



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

22. Der gerade Stab auf elastischer Unterlage

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

der zweite Verschiebungsplan als eine zur Grundfigur ähnliche, um 90° gedrehte Figur ($a'' \dots 3'' \dots b''$) bestimmt. Die wirkliche Verschiebung des Punktes k ist daher $\vec{k''k'}$.

Boussinesq, J.: Compt. rend. Bd. 96 (1883) S. 843. — Forchheimer, Ph.: Über die Festigkeit weiter Rohre. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1904 S. 133. — Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre 4. Aufl. 1913. — Mayer, R.: Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Z. Math. Physik Bd. 61 (1913) S. 246. — Derselbe: Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 216.

22. Der gerade Stab auf elastischer Unterlage.

Elastizitätsgesetz. Der durchgehend elastisch gestützte Stab kann als Grenzfall eines Trägers auf unendlich vielen elastisch senkbaren Stützen angesehen werden. Eine beliebige Teilbelastung, unter anderem die Einzellast P über einer Stütze, führt auch zur senkrechten Verschiebung der benachbarten Stützpunkte. Ihre Abstände sind im Grenzfall verschwindend klein, so daß das Gleichgewicht der Schnittkräfte für einen infinitesimalen Abschnitt dx des Stabes nach (48) angegeben werden kann:

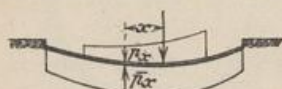


Abb. 132.

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = [p(x) - \bar{p}(x)] b. \quad (254)$$

b ist die Breite des Stabes, $p(x)$ die Auflast und $\bar{p}(x)$ der auf die Flächeneinheit bezogene Widerstand der Unterlage. Dieser ist eine Funktion der Ausbiegung des Stabes und der physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels und wird nach der Begründung in Abschn. 7 mit

$$\bar{p}(x) = c w(x) \quad (255)$$

eingeführt. c ist ein von den Eigenschaften der Unterlage und von der Form und Größe der stützenden Fläche abhängiger konstanter Leitwert. Der waagerechte Widerstand in der Grenzschnitt gegen eine Richtungsänderung der Stabtangente wird nicht berücksichtigt.

Ansatz und Lösung der Differentialgleichung. Die Krümmung des Stabes ist nach (209) $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$, und damit die Gleichgewichtsbedingung (254)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + c b w = b p(x), \quad (256)$$

oder

$$\frac{d^4 M}{dx^4} = -b \frac{d^2}{dx^2} [p(x) - \bar{p}(x)], \quad \frac{d^4 M}{dx^4} - c b \frac{d^2 w}{dx^2} = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}.$$

also

$$\frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{c b}{EJ} M = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (257)$$

Die Differentialquotienten werden bei veränderlichem Trägheitsmoment oder bei wechselndem Leitwert c am einfachsten durch Differenzenquotienten ersetzt und nach (212) zu linearen algebraischen Gleichungen entwickelt. Die Anzahl der unbekanntenen Einsenkungen w_k oder der Biegemomente M_k ist ebenso groß wie die Anzahl der verfügbaren Bedingungen.

Bei konstantem Trägheitsmoment ist

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + c b w = b p(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 M}{dx^4} + \frac{b c}{EJ} M = -b \frac{d^2 p(x)}{dx^2}. \quad (258)$$

Die Lösung w, M besteht aus einem partikulären Integral w_0, M_0 der vollständigen

Gleichung und der allgemeinen Lösung w_1, M_1 der homogenen Gleichung. Diese wird aus

$$\frac{4EJ}{bc} \frac{d^4 w_1}{dx^4} + 4w_1 = 0, \quad \frac{4EJ}{bc} \frac{d^4 M_1}{dx^4} + 4M_1 = 0,$$

oder mit

$$L^4 = \frac{4EJ}{bc}, \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{bc}}, \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (259)$$

aus

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + 4w_1 = 0, \quad \frac{d^4 M_1}{d\xi^4} + 4M_1 = 0$$

erhalten. Aus dem Ansatz w_1 oder $M_1 = e^{\mu \xi}$ folgt die charakteristische Gleichung $\mu^4 + 4 = 0$ mit den vier Wurzeln $\mu_1 = (1 + i)$, $\mu_2 = (1 - i)$, $\mu_3 = -(1 + i)$, $\mu_4 = -(1 - i)$. Die Lösung lautet nach einer Umformung:

$$w = w_0 + w_1 = w_0 + [U_1 \cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi + U_2 \cos \xi \mathfrak{S}in \xi + U_3 \sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi + U_4 \sin \xi \mathfrak{S}in \xi], \quad (260)^1$$

$$M = M_0 + M_1 = M_0 + [C_1 \cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi + C_2 \cos \xi \mathfrak{S}in \xi + C_3 \sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi + C_4 \sin \xi \mathfrak{S}in \xi]. \quad (261)^1$$

Die Ableitungen werden für die Funktion w angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{dw_0}{dx} + \frac{1}{L} [U_1 (\cos \xi \mathfrak{S}in \xi - \sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi) + U_2 (\cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi - \sin \xi \mathfrak{S}in \xi) \\ &\quad + U_3 (\sin \xi \mathfrak{S}in \xi + \cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi) + U_4 (\sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi + \cos \xi \mathfrak{S}in \xi)], \\ -M &= EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = EJ \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{2EJ}{L^2} [U_1 \sin \xi \mathfrak{S}in \xi + U_2 \sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi \\ &\quad - U_3 \cos \xi \mathfrak{S}in \xi - U_4 \cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi], \\ -Q &= EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = EJ \frac{d^3 w_0}{dx^3} - \frac{2EJ}{L^3} [U_1 (\sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi + \cos \xi \mathfrak{S}in \xi) \\ &\quad + U_2 (\sin \xi \mathfrak{S}in \xi + \cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi) - U_3 (\cos \xi \mathfrak{C}o\int \xi - \sin \xi \mathfrak{S}in \xi) \\ &\quad - U_4 (\cos \xi \mathfrak{S}in \xi - \sin \xi \mathfrak{C}o\int \xi)] \end{aligned} \right\} \quad (262)$$

Aus dem zweiten Ansatz kann folgendes Ergebnis angeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{dM_0}{dx} + \frac{1}{L} \frac{dM_1}{d\xi}, \quad cw = \phi(x) + \frac{1}{b} \frac{d^2 M_0}{dx^2} + \frac{1}{bL^2} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2}, \\ c \frac{dw}{dx} &= \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{1}{b} \frac{d^3 M_0}{dx^3} + \frac{1}{bL^3} \frac{d^3 M_1}{d\xi^3} \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

Die Integrationskonstanten U, C werden aus den Randbedingungen bestimmt, von denen zwei an jedem Stabende und vier an jeder Unstetigkeitsstelle vorgeschrieben sind. L ist die für einen elastisch gestützten Stab charakteristische Länge.

Die Diskussion des homogenen Anteils der Lösung wird durch eine andere Zusammenfassung der Integrationskonstanten und damit durch den folgenden Ansatz M_1 oder w_1 erleichtert:

$$w_1 = C_1 e^{\xi} \cos(\xi + \sigma_1) + C_2 e^{-\xi} \cos(\xi + \sigma_2)$$

Verschiebung und Spannung klingen nach einer gedämpften harmonischen Schwingung ab, deren Nullstellen um die gleichbleibende Strecke

$$x_0 = \pi L = \pi \sqrt[4]{\frac{4EJ}{bc}}$$

voneinander entfernt sind. Die logarithmische Abnahme der Amplituden w_1 und M_1 ist π . Sie klingen um so schneller ab, je kleiner x_0 , also je kleiner J und je größer der Leitwert c ist.

¹ Hayashi, K.: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin 1921.

Lösung für den unendlich langen Stab. Die Lösung ist für den vom Nullpunkt aus nach einer oder beiden Seiten unendlich langen Stab bei Belastung durch die Einzellast P_0 oder das Kräftepaar M_0 besonders einfach. Nach dem Ansatz $w = w' = 0$ für $\xi = \infty$ wird $U_2 = -U_1, U_4 = -U_3$. U_1 und U_3 ergeben sich dann aus zwei Randbedingungen für $\xi = 0$. Das Ergebnis enthält zwei charakteristische Funktionen:

$$\zeta_1 = e^{-\xi} \cos \xi, \quad \zeta_2 = e^{-\xi} \sin \xi,$$

in denen die Veränderliche ξ stets mit ihrem absoluten Werte einzusetzen ist, um den Ansatz auch für negative Werte ξ verwenden zu können.

a) Der nach beiden Seiten unendlich lange Stab mit einer Einzellast P_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{P_0}{2Lbc} (\zeta_1 + \zeta_2), & \frac{dw}{dx} &= -\frac{P_0}{L^2bc} \zeta_2, & M &= \frac{P_0 L}{4} (\zeta_1 - \zeta_2), & Q &= -\frac{P_0}{2} \zeta_1; \\ x = \xi = 0: & w = \frac{P_0}{2Lbc}, & \frac{dw}{dx} &= 0, & M &= \frac{P_0 L}{4}, & Q &= -\frac{P_0}{2}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (264) \\ \text{Abb. 133} \end{array}$$

b) Der nach beiden Seiten unendlich lange Stab mit einem Kräftepaar M_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{M_0}{L^2bc} \zeta_2, & \frac{dw}{dx} &= \frac{M_0}{L^3bc} (\zeta_1 - \zeta_2), & M &= \frac{M_0}{2} \zeta_1, & Q &= -\frac{M_0}{2L} (\zeta_1 + \zeta_2); \\ x = \xi = 0: & w = 0, & \frac{dw}{dx} &= \frac{M_0}{L^3bc}, & M &= \frac{M_0}{2}, & Q &= -\frac{M_0}{2L}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (265) \\ \text{Abb. 134} \end{array}$$



Abb. 133.



Abb. 134.

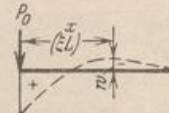


Abb. 135.



Abb. 136.

c) Der einseitig unendlich ausgedehnte Stab mit einer Einzellast P_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{2P_0}{Lbc} \zeta_1, & \frac{dw}{dx} &= -\frac{2P_0}{L^2bc} (\zeta_1 + \zeta_2), & M &= -P_0 L \zeta_2, & Q &= -P_0 (\zeta_1 - \zeta_2); \\ x = \xi = 0: & w = \frac{2P_0}{Lbc}, & \frac{dw}{dx} &= -\frac{2P_0}{L^2bc}, & M &= 0, & Q &= -P_0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (266) \\ \text{Abb. 135} \end{array}$$

d) Der einseitig unendlich ausgedehnte Stab mit einem Kräftepaar M_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{2M_0}{L^2bc} (\zeta_1 - \zeta_2), & \frac{dw}{dx} &= \frac{4M_0}{L^3bc} \zeta_1, & M &= M_0 (\zeta_1 + \zeta_2), & Q &= -\frac{2M_0}{L} \zeta_2; \\ x = \xi = 0: & w = -\frac{2M_0}{L^2bc}, & \frac{dw}{dx} &= \frac{4M_0}{L^3bc}, & M &= M_0, & Q &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (267) \\ \text{Abb. 136} \end{array}$$



Abb. 137.

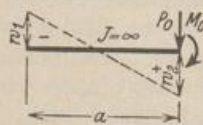


Abb. 138.

Lösung für den starren Stab. Ein anderer Grenzfall ist der durchlaufend elastisch gestützte Stab von der Länge a und einem $J \approx \infty$. Die Durchbiegung w ist dann eine lineare, durch die Randwerte w_1 und w_2 bestimmte Funktion.

a) Lastangriff P_0, M_0 in Stabmitte (Abb. 137).

$$c w_{1/2} = \frac{P_0}{ab} \mp \frac{6M_0}{a^2b}, \quad c \frac{dw}{dx} = \frac{12M_0}{a^3b}. \quad (268)$$

b) Lastangriff P_0, M_0 am Stabende (Abb. 138).

$$\left. \begin{aligned} c w_1 &= -\frac{2P_0}{ab} - \frac{6M_0}{a^2b}, & c w_2 &= \frac{4P_0}{ab} + \frac{6M_0}{a^2b}, \\ c \frac{dw}{dx} &= \frac{6P_0}{a^2b} + \frac{12M_0}{a^3b}. \end{aligned} \right\} (269)$$

Lösung der homogenen Gleichung des kurzen Stabes für vorgeschriebene Randkräfte. Zur einfachen Verwendung der Theorie im Bauwesen wird die allge-

meine Lösung (260) der homogenen Gleichung für symmetrische und antimetrische Randkräfte angegeben. Bei Symmetrie verschwinden die ungeraden Funktionen der Lösung (260) mit U_2 und U_3 , bei Antimetrie die geraden Funktionen mit U_1 und U_4 . Das Ergebnis lautet mit den Abkürzungen*

$\cos \xi \operatorname{Coj} \xi = \eta_1, \quad \sin \xi \operatorname{Sin} \xi = \eta_4, \quad \cos \xi \operatorname{Sin} \xi = \eta_2, \quad \sin \xi \operatorname{Coj} \xi = \eta_3, \quad \lambda = \frac{l}{L}$
folgendermaßen:

Symmetrischer Belastungsfall:

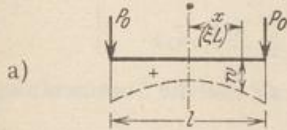


Abb. 139.

$$w = \frac{4 P_0}{L b c} (U_1 \eta_1 + U_4 \eta_4), \quad (270)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 P_0}{L^2 b c} [U_1 (\eta_2 - \eta_3) + U_4 (\eta_2 + \eta_3)],$$

$$M = 2 P_0 L (U_1 \eta_4 - U_4 \eta_1),$$

$$Q = 2 P_0 [U_1 (\eta_2 + \eta_3) - U_4 (\eta_2 - \eta_3)],$$

$$U_1 = \frac{\cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda},$$

$$U_4 = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda}$$

Antimetrischer Belastungsfall:

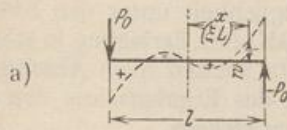


Abb. 141.

$$w = \frac{4 P_0}{L b c} (U_2 \eta_2 + U_3 \eta_3), \quad (272)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 P_0}{L^2 b c} [U_2 (\eta_1 - \eta_4) + U_3 (\eta_1 + \eta_4)],$$

$$M = 2 P_0 L (U_2 \eta_3 - U_3 \eta_2),$$

$$Q = 2 P_0 [U_2 (\eta_1 + \eta_4) - U_3 (\eta_1 - \eta_4)],$$

$$U_2 = -\frac{\cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda},$$

$$U_3 = -\frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda}$$

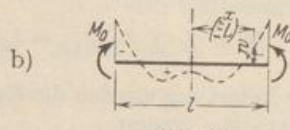


Abb. 140.

$$w = \frac{4 M_0}{L^2 b c} (U_1 \eta_1 + U_4 \eta_4), \quad (271)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 M_0}{L^3 b c} [U_1 (\eta_2 - \eta_3) + U_4 (\eta_2 + \eta_3)],$$

$$M = 2 M_0 (U_1 \eta_4 - U_4 \eta_1),$$

$$Q = \frac{2 M_0}{L} [U_1 (\eta_2 + \eta_3) - U_4 (\eta_2 - \eta_3)],$$

$$U_1 = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda},$$

$$U_4 = -\frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda}$$

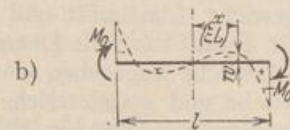


Abb. 142.

$$w = \frac{4 M_0}{L^2 b c} (U_2 \eta_2 + U_3 \eta_3), \quad (273)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 M_0}{L^3 b c} [U_2 (\eta_1 - \eta_4) + U_3 (\eta_1 + \eta_4)],$$

$$M = 2 M_0 (U_2 \eta_3 - U_3 \eta_2),$$

$$Q = \frac{2 M_0}{L} [U_2 (\eta_1 + \eta_4) - U_3 (\eta_1 - \eta_4)],$$

$$U_2 = -\frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda},$$

$$U_3 = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda}$$

$$* \quad \eta_1 = 1 - \frac{2^2}{4!} \xi^4 + \frac{2^4}{8!} \xi^8 - \frac{2^6}{12!} \xi^{12} \pm \dots, \quad \eta_2 = \xi - \frac{2}{3!} \xi^3 - \frac{2^2}{5!} \xi^5 + \frac{2^3}{7!} \xi^7 + \frac{2^4}{9!} \xi^9 - \frac{2^5}{11!} \xi^{11} - \frac{2^6}{13!} \xi^{13} \pm \dots,$$

$$\eta_4 = \xi^2 - \frac{2^3}{6!} \xi^6 + \frac{2^5}{10!} \xi^{10} - \frac{2^7}{14!} \xi^{14} \pm \dots, \quad \eta_3 = \xi + \frac{2}{3!} \xi^3 - \frac{2^2}{5!} \xi^5 - \frac{2^3}{7!} \xi^7 + \frac{2^4}{9!} \xi^9 + \frac{2^5}{11!} \xi^{11} \mp \dots$$

Unstetige Ansätze: a) für Einzellasten, b) für veränderliches Trägheitsmoment. a) Bei einem nach beiden Seiten unendlich ausgedehnten Stabe darf der Angriffspunkt einer jeden Einzellast P_k und eines jeden Kräftepaars M_k als Symmetriepunkt angesehen werden, so daß der Verschiebungs- und Spannungszustand eines ausgezeichneten Querschnitts im Abstand $x_k, (\xi_k)$ von dem Lastangriff P_k, M_k durch Superposition gefunden wird (Abb. 143).

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{1}{2Lbc} \sum P_k (\zeta_{1k} + \zeta_{2k}), & \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{L^2bc} \sum P_k \zeta_{2k}, \\ M &= \frac{L}{4} \sum P_k (\zeta_{1k} - \zeta_{2k}), & Q &= -\frac{1}{2} \sum P_k \zeta_{1k}. \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

Bei stetiger Belastung werden die Kräfte P_k durch $p(x)Ld\xi$ und die Summenbildung durch Integration ersetzt.

Die Schnittkräfte aus der beliebigen Belastung eines unendlich langen Stabes gelten auch für den Stab mit einer vorgeschriebenen Länge l , wenn neben der

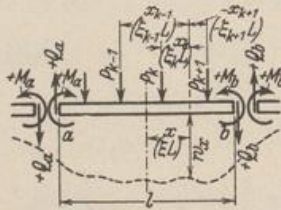


Abb. 143.

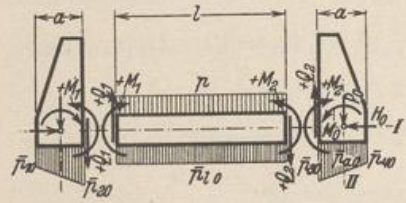


Abb. 144.

Belastung die den Enden a, b zugeordneten Schnittkräfte M_a, Q_a, M_b, Q_b des unendlich langen Stabes als äußere Kräfte wirken. Überlagert man diese Schnittkräfte nachträglich mit einer Zusatzlösung, welche für die negativen Kräfte ($M_a \dots Q_b$) als Randkräfte des Stabes l berechnet wird, so sind die Bedingungen für Gleichgewicht, Elastizität und geometrische Verträglichkeit unter den Einzellasten erfüllt. Damit kann die Lösung für den kurzen Stab ohne Zerlegung in stetige Integrationsbereiche angegeben werden. Die Randkräfte werden nach Abschn. 27 in symmetrische und antisymmetrische Anteile zerlegt, um das Ergebnis aus den bekannten Teillösungen (270) bis (273) unmittelbar zu entwickeln.

b) Die Bestimmung der Integrationskonstanten läßt sich auch bei wechselndem Trägheitsmoment umgehen, wenn die Lösung (260) für jeden Abschnitt $(i-1), i$ des Trägers mit der vorgeschriebenen Belastung und den Schnittkräften $M_{i-1}, Q_{i-1}, M_i, Q_i$ als äußeren Kräften angeschrieben wird. Diese zunächst unbekanntes Schnittkräfte sind aus der Kontinuität der Formänderung des Stabes an den Intervallgrenzen bestimmt. An jedem Querschnitt i ist die gegenseitige Verschiebung $\delta_1^{(i)}$ und die gegenseitige Verdrehung $\delta_2^{(i)}$ der beiden i benachbarten Querschnitte Null. Bei zwei verschiedenen Trägheitsmomenten, also einfacher Unterteilung des Stabes ist daher nach dem Superpositionsgesetz

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \delta_{10} - Q_i \delta_{11} - M_i \delta_{12} = 0, \\ \delta_2 &= \delta_{20} - Q_i \delta_{21} - M_i \delta_{22} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

Hierbei bezeichnen δ_{11}, δ_{12} nach S. 159 die gegenseitigen Verschiebungen der Querschnitte infolge $-Q_i = 1$ und $-M_i = 1$, δ_{22}, δ_{21} die gegenseitigen Verdrehungen der beiden Querschnitte infolge von $-M_i = 1$ und $-Q_i = 1$ (Abb. 144).

Beispiel zu a).

Die Schnittkräfte in dem Träger eines Brückenrahmens. (Abb. 145, 146.) Abmessungen des Trägers: $l = 11,5$ m, $b = 2,0$ m, $h = 0,8$ m, $J = 0,0853$ m⁴, $E = 210000$ kg/cm². Der Leitwert c des Ansatzes (255) liegt zwischen den Grenzen $10 < c < 200$ kg/cm³. Die Untersuchung

wird daher für die beiden Grenzwerte durchgeführt, die Rechnung für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$ angegeben und das Ergebnis für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$ in () hinzugefügt. Nach Gl. (259) ist

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 2100000 \cdot 0,0853}{2,0 \cdot 10000}} = 2,447 \text{ m (1,157 m)}.$$

Die Stützen des Rahmens übertragen die Belastung des Überbaues aus Eigengewicht, Nutzlast und Wind. Hierbei ergeben sich die folgenden Längskräfte der Pfosten:

$$P_1 = 83 \text{ t}, \quad P_2 = 91 \text{ t}, \quad P_3 = 99 \text{ t}, \quad P_4 = 107 \text{ t}.$$

1. Lösung für den unendlich langen Stab. Nach (274) wird

$$c \bar{w} = \frac{1}{2 \cdot 2,447 \cdot 2,0} \sum_{k=1}^{k=4} P_k (\zeta_{1k} + \zeta_{2k}) = 0,1022 \sum_{k=1}^{k=4} P_k (\zeta_{1k} + \zeta_{2k}),$$

$$\bar{M} = \frac{2,447}{4} \sum_{k=1}^{k=4} P_k (\zeta_{1k} - \zeta_{2k}) = 0,6116 \sum_{k=1}^{k=4} P_k (\zeta_{1k} - \zeta_{2k}), \quad \bar{Q} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=4} P_k \zeta_{1k}.$$

Die Lasten wirken in gleichen Abständen, die auf ein Vielfaches einer Länge $a = \alpha L$ bezogen werden. Daher werden die Funktionen $c \bar{w}(\xi), \bar{M}(\xi), \bar{Q}(\xi)$ auch nur für eine Last $P = 1 \text{ t}$ berechnet ($c \bar{w}_0, \bar{M}_0, \bar{Q}_0$) und an jedem Querschnitt die mit den einzelnen Lasten $P_1 \dots P_4$ erweiterten Beträge vorzeichengemäß addiert.

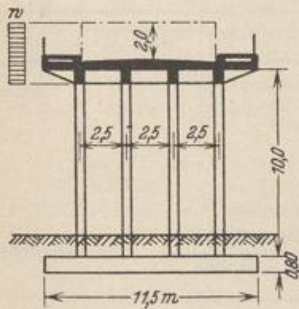


Abb. 145.

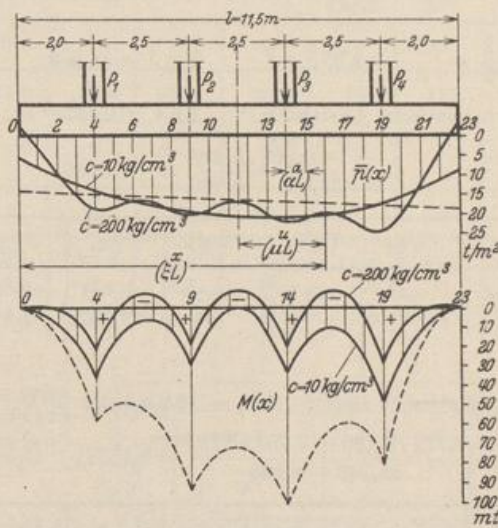


Abb. 146.

$$x = n \cdot a, \quad n = 0, 1, 2 \dots 23, \quad a = 0,5 \text{ m}, \quad \xi = n \alpha = x/L.$$

n	x	ξ	$e^{-\xi}$	$\sin \xi$	$\cos \xi$	ζ_1	ζ_2	$(\zeta_1 + \zeta_2)$	$(\zeta_1 - \zeta_2)$	$c \bar{w}_0$	\bar{M}_0	\bar{Q}_0
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0,1022	0,6116	-0,500
1	0,5	0,204	0,815	0,202	0,979	0,798	0,165	0,963	0,633	0,0984	0,3875	-0,399
2	1,0	0,409	0,664	0,398	0,918	0,610	0,264	0,874	0,346	0,0894	0,2120	-0,305
...

$$c \bar{w} = \sum_{k=1}^{k=4} P_k c \bar{w}_{0k}, \quad \bar{M} = \sum_{k=1}^{k=4} P_k \bar{M}_{0k}, \quad \bar{Q} = \sum_{k=1}^{k=4} P_k \bar{Q}_{0k}.$$

Die Superposition mit $P_1 = 83 \text{ t}, \dots, P_4 = 107 \text{ t}$ ergibt:

n	0..	..4..	..9	10	11	12	13	14..	..19..	..23	
$c \bar{w}$	5,6	13,2	19,1	19,7	20,1	20,4	20,5	20,5	16,1	7,3	t/m ²
\bar{M}	-16,5	30,6	31,3	12,4	3,4	4,5	15,9	37,8	46,3	-17,3	mt
\bar{Q}	+ 7,07	+44,7	+43,9	-27,7	- 7,8	+12,3	+32,8	+53,5	+48,8	-10,9	t
		-38,3	-47,1					-45,6	-58,2		

2. Zusatzlösung für den kurzen Stab. Die negativen Schnittkräfte des unendlich langen Stabes für

$$n = 0: -\bar{M} = -16,5 \text{ mt}, \quad -\bar{Q} = 7,07 \text{ t}; \quad n = 23: -\bar{M} = -17,3 \text{ mt}, \quad -\bar{Q} = -10,9 \text{ t}$$

werden als Randkräfte des kurzen Stabes eingeführt und nach (270) bis (273) in symmetrische (1) und antimetrische (2) Anteile zerlegt:

$${}^{(1)}P_0 = 9,0 \text{ t}, \quad {}^{(1)}M_0 = 16,9 \text{ mt}, \quad {}^{(2)}P_0 = -1,93 \text{ t}, \quad {}^{(2)}M_0 = -0,4 \text{ mt}.$$

Berechnung von $\eta_1 \dots \eta_4$, bezogen auf die Abszisse $u = \mu \cdot L$

n	u	μ	$\sin \mu$	$\cos \mu$	$\text{Sin } \mu$	$\text{Cos } \mu$	η_1	η_4	η_2	η_3
12	0,25	0,102	0,101	0,995	0,102	1,005	1	0,010	0,101	0,102
13	0,75	0,307	0,302	0,953	0,311	1,047	0,998	0,094	0,296	0,316
.
.

$$\lambda = \frac{l}{L} = \frac{11,5}{2,447} = 4,70, \quad \sin \lambda = -0,999, \quad \sin \frac{\lambda}{2} = 0,711, \quad \cos \frac{\lambda}{2} = -0,703,$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{4,70}{2} = 2,35, \quad \text{Sin } \lambda = 54,969, \quad \text{Sin } \frac{\lambda}{2} = 5,195, \quad \text{Cos } \frac{\lambda}{2} = 5,290.$$

Symmetrische Lasten ${}^{(1)}P_0 = 9,0 \text{ t}$. Gl. (270)

$$U_1 = \frac{-0,703 \cdot 5,290}{54,969 - 0,999} = -0,0689, \quad U_4 = \frac{0,711 \cdot 5,195}{54,969 - 0,999} = 0,0684.$$

n	$U_1 \eta_1$	$U_4 \eta_4$	${}^{(1)}c_{wP}$	$U_1 \eta_4$	$U_4 \eta_1$	${}^{(1)}M_P$	$U_1(\eta_2 + \eta_3)$	$U_4(\eta_2 - \eta_3)$	${}^{(1)}Q_P$
12	-0,069	0,001	-0,50	-0,001	0,068	-3,04	-0,014	0	-0,25
13	-0,069	0,006	-0,46	-0,006	0,068	-2,82	-0,042	-0,001	-0,74
.
.

Symmetrische Lasten ${}^{(1)}M_0 = 16,9 \text{ mt}$. Gl. (271)

$$U_1 = \frac{0,711 \cdot 5,290 + 0,703 \cdot 5,195}{54,969 - 0,999} = 0,1374, \quad U_4 = \frac{-0,711 \cdot 5,290 + 0,703 \cdot 5,195}{54,969 - 0,999} = -0,0020.$$

n	$U_1 \eta_1$	$U_4 \eta_4$	${}^{(1)}c_{wM}$	$U_1 \eta_4$	$U_4 \eta_1$	${}^{(1)}M_M$	$U_1(\eta_2 + \eta_3)$	$U_4(\eta_2 - \eta_3)$	${}^{(1)}Q_M$
12	0,137	0	0,77	0,001	-0,002	0,10	0,028	0	0,39
13	0,137	0	0,77	0,013	-0,002	0,51	0,084	0	1,16
.
.

In der gleichen Weise wird die Berechnung für die antimetrischen Anteile durchgeführt. Das Ergebnis ist für die andere Stabhälfte symmetrisch oder antimetrisch.

n	0..	..4..	..9	10	11	12	13	14..	..19..	..23	
${}^{(1)}c_{wP}$	3,74	1,07	-0,37	-0,46	-0,50	-0,50	-0,46	-0,37	1,07	3,74	t/m ²
${}^{(1)}c_{wM}$	-2,93	0,05	0,76	0,77	0,77	0,77	0,77	0,76	0,05	-2,93	„
${}^{(2)}c_{wP}$	-0,78	-0,25	-0,01	-0,00	-0,00	0,00	0,00	0,01	0,25	0,78	„
${}^{(2)}c_{wM}$	0,07	-0,00	-0,01	-0,01	-0,00	0,00	0,01	0,01	0,00	-0,07	„
${}^{(1)}M_P$	0	-6,96	-3,79	-2,82	-3,04	-3,04	-2,82	-3,79	-6,96	0	mt
${}^{(1)}M_M$	16,90	10,26	1,29	0,51	0,10	0,10	0,51	1,29	10,26	16,90	„
${}^{(2)}M_P$	0	1,55	0,63	0,39	0,13	-0,13	-0,39	-0,63	-1,55	0	„
${}^{(2)}M_M$	-0,40	-0,26	-0,06	-0,03	-0,01	0,01	0,03	0,06	0,26	0,40	„
${}^{(1)}Q_P$	-9,00	0,23	1,15	0,74	0,25	-0,25	-0,74	-1,15	-0,23	9,00	t
${}^{(1)}Q_M$	0	-4,69	-1,94	-1,16	-0,39	0,39	1,16	1,94	4,69	0	„
${}^{(2)}Q_P$	1,93	-0,03	-0,50	-0,51	-0,51	-0,54	-0,51	-0,03	-0,49	1,93	„
${}^{(2)}Q_M$	0	0,10	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05	0,10	0	„

3. Die Superposition der Ergebnisse aus 1. und 2. liefert Bodendruck und Schnittkräfte:

Für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$

n	0	2	4	5	6	7	8	9	10	11	
$cw = \bar{p}$	5,7	10,3	14,1	15,5	16,7	17,8	18,7	19,5	20,0	20,4	t/m ²
M	0	7,9	35,2	17,3	7,2	6,1	11,7	29,4	10,5	0,6	mt
Q	0	16,3	40,3 -42,7	-28,2	-11,8	5,7	23,5	42,6 -48,4	-28,6	-8,4	t

n	12	13	14	15	16	17	18	19	21	23	
$cw = \bar{p}$	20,7	20,8	20,9	20,7	20,3	19,5	18,8	17,5	13,6	8,8	t/m ²
M	1,4	13,2	33,1	17,0	10,4	13,1	26,0	48,3	11,0	0	mt
Q	11,9	32,8	53,8 -45,2	-24,3	-4,2	16,0	35,4	53,3 -53,7	-22,8	0	t

Für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$

n	0	2	4	5	6	7	8	9	10	11	
$cw = \bar{p}$	-2,9	9,6	19,0	18,5	17,0	17,0	19,0	20,5	19,0	17,2	t/m ²
M	0	1,2	21,1	2,7	-6,6	-7,4	0,6	18,0	-0,1	-8,7	mt
Q	0	6,6	36,5 -46,5	-27,5	-9,8	6,9	24,9	44,8 -46,2	-26,3	-8,3	t

n	12	13	14	15	16	17	18	19	21	23	
$cw = \bar{p}$	17,6	20,2	22,4	21,3	20,0	20,8	23,4	24,5	12,5	-3,6	t/m ²
M	-8,7	0,4	19,5	0,1	-8,8	-7,4	4,5	28,0	1,2	0	mt
Q	8,7	27,6	49,1 -49,9	-27,9	-7,3	12,8	34,9	59,2 -47,8	-8,7	0	t

\bar{p} und M sind in Abb. 146 dargestellt.

Bei Anwendung des Geradliniengesetzes für \bar{p} als Näherungslösung ergeben sich die in der Abb. 146 mit --- gezeichneten Bodenpressungen und Biegemomente.

Beispiel zu b).

Die Berechnung der Sohle eines Trocken-docks. (Abb. 147.) Spannungen bei gefüllter Dockkammer infolge Eigengewicht, Wasser und Erd- druck. Ein Unterdruck auf die Sohle soll nicht vorhanden sein. Der Leitwert c des Ansatzes (255) liegt zwischen den Grenzen $10 < c < 200 \text{ kg/cm}^3$. Die Untersuchung wird daher für die beiden Grenzwerte durchgeführt, die Rechnung für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$ angegeben und das Ergebnis für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$ in () hinzugefügt.

$$l = 38,0 \text{ m}, \quad a = 7,5 \text{ m}, \quad b = 1,0 \text{ m},$$

$$J_1 = 9,22 \text{ m}^4, \quad J_a = \infty, \quad E = 210000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Gl. (259) } L = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \cdot 9,22}{1,0 \cdot 10000}} = 9,38 \text{ m (4,44 m).}$$

$$G = 230 \text{ t/m}, \quad (c = 0,605 \text{ m}), \quad W = 77 \text{ t/m},$$

$$E_h = 78 \text{ t/m}, \quad E_v = 26 \text{ t/m},$$

$$g = 10,8 \text{ t/m}^2, \quad p_w = 12,4 \text{ t/m}^2, \quad p = g + p_w = 23,2 \text{ t/m}^2.$$

Die äußeren Kräfte an der Seitenwand werden im Schnittpunkt der beiden Achsen I, II Abb. 144 zusammengefaßt.

$$P_0 = 256 \text{ t/m}, \quad H_0 = 1 \text{ t/m}, \quad M_0 = 85,5 \text{ mt/m}.$$

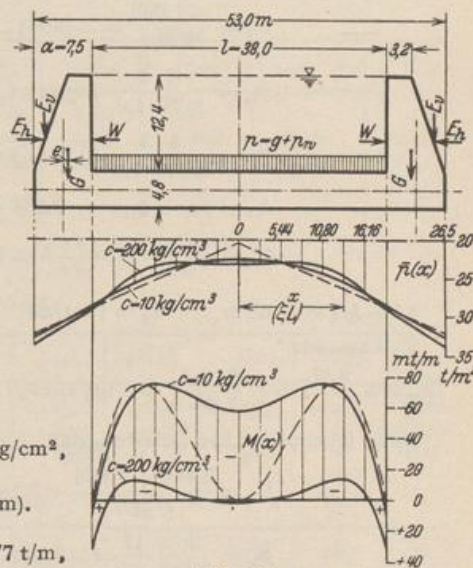


Abb. 147.

Bodendruck für Seitenwand und Sohle und Formänderungsgrößen δ_{11} , δ_{12} usw. für die rechte Hälfte des Systems (andere Hälfte symmetrisch) infolge:

1. P_0 , H_0 , M_0 .

$$\bar{p}_{30} = \frac{P_0}{ab} - \frac{6M_0}{a^2b} = \frac{256}{7,5 \cdot 1,0} - \frac{6(-85,5)}{7,5^2 \cdot 1,0} = 43,280 \text{ t/m}^2, \quad \bar{p}_{10} = p = 23,200 \text{ t/m}^2,$$

$$\frac{cdw_{a0}}{dx} = \frac{12M_0}{a^3b} = \frac{12(-85,5)}{7,5^3 \cdot 1,0} = -2,440, \quad \frac{cdw_{10}}{dx} = 0;$$

$$\delta_{10} = \bar{p}_{30} - p_{10} = 43,280 - 23,200 = 20,080 \text{ t/m}^2 (20,080 \text{ t/m}^2),$$

$$\delta_{20} = \frac{cdw_{a0}}{dx} - \frac{cdw_{10}}{dx} = -2,440 - 0 = -2,440 \text{ t/m}^3 (-2,440 \text{ t/m}^3).$$

2. $-Q_1 = 1 \text{ t/m}$, $-Q_2 = -1 \text{ t/m}$.

Seitenwand:

$$\bar{p}_{21} = -\frac{4Q_2}{ab} = -\frac{4 \cdot 1}{7,5 \cdot 1,0} = -0,534 \text{ t/m}^2, \quad \frac{cdw_{a1}}{dx} = \frac{6Q_2}{a^2b} = \frac{6 \cdot 1}{7,5^2 \cdot 1,0} = 0,107 \text{ t/m}^3.$$

Sohle (symmetrischer Belastungsfall, Abb. 139, $P_0 = 1 \text{ t}$) Gl. (270):

$$\lambda = \frac{l}{L} = \frac{38}{9,38} = 4,05, \quad \sin \lambda = -0,789, \quad \sin \frac{\lambda}{2} = 0,898, \quad \cos \frac{\lambda}{2} = -0,439,$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{4,05}{2} = 2,025, \quad \text{Sin} \lambda = 28,690, \quad \text{Sin} \frac{\lambda}{2} = 3,723, \quad \text{Cos} \frac{\lambda}{2} = 3,853.$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird nach Gl. (270):

$$\bar{\eta}_1 = \cos \frac{\lambda}{2} \text{Cos} \frac{\lambda}{2} = -0,439 \cdot 3,853 = -1,693, \quad \bar{\eta}_2 = \cos \frac{\lambda}{2} \text{Sin} \frac{\lambda}{2} = -0,439 \cdot 3,723 = -1,638,$$

$$\bar{\eta}_4 = \sin \frac{\lambda}{2} \text{Sin} \frac{\lambda}{2} = 0,898 \cdot 3,723 = 3,345, \quad \bar{\eta}_3 = \sin \frac{\lambda}{2} \text{Cos} \frac{\lambda}{2} = 0,898 \cdot 3,853 = 3,460,$$

$$U_1 = \frac{-1,693}{27,901} = -0,061, \quad U_4 = \frac{3,345}{27,901} = 0,120,$$

$$\bar{p}_{11} = \frac{4 \cdot 1}{9,38 \cdot 1,0} (0,061 \cdot 1,693 + 0,120 \cdot 3,345) = 0,215 \text{ t/m}^2,$$

$$\frac{cdw_{11}}{dx} = \frac{4 \cdot 1}{9,38^2 \cdot 1,0} (0,061 \cdot 5,098 + 0,120 \cdot 1,822) = 0,024 \text{ t/m}^3;$$

$$\delta_{11} = \bar{p}_{21} - \bar{p}_{11} = -0,534 - 0,215 = -0,749 \text{ t/m}^2 (-0,983 \text{ t/m}^2),$$

$$\delta_{21} = \frac{cdw_{a1}}{dx} - \frac{cdw_{11}}{dx} = 0,107 - 0,024 = 0,083 \text{ t/m}^3 (0,005 \text{ t/m}^3).$$

3. $-M_1 = 1 \text{ mt/m}$, $-M_2 = 1 \text{ mt/m}$.

Seitenwand:

$$\bar{p}_{32} = -\frac{6M_2}{a^2b} = -\frac{6(-1)}{7,5^2 \cdot 1} = 0,107 \text{ t/m}^2, \quad \frac{cdw_{a2}}{dx} = +\frac{12M_0}{a^3b} = \frac{12(-1)}{7,5^3 \cdot 1,0} = -0,029 \text{ t/m}^3.$$

Sohle (symmetrischer Belastungsfall, Abb. 140, $M_0 = -1 \text{ mt}$) Gl. (271):

$$U_1 = \frac{3,460 + 1,638}{27,901} = 0,183, \quad U_4 = -\frac{3,460 - 1,638}{27,901} = -0,065,$$

$$\bar{p}_{12} = \frac{4(-1)}{9,38^2 \cdot 1,0} (-0,183 \cdot 1,693 - 0,065 \cdot 3,345) = 0,024 \text{ t/m}^2,$$

$$\frac{cdw_{12}}{dx} = \frac{4(-1)}{9,38^3 \cdot 1,0} (-0,183 \cdot 5,098 - 0,065 \cdot 1,822) = 0,005 \text{ t/m}^3;$$

$$\delta_{12} = \bar{p}_{32} - \bar{p}_{12} = 0,107 - 0,024 = 0,083 \text{ t/m}^2 (0,005 \text{ t/m}^2),$$

$$\delta_{22} = \frac{cdw_{a2}}{dx} - \frac{cdw_{12}}{dx} = -0,029 - 0,005 = -0,034 \text{ t/m}^3 (-0,074 \text{ t/m}^3).$$

Bedingungen für die Schnittkräfte aus der Kontinuität (275):

$$20,080 + 0,749 Q_2 - 0,083 M_2 = 0,$$

$$- 2,440 - 0,083 Q_2 + 0,034 M_2 = 0,$$

woraus

$$M_2 = M_1 = 8,67 \text{ mt/m (31,40 mt/m)},$$

$$- Q_2 = Q_1 = - 25,85 \text{ t/m (- 20,25 t/m)}.$$

4. Schnittkräfte in der Sohle aus $p = 23,2 \text{ t/m}^2$.

$$\bar{p}(x) = p = 23,2 \text{ t/m}, \quad M = 0, \quad Q = 0.$$

5. Schnittkräfte in der Sohle aus $M_1, M_2, Q_1, -Q_2$. Berechnung von $\eta_1 \dots \eta_4$.

x	ξ	$\sin \xi$	$\cos \xi$	$\text{Sin } \xi$	$\text{Cos } \xi$	η_1	η_4	η_2	η_3	$\eta_2 + \eta_3$	$\eta_2 - \eta_3$
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
2,72	0,29	0,286	0,958	0,294	1,042	1	0,084	0,282	0,298	0,580	-0,016
5,44	0,58	0,548	0,836	0,613	1,173	0,981	0,336	0,513	0,644	1,157	-0,131
.
.

Symmetrische Belastung $(1)P_0 = -Q_2 = -25,85 \text{ t/m}$. Gl. (270). Nach 2. ist $U_1 = -0,061$, $U_4 = 0,120$.

x	$U_1 \eta_1$	$U_4 \eta_4$	$(1)\bar{p}_P$	$U_1 \eta_4$	$U_4 \eta_1$	$(1)M_P$	$U_1(\eta_2 + \eta_3)$	$U_4(\eta_2 - \eta_3)$	$(1)Q_P$
0	-0,061	0	-0,67	0	0,120	-58,3	0	0	0
2,72	-0,061	0,010	-0,56	-0,005	0,110	-60,7	-0,035	-0,002	-1,71
5,44	-0,060	0,040	-0,22	-0,021	0,118	-67,6	-0,070	-0,016	-2,79
.
.

Symmetrische Belastung $(1)M_0 = M_2 = 8,47 \text{ mt/m}$, Gl. (271). Nach 3. ist $U_1 = 0,183$, $U_4 = -0,065$.

x	$U_1 \eta_1$	$U_4 \eta_4$	$(1)\bar{p}_M$	$U_1 \eta_4$	$U_4 \eta_1$	$(1)M_M$	$U_1(\eta_2 + \eta_3)$	$U_4(\eta_2 - \eta_3)$	$(1)Q_M$
0	0,183	0	0,07	0	-0,065	1,10	0	0	0
2,72	0,183	-0,005	0,07	0,002	-0,065	1,14	0,106	0,001	0,19
5,44	0,180	-0,022	0,06	0,061	-0,064	2,12	0,212	0,009	0,37
.
.

6. Die Superposition der Ergebnisse aus 4. und 5. liefert Bodendruck und Schnittkräfte:

Für $c = 10 \text{ kg/cm}^3$

x	0	2,72	5,44	8,08	10,8	13,5	16,16	19,0	26,5	m
$\bar{p}(x)$	22,6	22,7	23,1	23,7	24,5	25,6	27,0	28,6	32,8	t/m ²
$M(x)$	-57,2	-59,6	-65,5	-72,0	-75,5	-69,5	-45,0	8,7	—	mt/m
$Q(x)$	0	-1,5	-2,4	-2,1	0,6	5,2	13,4	25,9	—	t/m

Für $c = 200 \text{ kg/cm}^3$

x	0	2,72	5,44	8,08	10,8	13,5	16,16	19,0	26,5	m
$\bar{p}(x)$	23,0	23,0	23,0	23,0	23,4	24,6	23,7	29,1	33,7	t/m ²
$M(x)$	1,2	0,5	-1,4	-5,2	-10,0	-13,1	-5,0	+31,4	—	mt/m
$Q(x)$	0	-0,4	-1,0	-1,7	-1,8	-0,2	6,6	20,3	—	t/m

\bar{p} und M sind in Abb. 147 dargestellt.

Bei Anwendung der Näherungsrechnung nach Foerster: Taschenb. f. Bauing. Bd. 2, 5. Aufl. S. 585 ergeben sich die in der Abb. 147 mit --- gezeichneten Bodenpressungen und Biegemomente.

Anwendung der Theorie auf die angenäherte Berechnung des Trägerrostes. Wird eine Anzahl von Nebenträgern (a) winkelrecht zu n Unterzügen (b)

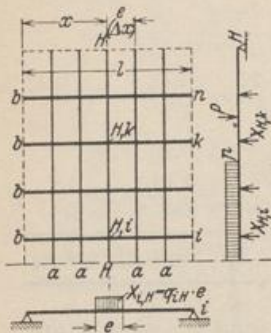


Abb. 148.

$$w_{H,k} = \delta_{H,k_0} - \sum_{i=1}^{i=n} X_{H,i} \delta_{H,ki} = \delta_{H,k_0} - \sum_{i=1}^{i=n} q_{H,i} e \delta_{H,ki}. \quad (276)$$

Hierbei bedeuten δ_{H,k_0} , $\delta_{H,ki}$ die Einsenkung des Punktes k des Nebenträgers H infolge dessen Belastung p , P und $-X_i = 1$. Da die Nebenträger gleichartig ausgebildet werden, sind die Vorzeichen $\delta_{H,ki}$ stets die gleichen, also $\delta_{H,ki} = \delta_{ki}$. Bei einer allgemeinen Belastung ist $\delta_{H,k_0} = \delta_{k_0}(x)$ für veränderliches H eine Funktion von x .

Für die Einsenkung des Punktes (H, i) als Punkt des Unterzuges i gilt $EJ_i w_{i,H}^{(IV)} = q_{i,H} = q_{H,i}$. Setzt man dieses in den Ansatz (276) ein, so entstehen mit einem Übergang von H auf die Variable x und mit $\delta_{ki}^* = eEJ_i \delta_{ki}$ insgesamt n simultane Differentialgleichungen vierter Ordnung von der Form

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta_{ki}^* w_i^{(IV)}(x) + w_k(x) = \delta_{k_0}(x), \quad k = 1 \dots n. \quad (277)$$

Ist die Belastung in x konstant, stetig oder unstetig, so gilt von $\delta_{k_0}(x)$ dasselbe. Für den Trägerrost mit einem Unterzug lautet der Ansatz (277) folgendermaßen:

$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{w(x)}{e \delta_{11}} = \frac{\delta_{10}(x)}{e \delta_{11}}. \quad (278)$$

Winkler, E.: Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prag 1867. — Zimmermann, H.: Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888. — Schwedler, J. W.: Beiträge zur Theorie des Eisenbahnoberbaues. Z. Bauverw. 1889 S. 86. — Freund, A.: Theorie der gleichmäßig elastisch gestützten Körper. Beton u. Eisen 1917 S. 144; 1918 S. 105. — Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin 1921. — Derselbe: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin 1921. — Wieghardt, K.: Über den Balken auf elastischer Unterlage. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 165. — Müller, E.: Über die lastverteilende Wirkung von Brückenbelägen. Bauing. 1923. — Freund, A.: Beitrag zur Berechnung der biegsamen Gründungssohlen. Z. Bauwes. 1924 S. 109. — Craemer, H.: Zur Berechnung geschlossener Kastenrahmen auf elastischem Baugrund. Bauing. 1925 S. 527. — Derselbe: Zur praktischen Statik der Kranbahnfundamente. Bauing. 1925 S. 417. — Schilling, W.: Statik der Bodenkonstruktion der Schiffe. Berlin 1925. — Pasternack, P.: Die baustatische Theorie biegeester Balken und Platten auf elastischer Bettung. Beton u. Eisen 1926. — Sanden, K., u. F. Schleicher: Zur Theorie des Balkens auf elastischer Unterlage. Beton u. Eisen 1926 S. 83. — Freund, A.: Erweiterte Theorie für die Berechnung von Schleusenböden und ähnlichen Gründungskörpern. Z. Bauwes. 1927 S. 73. — Chwalla, E.: Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. Z. angew. Math. Mech. 1927 S. 276. — Prager, W.: Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen. Z. angew. Math. Mech. 1927 S. 354. — Neményi, P.: Theorie durchlaufender trägerloser Fundamentstreifen auf elastischer Bettung. Beton u. Eisen 1928 S. 448. — Geckeler, J. W.: Elastostatik, Kap. 3 im Handb. Physik Bd. 6: Mechanik der elastischen Körper S. 178. Berlin 1928. — Fritz, H.: Einflußfläche des biegefesten Balkens auf elastischer Bettung. Beton u. Eisen 1930 S. 442. — Scheidig: Die Berechnungsgrundlagen durchgehender Fundamente und die neue Baugrundforschung. Bautechn. 1931 S. 275. — Neményi, P.: Tragwerke auf elast. Unterlage. Z. angew. Math. Mech. 1931 S. 450.