UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Ansatz und Lösung der Differentialgleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Visual Library

der zweite Verschiebungsplan als eine zur Grundfigur ähnliche, um 90° gedrehte Figur $(a'' \ldots 3'' \ldots b'')$ bestimmt. Die wirkliche Verschiebung des Punktes k ist daher $\overrightarrow{k''k'}$.

Boussinesq, J.: Compt. rend. Bd. 96 (1883) S. 843. — Forchheimer, Ph.: Über die Festigkeit weiter Rohre. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1904 S. 133. — Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre 4. Aufl. 1913. — Mayer, R.: Über Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Z. Math. Physik Bd. 61 (1913) S. 246. — Derselbe: Versuche über die ebene Biegung gekrümmter Stäbe. Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 216.

22. Der gerade Stab auf elastischer Unterlage.

Elastizitätsgesetz. Der durchgehend elastisch gestützte Stab kann als Grenzfall eines Trägers auf unendlich vielen elastisch senkbaren Stützen angesehen werden. Eine beliebige Teilbelastung, unter anderem die Einzellast P über einer Stütze, führt auch zur senkrechten Verschiebung der benachbarten Stützpunkte. Ihre Abstände sind im Grenzfall verschwindend klein, so daß das Gleichgewicht der Schnittkräfte für einen infinitesimalen Abschnitt dx des Stabes nach (48) angegeben werden kann:

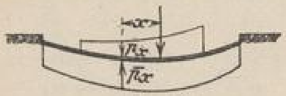

Abb. 132.

$$-\frac{d^2 M}{d x^2} = [p(x) - \bar{p}(x)]\, b\,. \tag{254}$$

b ist die Breite des Stabes, $p(x)$ die Auflast und $\bar{p}(x)$ der auf die Flächeneinheit bezogene Widerstand der Unterlage. Dieser ist eine Funktion der Ausbiegung des Stabes und der physikalischen Eigenschaften des stützenden Mittels und wird nach der Begründung in Abschn. 7 mit

$$\bar{p}(x) = c\, w(x) \tag{255}$$

eingeführt. c ist ein von den Eigenschaften der Unterlage und von der Form und Größe der stützenden Fläche abhängiger konstanter Leitwert. Der waagerechte Widerstand in der Grenzschicht gegen eine Richtungsänderung der Stabtangente wird nicht berücksichtigt.

Ansatz und Lösung der Differentialgleichung. Die Krümmung des Stabes ist nach (209) $\frac{d^2 w}{d x^2} = -\frac{M}{E J}$, und damit die Gleichgewichtsbedingung (254)

$$\frac{d^2}{d x^2}\left(E J \frac{d^2 w}{d x^2}\right) + c\, b\, w = b\, p(x), \tag{256}$$

oder

$$\frac{d^4 M}{d x^4} = -b \frac{d^2}{d x^2}[p(x) - \bar{p}(x)], \qquad \frac{d^4 M}{d x^4} - c\, b\, \frac{d^2 w}{d x^2} = -b\, \frac{d^2 p(x)}{d x^2}.$$

also

$$\frac{d^4 M}{d x^4} + \frac{c\, b}{E J} M = -b\, \frac{d^2 p(x)}{d x^2}. \tag{257}$$

Die Differentialquotienten werden bei veränderlichem Trägheitsmoment oder bei wechselndem Leitwert c am einfachsten durch Differenzenquotienten ersetzt und nach (212) zu linearen algebraischen Gleichungen entwickelt. Die Anzahl der unbekannten Einsenkungen w_k oder der Biegungsmomente M_k ist ebenso groß wie die Anzahl der verfügbaren Bedingungen.

Bei konstantem Trägheitsmoment ist

$$E J \frac{d^4 w}{d x^4} + c\, b\, w = b\, p(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d^4 M}{d x^4} + \frac{b\, c}{E J} M = -b\, \frac{d^2 p(x)}{d x^2}. \tag{258}$$

Die Lösung w, M besteht aus einem partikulären Integral w_0, M_0 der vollständigen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Gleichung und der allgemeinen Lösung w_1, M_1 der homogenen Gleichung. Diese wird aus

$$\frac{4EJ}{bc}\frac{d^4 w_1}{dx^4} + 4w_1 = 0, \qquad \frac{4EJ}{bc}\frac{d^4 M_1}{dx^4} + 4M_1 = 0,$$

oder mit

$$L^4 = \frac{4EJ}{bc}, \qquad L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{bc}}, \qquad \xi = \frac{x}{L} \tag{259}$$

aus

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + 4w_1 = 0, \qquad \frac{d^4 M_1}{d\xi^4} + 4M_1 = 0$$

erhalten. Aus dem Ansatz w_1 oder $M_1 = e^{\mu\xi}$ folgt die charakteristische Gleichung $\mu^4 + 4 = 0$ mit den vier Wurzeln $\mu_1 = (1+i)$, $\mu_2 = (1-i)$, $\mu_3 = -(1+i)$, $\mu_4 = -(1-i)$. Die Lösung lautet nach einer Umformung:

$$w = w_0 + w_1 = w_0 + [U_1 \cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi + U_2 \cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi + U_3 \sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi + U_4 \sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi], \quad (260)^1$$

$$M = M_0 + M_1 = M_0 + [C_1 \cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi + C_2 \cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi + C_3 \sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi + C_4 \sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi]. \quad (261)^1$$

Die Ableitungen werden für die Funktion w angegeben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= \frac{dw_0}{dx} + \frac{1}{L}[U_1(\cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi) + U_2(\cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi - \sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi) \\
&\quad + U_3(\sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi + \cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi) + U_4(\sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi)], \\
-M &= EJ\frac{d^2w}{dx^2} = EJ\frac{d^2w_0}{dx^2} - \frac{2EJ}{L^2}[U_1 \sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi + U_2 \sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi \\
&\quad - U_3 \cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi - U_4 \cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi], \\
-Q &= EJ\frac{d^3w}{dx^3} = EJ\frac{d^3w_0}{dx^3} - \frac{2EJ}{L^3}[U_1(\sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi) \\
&\quad + U_2(\sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi + \cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi) - U_3(\cos\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi - \sin\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi) \\
&\quad - U_4(\cos\xi\,\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi\,\mathfrak{Cof}\,\xi)]
\end{aligned}\right| \tag{262}$$

Aus dem zweiten Ansatz kann folgendes Ergebnis angeschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
Q &= \frac{dM_0}{dx} + \frac{1}{L}\frac{dM_1}{d\xi}, \qquad c\,w = p(x) + \frac{1}{b}\frac{d^2M_0}{dx^2} + \frac{1}{bL^2}\frac{d^2M_1}{d\xi^2}, \\
c\frac{dw}{dx} &= \frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{b}\frac{d^3M_0}{dx^3} + \frac{1}{bL^3}\frac{d^3M_1}{d\xi^3}
\end{aligned}\right\} \tag{263}$$

Die Integrationskonstanten U, C werden aus den Randbedingungen bestimmt, von denen zwei an jedem Stabende und vier an jeder Unstetigkeitsstelle vorgeschrieben sind. L ist die für einen elastisch gestützten Stab charakteristische Länge.

Die Diskussion des homogenen Anteils der Lösung wird durch eine andere Zusammenfassung der Integrationskonstanten und damit durch den folgenden Ansatz M_1 oder w_1 erleichtert:

$$w_1 = C_1 e^{\xi}\cos(\xi + \sigma_1) + C_2 e^{-\xi}\cos(\xi + \sigma_2)$$

Verschiebung und Spannung klingen nach einer gedämpften harmonischen Schwingung ab, deren Nullstellen um die gleichbleibende Strecke

$$x_0 = \pi L = \pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{bc}}$$

voneinander entfernt sind. Die logarithmische Abnahme der Amplituden w_1 und M_1 ist π. Sie klingen um so schneller ab, je kleiner x_0, also je kleiner J und je größer der Leitwert c ist.

---

[1] Hayashi, K.: Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin 1921.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN