Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

23. Die Grundlagen der Lösung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

IV. Stütz- und Schnittkräfte statisch unbestimmter Stabwerke.

23. Die Grundlagen der Lösung.

Die Festigkeit eines beliebig gestalteten, elastischen Tragwerks wird nach Abschn. 8 durch den Spannungs- und Formänderungszustand beschrieben. Die Lösung des Ansatzes ist für eine gegebene Belastung bei stabilem Gleichgewicht der inneren Kräfte eindeutig. Die Bedeutung des statisch unbestimmten Stabwerks im Bauwesen rechtfertigt einen besonderen Beweis dieser aus der Elastizitätstheorie gewonnenen allgemeinen Erkenntnis.

Die Beziehungen zwischen Verzerrung und Spannung sind nach dem Hookeschen Gesetz linear. Die Spannungen können daher ebenso wie die Verschiebungen des Tragwerks durch Superposition entwickelt werden. Aus der Definition des elastischen Systems als Stabwerk folgt nach M. Navier die Annahme der ebenen Verschiebung aller Querschnitte. Die Spannungen des Querschnitts sind also statisch bestimmt und Funktionen der Schnittkräfte (N, M, Q). Ein Stabwerk ist daher statisch unbestimmt, wenn die Stütz- und Schnittkräfte nicht mehr allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können, sondern auch von geometrischen Bedingungen über den Verschiebungszustand abhängen. Ein beliebiger, räumlich gekrümmter, aus dem Zusammenhang gelöster Stabzug zeigt sechs statisch unbestimmte Schnittkräfte und sechs unbekannte Komponenten der Relativbewegung der Endquerschnitte. Diese können aus den vorgegebenen Anschlußkräften ebenso berechnet werden wie die Schnittkräfte aus den vorgeschriebenen Komponenten der Relativbewegung.

Die Querschnitte des ebenen Stabwerks liegen symmetrisch zur x, z-Ebene, in der auch alle äußeren Kräfte angreifen. Daher sind die Anschlußkräfte des Stabes h am Knoten J in dem Anschlußquerschnitt $J^{(h)}$ durch drei Komponenten $N_J^{(h)}$, $M_J^{(h)}$, $Q_J^{(h)}$ bestimmt. Die elastische Bewegung des Querschnitts $J^{(h)}$ wird durch die Verschiebungen $u_J^{(h)}, v_J^{(h)}$ des Schwerpunktes und durch den Drehwinkel $\varphi_J^{(h)}$ beschrieben.

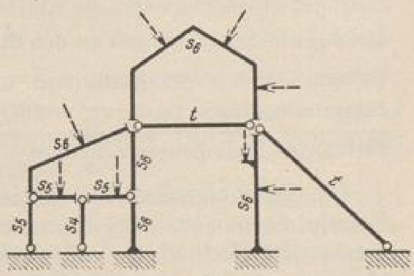


Abb. 149.

Das Stabwerk kann nach den Bemerkungen auf S. 39 in s einzelne offene, freie Stabzüge mit je zwei Anschlußquerschnitten aufgeteilt werden, die unter der Wirkung der Lasten und der Schnittkräfte N, M, Q an den Stabenden im Gleichgewicht sind. Sie sollen durch k freie Knoten zusammengefaßt und außerdem mit t Stütz- oder unbelasteten Verbindungsstäben untereinander oder mit dem Erdboden verbunden sein (Abb. 149). Die Verbindung zwischen Stab und Knotenpunkt gilt entweder als Einspannung oder als reibungsloses Gelenk mit drei oder zwei entgegengesetzt gleichen Schnittkräften an den beiden Ufern des Anschlußquerschnittes. Daher werden durch jeden Schnitt zur Aufteilung des Stabwerks drei oder zwei unbekannte Schnittkräfte zu äußeren Kräften, die mit der Belastung $\mathfrak{P}_J$ des freien Knotens J oder mit der Belastung $\mathfrak{P}_h$ des freien Stabzugs (h) im Gleichgewicht sind. Auf diese Weise besteht die Anzahl s der freien Stabzüge (h) je nach der Anzahl der an den beiden Anschlußquerschnitten vorhandenen 6, 5 oder 4 unbekannten Schnittkräfte aus der Anzahl s_6, s_5 und s_4 $(s = s_6 + s_5 + s_4)$. Ebenso wird die Anzahl k der freien Stabknoten in die Gruppen k_3 und k_2 zerlegt, je nachdem hier zwei oder mehr Stabzüge steif miteinander verbunden sind und daher an den

Anschlußquerschnitten Kräftepaare als äußere Kräfte auftreten oder alle Stabzüge frei drehbar anschließen ($k = k_3 + k_2$). Der Index bezeichnet also die Zahl der statischen Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte am Knoten. Unter t wird die Anzahl der unbelasteten Zusatzstäbe als Hilfsstützen, Zugbänder, Verankerungen usw. verstanden, die zwischen den Knotenpunkten vorhanden sind.

Der Verschiebungszustand der Stäbe (h) ist durch die Belastung $\mathfrak{P}_h$ und die Bewegung der Knotenpunkte J bestimmt. Die Verschiebung eines reibungslosen Gelenkes wird durch die waagerechte und senkrechte Komponente u_J, v_J beschrieben. Die Scheibe eines steifen Knotens erfährt außerdem noch eine Drehung φ_J. Jeder Knoten gilt als starr, so daß die geometrischen Randbedingungen der an einem Knoten angeschlossenen Stabzüge miteinander übereinstimmen.

Die Zerlegung des Stabwerks in s Elemente ergibt $(6\,s_6 + 5\,s_5 + 4\,s_4)$ Schnittkräfte, t Zusatzkräfte. Der Verschiebungszustand des Stabwerks ist geometrisch durch $(3\,k_3 + 2\,k_2)$ ausgezeichnete Komponenten bestimmt und daher die Anzahl der Unbekannten $(6\,s_6 + 5\,s_5 + 4\,s_4 + 3\,k_3 + 2\,k_2 + t)$. Zur Berechnung der Unbekannten stehen an jedem selbständigen Stabe oder Stabzug drei Bedingungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte zur Verfügung. An jedem Knotenpunkt sind drei oder zwei Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte vorhanden, je nachdem steife Stabverbindungen gelöst worden sind oder nicht. Die gegenseitigen Verschiebungen der Anschlußquerschnitte J und K eines Stabzugs $(u_K - u_J)$, $(v_K - v_J)$ und $(\varphi_K - \varphi_J)$ sind nach Abschnitt 21 durch die Belastung und die Anschlußkräfte am Querschnitt J und K des Stabzugs $\overline{JK} \equiv l_h$ bestimmt. Der Ansatz (224ff.) ist daher eine Bedingung für die geometrische Verträglichkeit der Verschiebung der Knotenpunkte und der Verformung der Stäbe, die je nach dem Anschluß des Stabes(h) als steife oder gelenkige Verbindung in J und K aus drei, zwei oder einer Gleichung besteht. Mit t Zusatzstäben sind stets auch t Komponenten des Verschiebungszustandes vorgeschrieben. Die unbekannten Anschlußkräfte und Knotenverschiebungen sind daher durch folgende Bedingungen verknüpft:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an den Stabzügen} & 3\,s_6 + 3\,s_5 + 3\,s_4 \\
\text{Gleichgewichtsbedingungen an den Stabknoten} & \qquad\qquad\qquad 3\,k_3 + 2\,k_2 \\
\text{Verträglichkeitsbedingungen} & 3\,s_6 + 2\,s_5 + \,s_4 \\
\text{Zusatzbedingungen} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad t \\
\hline
\text{Verfügbare Bedingungsgleichungen} & 6\,s_6 + 5\,s_5 + 4\,s_4 + 3\,k_3 + 2\,k_2 + t
\end{array}\right\} \quad (279)$$

Die Gleichungen sind linear. Ihre Anzahl stimmt mit der Anzahl der Unbekannten überein. Damit ist, abgesehen vom Ausnahmefall mit $D = 0$, die hinreichende und notwendige Bedingung dafür erfüllt, daß die Anschlußkräfte und die Komponenten (u_J, v_J, φ_J) des Verschiebungszustandes bei gegebener Belastung, Temperaturänderung und Stützenbewegung eindeutig angegeben werden können. Umgekehrt bedeutet auch jede Annahme über den Verschiebungs- und Spannungszustand eines Stabwerks, welche die Gleichungen (279) befriedigt, das richtige Ergebnis.

Um die Gleichungen aufzulösen, werden zunächst drei Schnittkräfte eines jeden Stabes mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte als Funktion der Belastung $\mathfrak{P}_h$ und der übrigen Anschlußkräfte angegeben, so daß nunmehr $(3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4)$ unbekannte Schnittkräfte mit $(3\,k_3 + 2\,k_2)$ unbekannten Komponenten des Verschiebungszustandes ebenso vielen Bedingungsgleichungen gegenüberstehen. Die t unbekannten Zusatzkräfte sind durch ebenso viele vorgeschriebene Komponenten der Stützung und Verbindung bestimmt. Die $(3\,k_3 + 2\,k_2)$ Komponenten (u_J, v_J, φ_J) des Verschiebungszustandes können darauf mit ebensoviel Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte am Knoten ausgeschlossen und als Funktion der unbekannten Anschlußkräfte in die $(3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4)$ Verträglichkeitsbedingungen eingesetzt werden. Auf diese Weise entsteht ein geometrischer Ansatz zur Berechnung derjenigen $(3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4)$ Stütz- und Schnittkräfte, die nicht durch Gleichgewichtsbedingungen angegeben werden können und daher statisch unbestimmt heißen. Die statisch bestimmten Anschlußkräfte und die Verschiebungen werden durch Rekursion berechnet.

Formale Abzählung der überzähligen statischen Größen eines ebenen Stabwerks:

$$n = 3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4 + t - 3\,k_3 - 2\,k_2 \quad \text{(Abb. 150)}. \tag{280}$$

Die Auflösung des Ansatzes (279) kann auch mit der Elimination der $(3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4 + t)$ unbekannten Stütz- und Anschlußkräfte aus den $(3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4 + t)$ verfügbaren geometrischen Verträglichkeitsbedingungen eingeleitet werden. Sie erscheinen dadurch als Funktionen der $(3\,k_3 + 2\,k_2)$ unbekannten Komponenten der Knotenbewegung (u_J, v_J, φ_J), die damit aus den $(3\,k_3 + 2\,k_2)$ Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte am Stabknoten (J) eindeutig berechnet werden können. Die Schnittkräfte ergeben sich daraus durch Rekursion.

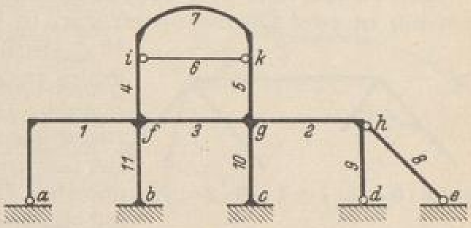


Abb. 150.

s_6	2	3	4	5	7	10	11	7	+ 21
s_5	1	9						2	+ 4
s_4								0	
k_3	f	g	h	i	k			5	− 15
k_2								0	
t	6	8						2	+ 2

$n = 12$

Die Reihenfolge der Elimination bestimmt demnach zwei grundsätzlich verschiedene Lösungen, deren Eignung von der Art des Stabwerks abhängt und am besten in zwei Grenzfällen zum Ausdruck kommt. Ist die Anzahl der unbekannten Schnitt- und Zusatzkräfte gleich der Anzahl der verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen, also

$$6\,s_6 + 5\,s_5 + 4\,s_4 + t = 3\,(s_6 + s_5 + s_4) + 3\,k_3 + 2\,k_2\,,$$
$$3\,s_6 + 2\,s_5 + s_4 \quad + t = 3\,k_3 + 2\,k_2\,,$$

so sind alle Schnittkräfte statisch bestimmt, der Spannungszustand ist von den Knotenverschiebungen, also auch von Temperaturwechsel und Stützenbewegung unabhängig. Das Stabwerk ist ohne Belastung spannungslos. Die Verschiebungen können aus den Schnittkräften nach S. 133 bestimmt werden.

In dem anderen Grenzfall sind die Komponenten des Verschiebungszustandes Null, so daß jeder Stab beiderseits starr eingespannt ist. Die sechs Anschlußkräfte sind von den benachbarten Stäben unabhängig. Sie werden aus den 3 Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte und den drei Verträglichkeitsbedingungen bestimmt, da mit u_J, v_J, φ_J auch die relativen Verschiebungen der Endquerschnitte Null sind.

Es liegt nahe, die statische Untersuchung eines Stabwerks von allgemeiner Anordnung auf den einen oder anderen Grenzfall zurückzuführen, je nachdem die Anzahl der statisch unbestimmten Schnittkräfte kleiner ist als die Anzahl der unbekannten Komponenten des Verschiebungszustandes oder umgekehrt. Unter Umständen ist auch die Fehlerfortpflanzung in der Elimination entscheidend. Man bezeichnet das System, welches mit dem vorgelegten Stabwerk der Form nach übereinstimmt, dessen statisch unbestimmte Stütz- oder Schnittkräfte oder dessen Knotenverschiebungen jedoch Null gesetzt worden sind, als Hauptsystem und betrachtet Verschiebungen im statisch bestimmten Hauptsystem und Schnittkräfte im geometrisch bestimmten Hauptsystem.

Sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte die überzähligen Größen des Hauptsystems, so kann nach dem Superpositionsgesetz jede Komponente einer

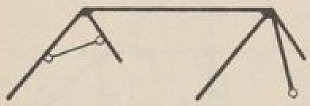
Verschiebung oder einer relativen Verschiebung aus den Anteilen der Belastung und der statisch unbestimmten Schnittkräfte gebildet werden.

$$\delta_k = \delta_{k0} + \sum X_h \delta_{kh} . \tag{281}$$

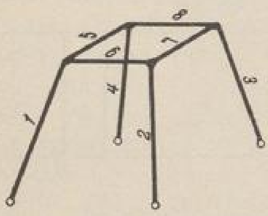
Sind die geometrischen Komponenten des Verschiebungszustandes überzählige Größen eines Hauptsystems, so kann jede Schnittkraft nach dem Superpositionsgesetz aus den Anteilen der Belastung und den Beiträgen dieser unbekannten Größen angegeben werden.

$$K_m = K_{m0} + \sum(\varphi_J K_{mJ} + u_J K'_{mJ} + v_J K''_{mJ}) . \tag{282}$$

Das räumliche Stabwerk mit k Knotenpunkten, dessen s Stabelemente wiederum nur in zwei Querschnitten starr in Knoten miteinander verbunden sind, zählt $12\,s$ Anschlußkräfte. Hierzu können noch t Zusatzkräfte treten, welche einzelnen Zwischenstützen oder Zugbändern zugeordnet sein sollen. Der Verschiebungszustand wird an jedem Knoten durch sechs Komponenten beschrieben. Dies sind drei Verschiebungen u, v, w und drei Drehwinkel φ_x, φ_y, φ_z. Zur Berechnung der unbekannten Größen (Anzahl $12\,s + 6\,k + t$) stehen $6\,s$ Gleichgewichtsbedingungen der an jedem Stab angreifenden äußeren Kräfte, $6\,k$ Gleichgewichtsbedingungen der an jedem Knotenpunkt angreifenden äußeren Kräfte und $6\,s$ Verträglichkeitsbedingungen zwischen relativer Verschiebung der Endquerschnitte und Verformung des Stabes zur Verfügung. Durch t Zusatzstäbe sind t Verschiebungen gegeben. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen stimmt also auch hier mit derjenigen der Unbekannten überein. Das Ergebnis ist demnach, abgesehen von dem Ausnahmefall $D = 0$, wiederum eindeutig.



$n = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 1 - 6 \cdot 2 = 22$



$n = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 12$

Abb. 151.

Formale Abzählung der überzähligen Größen des räumlichen Stabwerks mit steif oder gelenkig angeschlossenen Stäben:

$$n = 6\,s_{12} + 3\,s_9 + s_6 + t - 6\,k_6 - 3\,k_3 \tag{283}$$

(Abb. 151). Daher kann das räumliche Stabwerk, dessen Elemente in allen Knoten steif angeschlossen sind, statisch bestimmt berechnet werden, wenn $12\,s + t = 6\,s + 6\,k$ oder $6\,s + t = 6\,k$. In diesem Falle ist das Stabwerk ohne Belastung spannungslos und der Spannungszustand unabhängig von Temperaturänderung und Stützenbewegung. Die Berechnung eines beliebigen räumlichen Stabwerks kann ebenfalls entweder auf einen Ansatz geometrischer Bedingungen mit den statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften als Unbekannten oder auf die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am Knoten zurückgeführt werden, in denen die sechs geometrischen Komponenten der Knotenverschiebung als Unbekannte auftreten.

A. Die Berechnung durch Elimination der Komponenten des Verschiebungszustandes.

24. Die geometrischen Bedingungsgleichungen.

Der Spannungszustand eines $n$fach statisch unbestimmten Stabwerkes kann für jede Belastung nach S. 153 eindeutig beschrieben werden, wenn n von-