) \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right); \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

Windbelastung nach Abb. 126:

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -\frac{1}{4} p_0 r^2, & N_s &= -\frac{1}{4} p_0 r, \\ M &= -\frac{1}{2} p_0 r^2 (1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

Das Biegemoment erhält daher mit $\mu_1 = 1 - \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$ (Abb. 127) die Form von $M = -\mu_1 R r / 2\pi$. Die Biegemomente unterscheiden sich nur durch den Betrag der Resultierenden R aus der Belastung. Dieser ist bei Eigengewicht $R = 2\pi r q$, Wasserinhalt $R = \pi \gamma r^2$, Wind $R = \pi p_0 r$.

Die Lösung gelingt dank der besonderen Stützung ohne Unterteilung des Integrationsbereiches π . Um daraus den Spannungszustand M^* für die normale Abstützung (Abb. 128) zu entwickeln, werden geeignete Gleichgewichtsgruppen von

Kräften mit den Biegemomenten \bar{M} überlagert, für welche die Schnittkräfte nach S. 195 berechnet werden. Auf diese Weise entstehen die folgenden Ergebnisse:

a) Senkrechte Belastung: $P = R/2$ (Abb. 128).

Eigengewicht:

$$R = 2\pi r q;$$

Wasserinhalt:

$$R = \pi \gamma r^2.$$

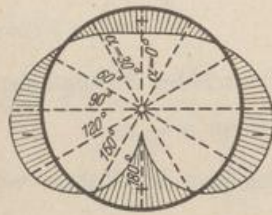
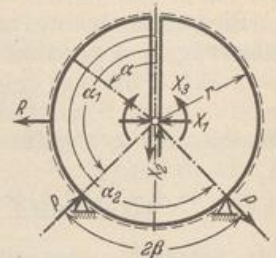
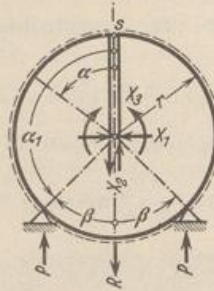


Abb. 127.
Funktion: μ_1 .

α	0°	90°	180°
μ_1	+0,500	-0,571	+1,500

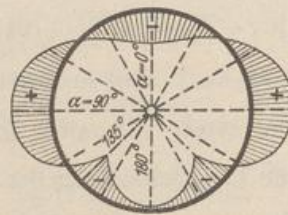


Abb. 128.
Funktion: $(\mu_2 - \mu_1)$ für $(\beta = \frac{\pi}{4})$.

α	0°	90°	135°
$\mu_2 - \mu_1$	-0,263	+0,308	-0,304

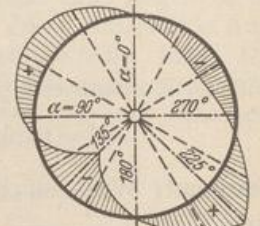


Abb. 129.
Funktion: μ_3 für $\beta = \frac{\pi}{4}$.

α	30°	60°	135°
μ_3	+0,596	+0,771	-1,462

$$0 < \alpha < \alpha_1: M_0 = 0, \quad \alpha_1 < \alpha < \pi: M_0 = +Pr(\sin\beta - \sin\alpha),$$

$$X_1 = -\frac{1}{\pi} P \sin^2 \beta, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = -\frac{1}{\pi} Pr(\beta \sin\beta + \cos\beta - 1).$$

$$M_s = +\frac{1}{2\pi} Rr(1 + \sin^2\beta - \beta \sin\beta - \cos\beta), \quad N_s = X_1.$$

$$\bar{M} = M_0 + M_s + N_s r(1 - \cos\alpha);$$

$$M^* = M + \bar{M} = (\mu_2 - \mu_1) R \cdot r / 2\pi;$$

$$0 < \alpha < \alpha_1: \mu_2 = 1 - \beta \sin\beta - \cos\beta + \sin^2\beta \cos\alpha;$$

$$\alpha_1 < \alpha < \pi: \mu_2 = 1 - \beta \sin\beta - \cos\beta + \sin^2\beta \cos\alpha + \pi(\sin\beta - \sin\alpha).$$

(252)

b) Antimetrische Belastung durch Wind: $R = \pi p_0 r$ (Abb. 129). Die Stützung ist ebenfalls antimetrisch $P = R/2 \sin\beta$.

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \alpha_1: M_0 = +Rr \cos\alpha; \quad \alpha_1 < \alpha < \alpha_2: M_0 = -Pr \sin(\alpha_2 - \alpha);$$

$$X_1 = +\frac{\pi}{4} p_0 r, \quad X_2 = +\frac{1}{2} p_0 r \beta \operatorname{ctg} \beta, \quad X_3 = +\frac{1}{2} p_0 r^2,$$

$$M_s = -\frac{1}{2} p_0 r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \quad N_s = +\frac{\pi}{4} p_0 r, \quad Q_s = +\frac{1}{2} p_0 r \beta \operatorname{ctg} \beta$$

$$\bar{M} = M_0 + M_s + N_s r(1 - \cos\alpha) + Q_s r \sin\alpha.$$

$$M^* = M + \bar{M} = \mu_3 \cdot R \cdot r / 2\pi = \mu_3 \frac{p_0 r^2}{2};$$

$$-\alpha_1 < \alpha < +\alpha_1: \mu_3 = (\beta \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{2}) \sin\alpha + \alpha \cos\alpha;$$

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2: \mu_3 = (\beta \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{2}) \sin\alpha + \alpha \cos\alpha - \pi(\operatorname{ctg} \beta \sin\alpha - \cos\alpha).$$

(253)

In (253) bedeutet M das Biegemoment nach (251) für $\alpha \rightarrow \alpha + 90^\circ$ und $-\pi < (\alpha + 90^\circ) < \pi$.