



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Die wirkliche Verschiebung der Punkte des Stabzugs

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

**Die wirkliche Verschiebung der Punkte des Stabzugs.** Die wirklichen Verschiebungen  $u_m \uparrow w_m$  der Punkte  $m$  des Stabzugs sind durch die Biegelinien für die senkrechte und waagerechte Richtung bestimmt. Sie können aber auch unmittelbar aufgezeichnet werden, nachdem der Stab in einen Stabzug mit  $n$  geraden Elementen  $s_1 \dots s_m \dots s_n$  unterteilt worden ist, deren Verschiebungskomponenten  $\Delta s_m, \vartheta_m$  berechnet sind. Dabei ergeben sich die Stabdrehwinkel  $\vartheta_m$  aus  $\vartheta_1$  und den Änderungen  $\Delta \varphi_m$  der Stabzugwinkel. Der Verschiebungsvektor des Endpunktes  $m$  des Stabes  $s_m$  wird aus der Verschiebung des Endpunktes  $(m-1)$ , der Längenänderung  $\Delta s_m$  und der Bogenlänge  $s_m \vartheta_m = \varrho_m$  erhalten (Abb. 130). Diese ist bei Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung als Abschnitt der Tangente senkrecht zu  $s_m$ . Der Verschiebungsplan kann daher durch Wiederholung dieser Konstruktion unabhängig vom Maßstab des Lageplans in einem Polplan entwickelt werden. In diesem muß daher die Verschiebung eines Punktes und die Verdrehung eines anschließenden Stabes bekannt sein oder angenommen werden. In der Regel ist das letztere nötig, so daß zunächst drei geeignete Parameter des Plans Null gesetzt werden. Ihre wirkliche Größe wird nachträglich aus einer Drehung des Stabzugs derart bestimmt, daß die Stützenbedingungen erfüllt sind. Die Punkte beschreiben dabei Wege, die den zweiten Verschiebungsplan bilden (Abb. 131).

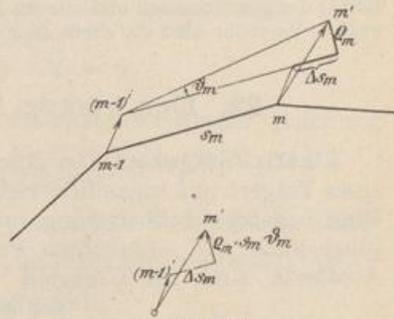


Abb. 130.  
 $(m-1) \overline{(m-1)'}$  Verschiebung von  $(m-1)$ ,  
 $m \overline{m'}$  Verschiebung von  $m$ ,  
 $\varrho_m = (s_m + \Delta s_m) \vartheta_m \approx s_m \vartheta_m$

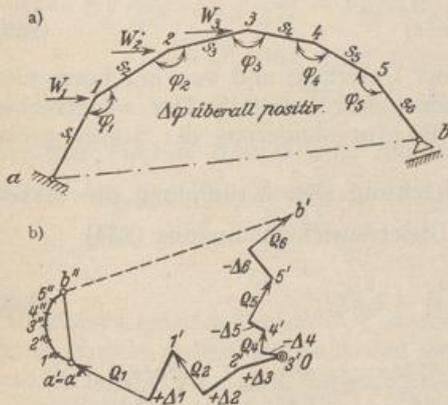


Abb. 131.  
 $\vartheta_1 = \Delta \varphi_2 + \vartheta_1$ ,  $\vartheta_4 = -\Delta \varphi_3$ ,  
 $\vartheta_2 = \Delta \varphi_2$ ,  $\vartheta_5 = -(\Delta \varphi_2 + \Delta \varphi_4)$ ,  
 $\vartheta_3 = 0$ ,  $\vartheta_6 = -(\Delta \varphi_3 + \Delta \varphi_4 + \Delta \varphi_5)$ .  
 Berechnet sind  $\Delta s$  und  $\Delta \varphi$  als Änderungen der Stabzugwinkel  $\varphi$ .  
 Annahmen über die für die Entwicklung des ersten Planes notwendigen Formänderungen:  
 $u_3 = 0$ ,  $v_3 = 0$ ,  $\vartheta_3 = 0$ .  
 $b''b' \parallel$  zur Rollenbewegung in  $b$ ,  $a''a' \perp ab$ .

Abb. 131.

Hiernach liefert der erste Plan für Punkt 5 die Verschiebung  $\vec{O}5'$ , für den Punkt  $a$  die Verschiebung  $\vec{O}a'$ , für den Punkt  $b$  die Verschiebung  $\vec{O}b'$ . Um die Stützenbedingung  $a$  zu erfüllen, tritt zu allen Verschiebungen des ersten Planes der Verschiebungsvektor  $\vec{a'O}$ , so daß für  $b$  die Verschiebung  $\vec{a'O} + \vec{O}b' = \vec{a'b'}$  erhalten wird. Da jedoch die wirkliche Verschiebung von  $b$  parallel zur Rollenbewegung gerichtet ist, treten zu den Verschiebungen  $\vec{a'5'}$  usw.  $\vec{a'b'}$  die Wege aus einer Drehung des Stabzugs um den Punkt  $a$ . Der Weg  $\vec{b''a''}$  des Punktes  $b$  steht senkrecht zum zugeordneten Fahrstrahl  $ab$ . Die Länge des Drehweges  $\vec{b''a''}$  ist bestimmt durch die bekannte Richtung der resultierenden Verschiebung  $\vec{b''b'}$ . Mit  $\vec{a'a''}$  und  $\vec{b''b'}$  ist

der zweite Verschiebungsplan als eine zur Grundfigur ähnliche, um  $90^\circ$  gedrehte Figur ( $a'' \dots 3'' \dots b''$ ) bestimmt. Die wirkliche Verschiebung des Punktes  $k$  ist daher  $\vec{k''k'}$ .

Boussinesq, J.: Compt. rend. Bd. 96 (1883) S. 843. — Forchheimer, Ph.: Über die Festigkeit weiter Rohre. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1904 S. 133. — Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre 4. Aufl. 1913. — Mayer, R.: Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Z. Math. Physik Bd. 61 (1913) S. 246. — Derselbe: Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 216.

## 22. Der gerade Stab auf elastischer Unterlage.

**Elastizitätsgesetz.** Der durchgehend elastisch gestützte Stab kann als Grenzfall eines Trägers auf unendlich vielen elastisch senkbaren Stützen angesehen werden. Eine beliebige Teilbelastung, unter anderem die Einzellast  $P$  über einer Stütze, führt auch zur senkrechten Verschiebung der benachbarten Stützpunkte. Ihre Abstände sind im Grenzfall verschwindend klein, so daß das Gleichgewicht

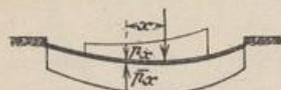


Abb. 132.

der Schnittkräfte für einen infinitesimalen Abschnitt  $dx$  des Stabes nach (48) angegeben werden kann:

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = [p(x) - \bar{p}(x)] b. \quad (254)$$

$b$  ist die Breite des Stabes,  $p(x)$  die Auflast und  $\bar{p}(x)$  der auf die Flächeneinheit bezogene Widerstand der Unterlage. Dieser ist eine Funktion der Ausbiegung des Stabes und der physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels und wird nach der Begründung in Abschn. 7 mit

$$\bar{p}(x) = c w(x) \quad (255)$$

eingeführt.  $c$  ist ein von den Eigenschaften der Unterlage und von der Form und Größe der stützenden Fläche abhängiger konstanter Leitwert. Der waagerechte Widerstand in der Grenzschicht gegen eine Richtungsänderung der Stabtangente wird nicht berücksichtigt.

**Ansatz und Lösung der Differentialgleichung.** Die Krümmung des Stabes ist nach (209)  $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ , und damit die Gleichgewichtsbedingung (254)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c b w = b p(x), \quad (256)$$

oder

$$\frac{d^4 M}{dx^4} = -b \frac{d^2}{dx^2} [p(x) - \bar{p}(x)], \quad \frac{d^4 M}{dx^4} - c b \frac{d^2 w}{dx^2} = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}.$$

also

$$\frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{c b}{EJ} M = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (257)$$

Die Differentialquotienten werden bei veränderlichem Trägheitsmoment oder bei wechselndem Leitwert  $c$  am einfachsten durch Differenzenquotienten ersetzt und nach (212) zu linearen algebraischen Gleichungen entwickelt. Die Anzahl der unbekanntenen Einsenkungen  $w_k$  oder der Biegemomente  $M_k$  ist ebenso groß wie die Anzahl der verfügbaren Bedingungen.

Bei konstantem Trägheitsmoment ist

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + c b w = b p(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{b c}{EJ} M = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (258)$$

Die Lösung  $w, M$  besteht aus einem partikulären Integral  $w_0, M_0$  der vollständigen