



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Lösung der homogenen Gleichung des kurzen Stabes für vorgeschriebene
Randkräfte

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Lösung für den unendlich langen Stab. Die Lösung ist für den vom Nullpunkt aus nach einer oder beiden Seiten unendlich langen Stab bei Belastung durch die Einzellast P_0 oder das Kräftepaar M_0 besonders einfach. Nach dem Ansatz $w = w' = 0$ für $\xi = \infty$ wird $U_2 = -U_1, U_4 = -U_3$. U_1 und U_3 ergeben sich dann aus zwei Randbedingungen für $\xi = 0$. Das Ergebnis enthält zwei charakteristische Funktionen:

$$\zeta_1 = e^{-\xi} \cos \xi, \quad \zeta_2 = e^{-\xi} \sin \xi,$$

in denen die Veränderliche ξ stets mit ihrem absoluten Werte einzusetzen ist, um den Ansatz auch für negative Werte ξ verwenden zu können.

a) Der nach beiden Seiten unendlich lange Stab mit einer Einzellast P_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{P_0}{2Lbc} (\zeta_1 + \zeta_2), & \frac{dw}{dx} &= -\frac{P_0}{L^2bc} \zeta_2, & M &= \frac{P_0 L}{4} (\zeta_1 - \zeta_2), & Q &= -\frac{P_0}{2} \zeta_1; \\ x = \xi = 0: & w = \frac{P_0}{2Lbc}, & \frac{dw}{dx} &= 0, & M &= \frac{P_0 L}{4}, & Q &= -\frac{P_0}{2}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (264) \\ \text{Abb. 133} \end{array}$$

b) Der nach beiden Seiten unendlich lange Stab mit einem Kräftepaar M_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{M_0}{L^2bc} \zeta_2, & \frac{dw}{dx} &= \frac{M_0}{L^3bc} (\zeta_1 - \zeta_2), & M &= \frac{M_0}{2} \zeta_1, & Q &= -\frac{M_0}{2L} (\zeta_1 + \zeta_2); \\ x = \xi = 0: & w = 0, & \frac{dw}{dx} &= \frac{M_0}{L^3bc}, & M &= \frac{M_0}{2}, & Q &= -\frac{M_0}{2L}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (265) \\ \text{Abb. 134} \end{array}$$



Abb. 133.



Abb. 134.

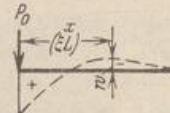


Abb. 135.



Abb. 136.

c) Der einseitig unendlich ausgedehnte Stab mit einer Einzellast P_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{2P_0}{Lbc} \zeta_1, & \frac{dw}{dx} &= -\frac{2P_0}{L^2bc} (\zeta_1 + \zeta_2), & M &= -P_0 L \zeta_2, & Q &= -P_0 (\zeta_1 - \zeta_2); \\ x = \xi = 0: & w = \frac{2P_0}{Lbc}, & \frac{dw}{dx} &= -\frac{2P_0}{L^2bc}, & M &= 0, & Q &= -P_0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (266) \\ \text{Abb. 135} \end{array}$$

d) Der einseitig unendlich ausgedehnte Stab mit einem Kräftepaar M_0 in $\xi = 0$.

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{2M_0}{L^2bc} (\zeta_1 - \zeta_2), & \frac{dw}{dx} &= \frac{4M_0}{L^3bc} \zeta_1, & M &= M_0 (\zeta_1 + \zeta_2), & Q &= -\frac{2M_0}{L} \zeta_2; \\ x = \xi = 0: & w = -\frac{2M_0}{L^2bc}, & \frac{dw}{dx} &= \frac{4M_0}{L^3bc}, & M &= M_0, & Q &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (267) \\ \text{Abb. 136} \end{array}$$

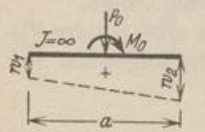


Abb. 137.

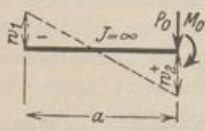


Abb. 138.

Lösung für den starren Stab. Ein anderer Grenzfall ist der durchlaufend elastisch gestützte Stab von der Länge a und einem $J \approx \infty$. Die Durchbiegung w ist dann eine lineare, durch die Randwerte w_1 und w_2 bestimmte Funktion.

a) Lastangriff P_0, M_0 in Stabmitte (Abb. 137).

$$c w_{1/2} = \frac{P_0}{ab} \mp \frac{6M_0}{a^2b}, \quad c \frac{dw}{dx} = \frac{12M_0}{a^3b}. \quad (268)$$

b) Lastangriff P_0, M_0 am Stabende (Abb. 138).

$$\left. \begin{aligned} c w_1 &= -\frac{2P_0}{ab} - \frac{6M_0}{a^2b}, & c w_2 &= \frac{4P_0}{ab} + \frac{6M_0}{a^2b}, \\ c \frac{dw}{dx} &= \frac{6P_0}{a^2b} + \frac{12M_0}{a^3b}. \end{aligned} \right\} (269)$$

Lösung der homogenen Gleichung des kurzen Stabes für vorgeschriebene Randkräfte. Zur einfachen Verwendung der Theorie im Bauwesen wird die allge-

meine Lösung (260) der homogenen Gleichung für symmetrische und antimetrische Randkräfte angegeben. Bei Symmetrie verschwinden die ungeraden Funktionen der Lösung (260) mit U_2 und U_3 , bei Antimetrie die geraden Funktionen mit U_1 und U_4 . Das Ergebnis lautet mit den Abkürzungen*

$\cos \xi \operatorname{Coj} \xi = \eta_1, \quad \sin \xi \operatorname{Sin} \xi = \eta_4, \quad \cos \xi \operatorname{Sin} \xi = \eta_2, \quad \sin \xi \operatorname{Coj} \xi = \eta_3, \quad \lambda = \frac{l}{L}$
folgendermaßen:

Symmetrischer Belastungsfall:

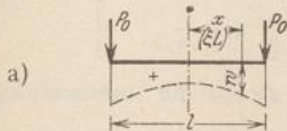


Abb. 139.

$$w = \frac{4 P_0}{L b c} (U_1 \eta_1 + U_4 \eta_4), \quad (270)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 P_0}{L^2 b c} [U_1 (\eta_2 - \eta_3) + U_4 (\eta_2 + \eta_3)],$$

$$M = 2 P_0 L (U_1 \eta_4 - U_4 \eta_1),$$

$$Q = 2 P_0 [U_1 (\eta_2 + \eta_3) - U_4 (\eta_2 - \eta_3)],$$

$$U_1 = \frac{\cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda},$$

$$U_4 = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda}$$

Antimetrischer Belastungsfall:

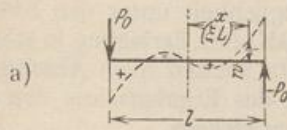


Abb. 141.

$$w = \frac{4 P_0}{L b c} (U_2 \eta_2 + U_3 \eta_3), \quad (272)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 P_0}{L^2 b c} [U_2 (\eta_1 - \eta_4) + U_3 (\eta_1 + \eta_4)],$$

$$M = 2 P_0 L (U_2 \eta_3 - U_3 \eta_2),$$

$$Q = 2 P_0 [U_2 (\eta_1 + \eta_4) - U_3 (\eta_1 - \eta_4)],$$

$$U_2 = -\frac{\cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda},$$

$$U_3 = -\frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda}.$$

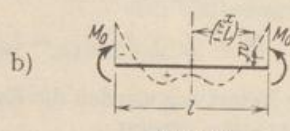


Abb. 140.

$$w = \frac{4 M_0}{L^2 b c} (U_1 \eta_1 + U_4 \eta_4), \quad (271)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 M_0}{L^3 b c} [U_1 (\eta_2 - \eta_3) + U_4 (\eta_2 + \eta_3)],$$

$$M = 2 M_0 (U_1 \eta_4 - U_4 \eta_1),$$

$$Q = \frac{2 M_0}{L} [U_1 (\eta_2 + \eta_3) - U_4 (\eta_2 - \eta_3)],$$

$$U_1 = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda},$$

$$U_4 = -\frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda + \sin \lambda}.$$

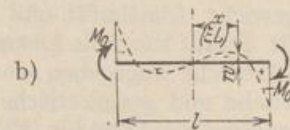


Abb. 142.

$$w = \frac{4 M_0}{L^2 b c} (U_2 \eta_2 + U_3 \eta_3), \quad (273)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{4 M_0}{L^3 b c} [U_2 (\eta_1 - \eta_4) + U_3 (\eta_1 + \eta_4)],$$

$$M = 2 M_0 (U_2 \eta_3 - U_3 \eta_2),$$

$$Q = \frac{2 M_0}{L} [U_2 (\eta_1 + \eta_4) - U_3 (\eta_1 - \eta_4)],$$

$$U_2 = -\frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2} - \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda},$$

$$U_3 = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \operatorname{Sin} \frac{\lambda}{2} + \cos \frac{\lambda}{2} \operatorname{Coj} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{Sin} \lambda - \sin \lambda}.$$

*

$$\eta_1 = 1 - \frac{2^2}{4!} \xi^4 + \frac{2^4}{8!} \xi^8 - \frac{2^6}{12!} \xi^{12} \pm \dots, \quad \eta_2 = \xi - \frac{2}{3!} \xi^3 - \frac{2^2}{5!} \xi^5 + \frac{2^3}{7!} \xi^7 + \frac{2^4}{9!} \xi^9 - \frac{2^5}{11!} \xi^{11} - \frac{2^6}{13!} \xi^{13} \pm \dots,$$

$$\eta_4 = \xi^2 - \frac{2^3}{6!} \xi^6 + \frac{2^5}{10!} \xi^{10} - \frac{2^7}{14!} \xi^{14} \pm \dots, \quad \eta_3 = \xi + \frac{2}{3!} \xi^3 - \frac{2^2}{5!} \xi^5 - \frac{2^3}{7!} \xi^7 + \frac{2^4}{9!} \xi^9 + \frac{2^5}{11!} \xi^{11} \mp \dots.$$