



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

A. Die Berechnung durch Elimination der Komponenten des
Verschiebungszustandes

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

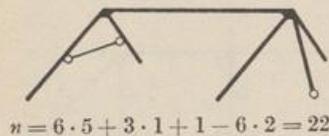
Verschiebung oder einer relativen Verschiebung aus den Anteilen der Belastung und der statisch unbestimmten Schnittkräfte gebildet werden.

$$\delta_k = \delta_{k0} + \sum X_h \delta_{kh}. \quad (281)$$

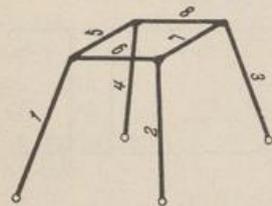
Sind die geometrischen Komponenten des Verschiebungszustandes überzählige Größen eines Hauptsystems, so kann jede Schnittkraft nach dem Superpositionsgesetz aus den Anteilen der Belastung und den Beiträgen dieser unbekanntnen Größen angegeben werden.

$$K_m = K_{m0} + \sum (\varphi_j K_{mj} + u_j K'_{mj} + v_j K''_{mj}). \quad (282)$$

Das räumliche Stabwerk mit k Knotenpunkten, dessen s Stabelemente wiederum nur in zwei Querschnitten starr in Knoten miteinander verbunden sind, zählt



$$n = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 1 - 6 \cdot 2 = 22$$



$$n = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 12$$

Abb. 151.

12 s Anschlußkräfte. Hierzu können noch t Zusatzkräfte treten, welche einzelnen Zwischenstützen oder Zugbändern zugeordnet sein sollen. Der Verschiebungszustand wird an jedem Knoten durch sechs Komponenten beschrieben. Dies sind drei Verschiebungen u, v, w und drei Drehwinkel $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Zur Berechnung der unbekanntnen Größen (Anzahl $12s + 6k + t$) stehen $6s$ Gleichgewichtsbedingungen der an jedem Stab angreifenden äußeren Kräfte, $6k$ Gleichgewichtsbedingungen der an jedem Knotenpunkt angreifenden äußeren Kräfte und $6s$ Verträglichkeitsbedingungen zwischen relativer Verschiebung der Endquerschnitte und Verformung des Stabes zur Verfügung. Durch t Zusatzstäbe sind t Verschiebungen gegeben. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen stimmt also auch hier mit derjenigen der Unbekanntnen überein. Das Ergebnis ist demnach, abgesehen von dem Ausnahmefall $D = 0$, wiederum eindeutig.

Formale Abzählung der überzähligen Größen des räumlichen Stabwerks mit steif oder gelenkig angeschlossnen Stäben:

$$n = 6s_{12} + 3s_9 + s_6 + t - 6k_6 - 3k_3 \quad (283)$$

(Abb. 151). Daher kann das räumliche Stabwerk, dessen Elemente in allen Knoten steif angeschlossen sind, statisch bestimmt berechnet werden, wenn $12s + t = 6s + 6k$ oder $6s + t = 6k$. In diesem Falle ist das Stabwerk ohne Belastung spannungslos und der Spannungszustand unabhängig von Temperaturänderung und Stützbewegung. Die Berechnung eines beliebigen räumlichen Stabwerks kann ebenfalls entweder auf einen Ansatz geometrischer Bedingungen mit den statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften als Unbekanntnen oder auf die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am Knoten zurückgeführt werden, in denen die sechs geometrischen Komponenten der Knotenverschiebung als Unbekannte auftreten.

A. Die Berechnung durch Elimination der Komponenten des Verschiebungszustandes.

24. Die geometrischen Bedingungsgleichungen.

Der Spannungszustand eines n -fach statisch unbestimmten Stabwerkes kann für jede Belastung nach S. 153 eindeutig beschrieben werden, wenn n von-

einander unabhängige, statisch nicht bestimmbare Stützenwiderstände C oder Schnittkräfte N, M, Q ausgezeichneter Querschnitte bekannt sind. Sie werden in Zukunft unabhängig von ihrer Eigenschaft als Kraft oder Kräftepaar mit $X_k (k = 1 \dots n)$ bezeichnet. Die Ansätze (281) stützen sich allein auf das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte und werden daher durch jede Annahme über die Größe und den Richtungssinn der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt.

Statisch überzählige Größen X_k und Hauptsystem. Wird eine Anzahl der n statisch nicht bestimmbaren Stütz- und Schnittkräfte X_k Null gesetzt, so entsteht ein Hauptsystem des vorgelegten Stabwerks. Es ist statisch bestimmt oder statisch unbestimmt, je nachdem alle statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte oder nur eine Anzahl h von ihnen als „überzählig“ ausgeschieden werden. Das Hauptsystem heißt in diesem Falle $(n - h)$ fach statisch unbestimmt. Als statisch überzählige Größen lassen sich einzelne Komponenten einer Stützkraft oder einzelne Komponenten der inneren Kraft $\int_k (\sigma \mp \tau) dF$ verwenden. Selbstverständlich können auch zwei oder alle drei Komponenten (N, M, Q) eines Querschnitts gleichzeitig Null gesetzt werden.

Dieser Eingriff in den Spannungszustand des vorgelegten Tragwerks kann durch reibungslose Gelenke, Führungen oder durch die vollkommene Trennung des Stabes verwirklicht werden, ohne damit das Kräftebild des Hauptsystems zu ändern.

a) $X_1 = M_k = \int_k \sigma z df.$

Mit $X_1 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einer Längs- und Querkraft, die von einem Gelenk Abb. 152a übertragen werden können.

b) $X_2 = N_k = \int_k \sigma df.$

Mit $X_2 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einem Biegemoment und einer Querkraft, die von einer Führung Abb. 152b übertragen werden können.

c) $X_3 = Q_k = \int_k \tau df.$

Mit $X_3 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einem Biegemoment und einer Längskraft, die von einer Führung Abb. 152c übertragen werden können.

d) $X_1 = M_k, X_2 = N_k, X_3 = Q_k.$

Mit $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ sind alle inneren Kräfte im Querschnitt k Null, so daß das Tragwerk hier unterbrochen werden kann. Das Hauptsystem Abb. 152d ist statisch bestimmt und besteht aus zwei Kragträgern.

Gleichgewicht einer beliebigen Gruppe von äußeren Kräften ist nur an einem Hauptsystem mit kinematisch starrem Aufbau möglich. Der Ausnahmefall der unendlich kleinen Beweglichkeit des Hauptsystems ist ebenfalls ausgeschlossen. Im

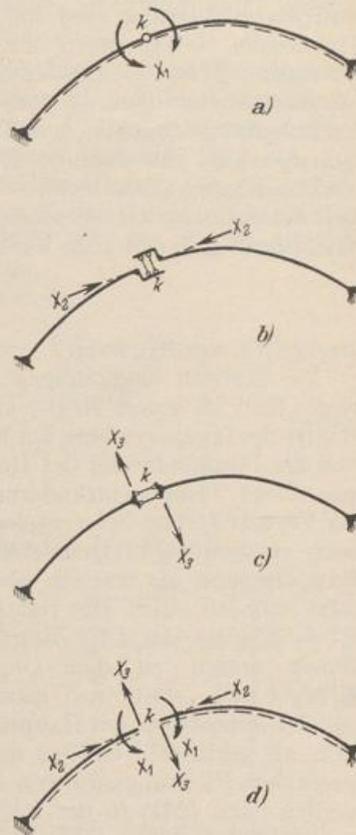


Abb. 152.

übrigen können die überzähligen Größen X_k nach Art, Lage und Richtungssinn grundsätzlich beliebig ausgewählt werden. Ist das Hauptssystem jedoch aus besonderen Gründen beweglich, so sind zum Gleichgewicht ausgezeichnete Eigenschaften der Belastung \mathfrak{P} und der statisch unbestimmten äußeren Kräfte X_k notwendig.

Geometrische Verträglichkeit und Superpositions-gesetz im kinematisch starren Hauptsystem. Die Gleichgewichtsbedingungen werden bei jeder Annahme über die Größe der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt. Dagegen ist nach (279) nur eine durch Größe und Richtungssinn ausgezeichnete Gruppe vorhanden, die in Verbindung mit der Belastung \mathfrak{P} die mit dem vorgelegten Stabwerk verträgliche Formänderung des Hauptsystems erzeugt. Diese ist durch die Stützung und durch die Dehnung und Biegung der Stäbe, also durch die Schnittkräfte bestimmt. Spannung und Formänderung sind im Bereiche des zulässigen Tragvermögens durch das Hookesche Gesetz linear miteinander verknüpft. Daher entstehen zwischen der Belastung $\mathfrak{P}(P_1 \dots P_n)$, den Schnittkräften und der Verschiebung oder Verdrehung ausgezeichneter Querschnitte k lineare algebraische Gleichungen oder lineare Differentialgleichungen, welche durch Superposition der Absolutglieder, also durch Superposition der äußeren Kräfte \mathfrak{P} und der anderen äußeren Ursachen gelöst werden können. Das Hookesche Gesetz ist also die Voraussetzung für die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, nach dem irgend eine mechanische oder geometrische Wirkung W_h (Kraft oder Verschiebung) eines statisch unbestimmten Tragwerks als

$$W_h = \sum_{k=1}^{k=n} W_{hk} P_k \quad (284)$$

angegeben werden kann.

Die statisch überzähligen Stütz- und Schnittkräfte X_k ($k = 1 \dots n$) des Stabwerks sind als innere Kräfte stets Doppelkräfte und neben der Belastung \mathfrak{P} äußere Kräfte des Hauptsystems. Ihr Richtungssinn und ihre Größe werden derart bestimmt, daß die Formänderung des Hauptsystems aus seiner Belastung \mathfrak{P} , X_k ($k = 1 \dots n$), aus seiner Temperaturänderung t , Δt und seinen Stützenverschiebungen Δ_e mit der Formänderung des vorgelegten Tragwerks übereinstimmt. Dies gilt insbesondere auch an denjenigen Querschnitten k , an welchen Schnittkräfte zur Bildung des Hauptsystems als statisch überzählig angesehen und durch äußere Kräfte X_k ersetzt worden sind. Die relativen elastischen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_k^{(n)} = \delta_k^{(n)}(\mathfrak{P}, \Sigma X)$ der Ufer dieser Querschnitte k des Hauptsystems sind daher Null. Damit treten zu den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte \mathfrak{P} , X_k ($k = 1 \dots n$) noch geometrische Verträglichkeitsbedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems. In diesem werden die Komponenten δ_k , die stets als gerichtete Größen anzusehen sind, in der Regel nach Vereinbarung entgegen dem Richtungssinn von X_k positiv gerechnet. Die Verträglichkeitsbedingungen werden nach (281) in der folgenden Form angeschrieben:

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} 1_k^{(0)} \delta_k^{(0)}(\mathfrak{P}, \Sigma X) = 1_k^{(0)} \delta_k = 0, & \quad (k = 1, \dots, n) \\ 1_k^{(n-h)} \delta_k^{(n-h)}(\mathfrak{P}, \Sigma X) = 1_k^{(n-h)} \delta_k = 0, & \quad (k = 1, \dots, h). \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

Die Anzahl der Verträglichkeitsbedingungen stimmt mit der Anzahl n oder h der überzähligen Größen X_k überein, so daß die notwendige und hinreichende Grundlage zu ihrer Berechnung vorhanden ist.

Entwicklung der Elastizitätsgleichung aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen. Die relative Verschiebung δ_k der Ufer k eines ebenen, statisch bestimmten oder $(n-h)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch äußere Kräfte \mathfrak{P} , X_k , durch Temperaturänderung und Stützenbewegung im Sinne von $-X_k$ wird nach (35) aus dem Vergleich mit einem dem vorhandenen Kräftebild benachbarten Spannungszustande abgeleitet. Hierbei entstehen die Ansätze (285) mit der Arbeit aus einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(0)}$ oder $-X_k = 1_k^{(n-h)}$

und den Komponenten des vorgeschriebenen statisch unbestimmten Verschiebungszustandes $(\delta_k, \varepsilon_0, \delta\psi)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } 1_k^{(0)} \delta_k &= \int N_k^{(0)} \frac{N ds}{EF} + \int M_k^{(0)} \frac{M ds}{EJ} + \int Q_k^{(0)} \kappa \frac{Q ds}{GF} \\ &+ \int N_k^{(0)} \alpha_t t ds + \int M_k^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ek}^{(0)} \Delta_e = 0. \end{aligned} \quad (286)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1_k^{(n-h)} \delta_k &= \int N_k^{(n-h)} \frac{N ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M ds}{EJ} + \int Q_k^{(n-h)} \kappa \frac{Q ds}{GF} \\ &+ \int N_k^{(n-h)} \alpha_t t ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \Delta_e = 0. \end{aligned} \quad (287)$$

Diese werden nach (281) durch Superposition in die Anteile aus den überzähligen Größen X_k und in die Anteile aus der Belastung \mathfrak{P} (Index 0), aus der Temperaturänderung t , Δt (Index t), aus den Stützenverschiebungen Δ_e (Index s) zerlegt. Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems aus allen äußeren Ursachen ($\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e$) zusammen ($k = 1 \dots n$) oder ($k = 1 \dots h$) erhalten die Bezeichnung $C_{\otimes}, N_{\otimes}, M_{\otimes}, Q_{\otimes}$. Die Definition der positiven Richtung des Vektors δ_k des Hauptsystems nach S. 156 bestimmt mit den Schnittkräften $C_k^{(0)}, N_k^{(0)}, M_k^{(0)}, Q_k^{(0)}$ oder $C_k^{(n-h)}, N_k^{(n-h)}, M_k^{(n-h)}, Q_k^{(n-h)}$ aus $-X_k = 1$ die Form der Superposition.

a) Superposition im statisch bestimmten Hauptsystem:

$$\left. \begin{aligned} C_{\otimes}^{(0)} &= C_0^{(0)}; & N_{\otimes}^{(0)} &= N_0^{(0)}; & M_{\otimes}^{(0)} &= M_0^{(0)}; & Q_{\otimes}^{(0)} &= Q_0^{(0)}; \\ C &= C_0^{(0)} - \sum X_k C_k^{(0)}; & N &= N_0^{(0)} - \sum X_k N_k^{(0)}; \\ M &= M_0^{(0)} - \sum X_k M_k^{(0)}; & Q &= Q_0^{(0)} - \sum X_k Q_k^{(0)}; \\ & & & & (k = 1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (288)$$

b) Superposition im $(n - h)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystem:

$$\left. \begin{aligned} C_{\otimes}^{(n-h)} &= C_0^{(n-h)} + C_t^{(n-h)} + C_s^{(n-h)}; & C &= C_{\otimes}^{(n-h)} - \sum X_k C_k^{(n-h)}; \\ N_{\otimes}^{(n-h)} &= N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)}; & N &= N_{\otimes}^{(n-h)} - \sum X_k N_k^{(n-h)}; \\ M_{\otimes}^{(n-h)} &= M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)}; & M &= M_{\otimes}^{(n-h)} - \sum X_k M_k^{(n-h)}; \\ Q_{\otimes}^{(n-h)} &= Q_0^{(n-h)} + Q_t^{(n-h)} + Q_s^{(n-h)}; & Q &= Q_{\otimes}^{(n-h)} - \sum X_k Q_k^{(n-h)}; \\ & & & & (k = 1, \dots, h). \end{aligned} \right\} \quad (289)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen (286) und (287) lassen sich darnach folgendermaßen entwickeln:

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form a:

$$\left. \begin{aligned} 1_k^{(0)} \delta_k = 0 &= \int N_k \frac{N_0 ds}{EF} + \int M_k \frac{M_0 ds}{EJ} + \int \kappa Q_k \frac{Q_0 ds}{GF} + \int N_k \alpha_t t ds + \int M_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \\ &- \sum C_{ek} \Delta_e - X_1 \left[\int N_k \frac{N_1 ds}{EF} + \int M_k \frac{M_1 ds}{EJ} + \int \kappa Q_k \frac{Q_1 ds}{GF} \right] - \dots \\ &- X_k \left[\int \frac{N_k^2 ds}{EF} + \int \frac{M_k^2 ds}{EJ} + \int \kappa \frac{Q_k^2 ds}{GF} \right] - \dots \\ &- X_n \left[\int N_k \frac{N_n ds}{EF} + \int M_k \frac{M_n ds}{EJ} + \int \kappa Q_k \frac{Q_n ds}{GF} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (290)$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$ fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form a:

$$\begin{aligned}
 1_k^{(n-h)} \delta_k = 0 = & \int N_k^{(n-h)} \frac{N_k^{(n-h)} ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M_k^{(n-h)} ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)} \frac{Q_k^{(n-h)} ds}{GF} \\
 & + \int N_k^{(n-h)} \alpha_t t ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \Delta_e \\
 - X_1 [& \int N_k^{(n-h)} \frac{N_1^{(n-h)} ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M_1^{(n-h)} ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)} \frac{Q_1^{(n-h)} ds}{GF}] - \dots \\
 - X_k [& \int \frac{N_k^{(n-h)2} ds}{EF} + \int \frac{M_k^{(n-h)2} ds}{EJ} + \int \varkappa \frac{Q_k^{(n-h)2} ds}{GF}] - \dots \\
 - X_h [& \int N_k^{(n-h)} \frac{N_h^{(n-h)} ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M_h^{(n-h)} ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)} \frac{Q_h^{(n-h)} ds}{GF}].
 \end{aligned} \quad (291)$$

Das erste Glied des Ansatzes (290)

$$\begin{aligned}
 \int N_k \frac{N_0 ds}{EF} + \int M_k \frac{M_0 ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k \frac{Q_0 ds}{GF} + \int N_k \alpha_t t ds + \int M_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \\
 - \sum C_{ek} \Delta_e = 1_k (\delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}) = 1_k \delta_{k\otimes}
 \end{aligned}$$

ist der Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems durch eine Belastung \mathfrak{B} , die Temperaturänderung ($t, \Delta t$) und durch Stützenverschiebungen Δ_e . Das positive Ergebnis bedeutet daher die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung des Punkte- oder Geradenpaares k des Hauptsystems aus diesen äußeren Ursachen im Sinne von $-X_k$. Der Ansatz

$$\int N_k N_1 \frac{ds}{EF} + \int M_k M_1 \frac{ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k Q_1 \frac{ds}{GF} = 1_k \delta_{k1} \quad (292)$$

wird als Arbeit der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems durch $-X_1 = 1$ erkannt. Das positive Ergebnis ist die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung des Punkte- oder Geradenpaares k des Hauptsystems infolge $-X_1 = 1$. Die entsprechenden Teilwerte von (291) sind Arbeiten einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(n-h)}$ bei einer Formänderung des statisch unbestimmten Hauptsystems. Das positive Ergebnis bedeutet daher auch die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$, $\delta_{k1}^{(n-h)}$ im Sinne von $-X_k$. Die Ansätze (290) und (291) können damit folgendermaßen verwendet werden:

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form b:

$$\delta_k = 0 = \delta_{k\otimes} - X_1 \delta_{k1} - X_2 \delta_{k2} - \dots - X_k \delta_{kk} - \dots - X_n \delta_{kn}. \quad (293)$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$ fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form b:

$$\delta_k = 0 = \delta_{k\otimes}^{(n-h)} - X_1 \delta_{k1}^{(n-h)} - \dots - X_k \delta_{kk}^{(n-h)} - \dots - X_h \delta_{kh}^{(n-h)}. \quad (294)$$

Die Form b bestätigt das Superpositionsgesetz (284) für die Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Systems und kann daher auch unmittelbar angeschrieben und nach (290) entwickelt werden. Sie bildet durch ihre übersichtliche geometrische Bedeutung die einfachste Grundlage für die unmittelbare Berechnung der statisch überzähligen Schnittkräfte ($X_1 \dots X_n$).

Die von der Belastung unabhängigen Verschiebungen δ_{ki} , $\delta_{k1}^{(n-h)}$ des Hauptsystems werden im Rahmen der algebraischen Lösung als Vorzahlen der überzähligen

Größen bezeichnet. Die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}$, $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ des Hauptsystems aus Belastung, Temperaturänderung und Stützensenkungen sind die Absolutglieder des Ansatzes und heißen Belastungszahlen. Sie werden bei einer in dem beliebigen Punkte m des Lastgurtes wirkenden Einzellast $P_m = 1 \text{ t}$ mit δ_{km} , $\delta_{km}^{(n-h)}$ bezeichnet und bedeuten dann die Ordinaten der Einflußlinien der gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung der Ufer des Querschnitts k im Sinne von $-X_k$.

In den Sätzen von Betti und Maxwell (38) wird die virtuelle Arbeit einer Kräftegruppe P_m bei der Verschiebung $\delta_{mk}^{(n)}$ eines n -fach statisch unbestimmten Stabwerks infolge der Belastung durch eine Kräftegruppe P_k mit derjenigen der Kräftegruppe P_k bei der Verschiebung $\delta_{km}^{(n)}$ durch die Belastung P_m verglichen.

$$\sum P_m \delta_{mk}^{(n)} = \sum P_k \delta_{km}^{(n)}. \quad (295)$$

Daher ist in einem statisch bestimmten Hauptsystem

$$1_k \delta_{k\Sigma(P, X)} = \sum P_m \delta_{mk} - X_1 \delta_{1k} - \dots - X_k \delta_{kk} - \dots - X_n \delta_{nk} = 0, \quad (296)$$

so daß noch eine dritte Form c der Elastizitätsgleichung entsteht.

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$X_1 \delta_{1k} + X_2 \delta_{2k} + \dots + X_k \delta_{kk} + \dots + X_n \delta_{nk} = \sum P_m \delta_{mk} + \delta_{kt} + \delta_{ks}. \quad (297)$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$ -fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{1k}^{(n-h)} + X_2 \delta_{2k}^{(n-h)} + \dots + X_k \delta_{kk}^{(n-h)} + \dots + X_n \delta_{nk}^{(n-h)} \\ = \sum P_m \delta_{mk}^{(n-h)} + \delta_{kt}^{(n-h)} + \delta_{ks}^{(n-h)}. \end{aligned} \right\} \quad (298)$$

Die Vorzahlen δ_{ik} jeder Gleichung (k) sind jetzt Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte i des Hauptsystems im Sinne von $-X_i$ durch die Belastung $-X_k = 1$. Die Belastungszahlen δ_{mk} und $\delta_{mk}^{(n-h)}$ sind Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes im Sinne der Last P_m infolge $-X_k = 1$. Besteht die Gruppe $\sum P_m$ aus gleichgerichteten Lasten, so sind δ_{mk} , $\delta_{mk}^{(n-h)}$ Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für $-X_k = 1$. Sie werden bei einer graphischen Untersuchung nach den Abschnitten 20, 21 zusammen mit den Vorzahlen aus einem Verschiebungsplan des Hauptsystems für $-X_k = 1$ erhalten.

Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen. Die Ansätze a bis c unterscheiden sich nur durch die Form der Rechenvorschrift. Die Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes a werden als Ausdrücke für die Arbeit einer virtuellen Belastung angeschrieben und durch Integration mathematisch gewonnen. Die Vorzahlen δ_{kt} , δ_{ks} und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}$ der Ansätze b und c sind relative Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Sie werden nach den Tabellen des Abschn. 19 eingesetzt, nach Abschn. 18 berechnet oder zeichnerisch gefunden.

Die vollständigen Vorzahlen und Belastungszahlen bestehen im allgemeinen aus drei Summanden, welche den Einfluß der Längs- und Querkräfte und denjenigen der Biegemomente getrennt zum Ausdruck bringen. Der Anteil der Querkräfte ist stets unbedeutend und kann gegenüber dem Fehler aus anderen ungenauen Annahmen der Rechnung vernachlässigt werden. Dasselbe gilt bei biegesteifen Stäben zumeist auch von dem Anteil der Längskräfte. Daher werden in der Regel die Vorzahlen und Belastungszahlen, abgesehen von Temperaturwirkung und Stützensenkung, auf den Anteil der Biegemomente beschränkt. Dies gilt besonders bei neu zu entwerfenden Bauwerken, deren Querschnitte zunächst auf Grund von Schätzungen oder überschlägigen Berechnungen angenommen werden

müssen. Da die Abschätzung von Verhältniszahlen einfacher ist, wird ein EJ_c -facher Betrag der Vorzahlen und Belastungszahlen berechnet. J_c ist ein Vergleichswert, durch welchen das Verhältnis J_c/J in möglichst einfachen Zahlen angegeben werden kann. Dasselbe gilt von der Einführung eines Vergleichsquerschnitts F_c , so daß der EJ_c -fache, vollständige Betrag einer Vorzahl folgendermaßen lautet:

$$EJ_c \delta_{ki} = \frac{J_c}{F_c} \int N_k N_i \frac{F_c}{F} ds + \int M_k M_i \frac{J_c}{J} ds + \frac{EJ_c}{GF_c} \int \kappa Q_k Q_i \frac{F_c}{F} ds \approx \int M_k M_i \frac{J_c}{J} ds. \quad (299)$$

Da der EJ_c -fache Betrag der Formänderungen aus diesem Grunde bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke die Regel ist, werden in Zukunft zur Abkürzung des Ansatzes die EJ_c -fachen Beträge der Verschiebungen oder Verdrehungen mit δ_{ik} , δ_{kk} , $\delta_{k\otimes}$ bezeichnet. Der absolute Betrag von J_c ist nur zur Berechnung von δ_{kt} und δ_{ks} notwendig.

Die analytische Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen zwingt in der Regel zur Aufteilung des Integrationsbereiches in einzelne Strecken l_h , deren elastische Eigenschaften durch ein mittleres Trägheitsmoment J_h und eine die Querschnittsgestaltung bestimmende Funktion $J_h/J = \zeta_h$ beschrieben werden.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{kk} &= \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^2 \frac{J_h}{J} ds; & \delta_{ik} &= \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_i M_k \frac{J_h}{J} ds; & \delta_{k0} &= \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k M_0 \frac{J_h}{J} ds, \\ \delta_{kt} &= EJ_c \Sigma \left(\int N_k \alpha_i t ds + \int M_k \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds \right); & \delta_{ks} &= -EJ_c \Sigma C_{ek} \Delta_e. \end{aligned} \right\} (300)$$

Die Integrale werden nur dann formal integriert, wenn J_h/J und F_h/F konstant sind oder durch eine leicht zu integrierende algebraische Funktion ersetzt werden können.

In vielen Fällen ist $\zeta_h = J_h/J = 1$ oder $J_h/J \cos \alpha = 1$. Die Rechnung ist dann besonders einfach. Sie wird mit Hilfe der Tabellen 12 und 16 ausgeführt. Andere Annahmen über die Funktionen J_h/J und $J_h/J \cos \alpha$ sind in Abschn. 18 und in den Tabellen 13 bis 15 ausführlich erörtert worden. Dasselbe gilt von der numerischen oder graphischen Lösung des Integrals.

Die Einflußlinien der überzähligen Größen setzen sich aus den erweiterten Biegelinien δ_{mk} ($k = 1 \dots n$) zusammen, welche für den Lastgurt des Hauptsystems berechnet werden. Dies geschieht nach den Angaben in den Abschnitten 20 und 21. Sie werden je nach der Richtung der wandernden Last $P_m = 1t$ in senkrechter, waagerechter oder beliebig schräger Richtung aufgetragen.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der virtuellen Belastung. Die Vorzahlen $\delta_{ki}^{(n-h)}$, $\delta_{kk}^{(n-h)}$ und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ der Elastizitätsgleichungen für das $(n-h) = r$ -fach statisch unbestimmte Hauptsystem werden nach S. 158 als Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung 1_k bestimmt. Sie bedeuten geometrisch den EJ_c -fachen Betrag der gegenseitigen Verschiebung und Verdrehung der Ufer eines ausgezeichneten Querschnitts k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Der Einfluß der Längs- und Querkkräfte wird auch hier nach Abschn. 18 vernachlässigt, so daß nach (289), (291) und S. 160 die Ansätze eines $(n-h) = r$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} 1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(r)} &= \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(r)2} \frac{J_h}{J} ds; & 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} &= \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(r)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} ds; \\ 1_k^{(r)} \delta_{k0}^{(r)} &= \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(r)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J} ds, \end{aligned} \right\} (301a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 1_k^{(r)} \delta_{k'i}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c} \sum \frac{F_c}{F_h} \int N_k^{(r)} N_i^{(r)} \frac{F_h}{F} ds + \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(r)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} ds \\
 &\quad + EJ_c \sum \left[\int N_k^{(r)} \alpha_i t ds + \int M_k^{(r)} \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds \right], \\
 1_k^{(r)} \delta_{k's}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c} \sum \frac{F_c}{F_h} \int N_k^{(r)} N_s^{(r)} \frac{F_h}{F} ds + \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(r)} M_s^{(r)} \frac{J_h}{J} ds - EJ_c \sum C_{ek}^{(r)} \Delta_e.
 \end{aligned} \right\} (301b)$$

Die Rechenvorschrift (301) läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ des r -fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch die ihr äquivalenten äußeren Kräfte $1_k^{(0)}, Y_{Hk}^{(0)}$ ($H = 1 \dots r$) eines darin enthaltenen, beliebigen, statisch bestimmten Hauptsystems mit den Überzähligen Y_H ersetzt wird.

$$1_k^{(r)} \equiv (1_k^{(0)}, Y_{Hk}^{(0)}), \quad (H = 1 \dots r). \quad (302)$$

In derselben Weise können auch die Komponenten $\delta_{k'i}^{(r)}, \delta_{k'i\infty}^{(r)} \dots$ des Verschiebungszustandes des statisch unbestimmten Hauptsystems als Funktion der vorgeschriebenen Belastung \mathfrak{P} und aller übrigen äußeren Ursachen aus der Formänderung eines statisch bestimmten Hauptsystems abgeleitet werden. Die Formänderung wird, abgesehen von der Temperaturänderung und Stützenbewegung, von einer Gruppe von äußeren Kräften hervorgerufen, die aus der Belastung \mathfrak{P} und den ihr zugeordneten statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H0}^{(0)}$ besteht. Diese enthalten unter Umständen auch Anteile aus Temperatur- und Stützenänderung.

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{k\infty}^{(r)} &= \delta_{k\infty}^{(0)} - \sum_{H=1}^r \delta_{kH}^{(0)} Y_{H\infty}^{(0)}; & \delta_{k'i}^{(r)} &= \delta_{k'i}^{(0)} - \sum_{H=1}^r \delta_{kH}^{(0)} Y_{H'i}^{(0)}; \\
 \delta_{k'0}^{(r)} &= \delta_{k'0}^{(0)} + \delta_{k'i}^{(0)} + \delta_{k's}^{(0)}; & Y_{H'0}^{(r)} &= Y_{H'0}^{(0)} + Y_{H'i}^{(0)} + Y_{H's}^{(0)}.
 \end{aligned} \right\} (303)$$

In Verbindung mit (302) ist

$$\left. \begin{aligned}
 1_k^{(r)} \delta_{k\infty}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k\infty}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)} \delta_{H\infty}^{(0)} = 1_k^{(0)} \delta_{k\infty}^{(0)}, & (H = 1 \dots r), \\
 1_k^{(r)} \delta_{k'i}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k'i}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)} \delta_{H'i}^{(0)} = 1_k^{(0)} \delta_{k'i}^{(0)}, & (H = 1 \dots r),
 \end{aligned} \right\} (304)$$

da die relativen Verschiebungen $\delta_{H\infty}^{(0)}, \delta_{H'i}^{(0)}$ der Querschnitte H des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind. Die Ansätze (301) zur Berechnung der Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks werden daher nach der folgenden Rechenvorschrift abgekürzt:

$$\left. \begin{aligned}
 1_k^{(r)} \delta_{k'k}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k'k}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(0)} M_k^{(r)} \frac{J_h}{J} ds; & 1_k^{(r)} \delta_{k'i}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k'i}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(0)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} ds, \\
 1_k^{(r)} \delta_{k'0}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k'0}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(0)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J} ds; & 1_k^{(r)} \delta_{k'i}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k'i}^{(0)} = \frac{J_c}{F_c} \sum \frac{F_c}{F_h} \int N_k^{(0)} N_i^{(r)} \frac{F_h}{F} ds \\
 &\quad + \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(0)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} ds + EJ_c \sum \left[\int N_k^{(0)} \alpha_i t ds + \int M_k^{(0)} \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds \right]; \\
 1_k^{(r)} \delta_{k's}^{(r)} &= 1_k^{(0)} \delta_{k's}^{(0)} = \frac{J_c}{F_c} \sum \frac{F_c}{F_h} \int N_k^{(0)} N_s^{(r)} \frac{F_h}{F} ds + \sum \frac{J_c}{J_h} \int M_k^{(0)} M_s^{(r)} \frac{J_h}{J} ds - EJ_c \sum C_{ek}^{(0)} \Delta_e.
 \end{aligned} \right\} (305)$$

Die virtuelle Belastung $-X_k = 1$ wirkt hier an einem beliebigen, in dem r -fach statisch unbestimmten Hauptsystem enthaltenen statisch bestimmten Stabwerk und erzeugt in diesem die Schnittkräfte $N_k^{(0)}, M_k^{(0)}$. Sie treten in den Integralen an die Stelle von $N_k^{(r)}, M_k^{(r)}$ des r -fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der

Integrationsbereich wird auf diese Weise kleiner, daher sind auch die Ansätze für $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{k_i}^{(r)}$ einfacher und im Ergebnis genauer.

Der Ansatz (b) zur Berechnung von h überzähligen Größen X_k ($k = 1 \dots h$) aus einem r -fach statisch unbestimmtem Hauptsystem kann hiernach folgendermaßen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{k_1}^{(r)} + \dots + X_k \delta_{k_k}^{(r)} + \dots + X_h \delta_{k_h}^{(r)} &= \delta_{k\otimes}^{(r)}, \\ X_1 (1_k^{(0)} \delta_{k_1}^{(r)}) + \dots + X_k (1_k^{(0)} \delta_{k_k}^{(r)}) + \dots + X_h (1_k^{(0)} \delta_{k_h}^{(r)}) &= 1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(r)}, \\ X_1 \left[\frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} N_1^{(n-h)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} M_1^{(n-h)} \frac{J_c}{J} ds \right] + \dots \\ + X_k \left[\frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} N_k^{(n-h)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} M_k^{(n-h)} \frac{J_c}{J} ds \right] + \dots \\ + X_h \left[\frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} N_h^{(n-h)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} M_h^{(n-h)} \frac{J_c}{J} ds \right] \\ = \frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} (N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)}) \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} (M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)}) \frac{J_c}{J} ds \\ + E J_c \left[\int N_k^{(0)} \alpha_t t ds + \int M_k^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ik}^{(0)} \Delta_e \right]. \end{aligned} \quad (306)$$

Werden die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{k_i}^{(r)}$ des r -fach statisch unbestimmten Stabwerks aus $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ oder aus $-X_i = 1$ nach (305) in einem statisch bestimmten Hauptsystem abgeleitet, so ist

$$1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_{k_i}^{(0)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \quad 1_k^{(0)} \delta_{k_i}^{(r)} = 1_k^{(0)} \delta_{k_i}^{(0)} + 1_k^{(0)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H_i}}^{(0)}. \quad (307)$$

Der erste Anteil kann als die Arbeit einer virtuellen Belastung nach Abschnitt 18 berechnet werden. Der zweite Anteil ist, nach Maxwell umgeformt,

$$1_k^{(0)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = -\sum Y_{H\otimes}^{(0)} \delta_{Hk}^{(0)}; \quad 1_k^{(0)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H_i}}^{(0)} = -\sum Y_{H_i}^{(0)} \delta_{Hk}^{(0)}, \quad (H = 1 \dots r) \quad (308)$$

die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte des r -fach statisch unbestimmten Hauptsystems aus den vorgeschriebenen äußeren Ursachen mit den Komponenten $\delta_{Hk}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems aus $-X_k = 1$.

Die Vorzahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{k_i}^{(r)}$ und die Belastungszahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{k\otimes}^{(r)}$ werden daher nach (306) als Funktion von inneren, nach (308) als Funktion von äußeren Kräften berechnet, so daß mit dem Vergleich eine Nachprüfung der Ergebnisse erreicht wird.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmtem Systemen mit einer Zerlegung der Verschiebungen. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{k_i}^{(r)}$ der Querschnitte (h) eines r -fach statisch unbestimmten Stabwerks kann ebenso wie die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ in (302) auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen werden. Sie besteht dann aus einem Anteil $\delta_{k\otimes}^{(0)}$, welcher von der Belastung \mathfrak{P} , der Temperaturänderung und der Stützenverschiebung herrührt, und einem zweiten Anteil aus den diesen Ursachen zugeordneten r statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H\otimes}^{(0)}$ des Hauptsystems.

$$1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(r)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \quad 1_k^{(r)} \delta_{k_i}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{k_i}^{(0)} + 1_k^{(r)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H_i}}^{(0)}. \quad (309)$$

Da nun auch die Belastung $1_k^{(r)}$ auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen und durch eine äquivalente Belastung $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ ($H = 1 \dots r$) ersetzt werden kann, so ist nach Maxwell

$$\begin{aligned} 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(r)} &= 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)} \delta_{k_i, \Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)} \delta_{H, \Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{H\otimes}^{(0)} \delta_{Hk}^{(0)}, \\ 1_k^{(r)} \delta_{k_i}^{(r)} &= 1_k^{(r)} \delta_{k_i}^{(0)} - \sum Y_{H_i}^{(0)} \delta_{Hk}^{(0)}. \end{aligned}$$

Da ferner die Verschiebungen $\delta_{Hk}^{(r)}$ des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind, so ist auch die Arbeit der Kräfte $Y_{H\otimes}^{(0)}, Y_{Hi}^{(0)}$ Null und damit

$$1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)}; \quad 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(0)}. \quad (310)$$

Die Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks können daher im Vergleich zu (305) auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\left. \begin{aligned} 1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(r)} &= 1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(0)} = \sum \frac{J_e}{J_h} \int M_k^{(r)} M_k^{(0)} \frac{J_h}{J} ds; & 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} &= 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(0)} = \sum \frac{J_e}{J_h} \int M_k^{(r)} M_i^{(0)} \frac{J_h}{J} ds; \\ 1_k^{(r)} \delta_{k0}^{(r)} &= 1_k^{(r)} \delta_{k0}^{(0)} = \sum \frac{J_e}{J_h} \int M_k^{(r)} M_0^{(0)} \frac{J_h}{J} ds; & 1_k^{(r)} \delta_{ks}^{(r)} &= -EJ_c \sum C_{ek}^{(r)} \Delta_e; \\ 1_k^{(r)} \delta_{kt}^{(r)} &= 1_k^{(r)} \delta_{kt}^{(0)} = EJ_c \sum \left[\int N_k^{(r)} \alpha_i t ds + \int M_k^{(r)} \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds \right]. \end{aligned} \right\} (311)$$

Die vollständige Elastizitätsgleichung (k) eines in der Form b nach (294) angegebenen Ansatzes läßt sich ebenso umformen:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{k1}^{(r)} + \dots + X_k \delta_{kk}^{(r)} + \dots + X_h \delta_{kh}^{(r)} &= \delta_{k\otimes}^{(r)}, \\ X_1 (1_k^{(r)} \delta_{k1}^{(0)}) + \dots + X_k (1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(0)}) + \dots + X_h (1_k^{(r)} \delta_{kh}^{(0)}) &= 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)}, \\ X_1 \left[\frac{J_e}{F_e} \int N_k^{(n-h)} N_1^{(0)} \frac{F_e}{F} ds + \int M_k^{(n-h)} M_1^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \right] + \dots \\ + X_k \left[\frac{J_e}{F_e} \int N_k^{(n-h)} N_k^{(0)} \frac{F_e}{F} ds + \int M_k^{(n-h)} M_k^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \right] + \dots \\ + X_h \left[\frac{J_e}{F_e} \int N_k^{(n-h)} N_h^{(0)} \frac{F_e}{F} ds + \int M_k^{(n-h)} M_h^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \right] \\ &= \frac{J_e}{F_e} \int N_k^{(n-h)} N_0^{(0)} \frac{F_e}{F} ds + \int M_k^{(n-h)} M_0^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \\ + EJ_c \left[\int N_k^{(n-h)} \alpha_i t ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \Delta_e \right]. \end{aligned} \right\} (312)$$

Da die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ nach (302) durch $1_k^{(0)}, Y_{Hk}^{(0)}$ ($H = 1 \dots r$) äquivalent ersetzt werden kann, ist

$$1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} = 1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)} \delta_{H\otimes}^{(0)}; \quad 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(0)} = 1_k^{(0)} \delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hi}^{(0)} \delta_{Hi}^{(0)}. \quad (313)$$

Der erste Anteil der Ansätze besteht aus Verschiebungen eines statisch bestimmten Hauptsystems durch ($\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e$) oder $-X_i = 1$, die nach Abschnitt 18 berechnet oder aus Tabellen 12 ff. entnommen werden können. Der zweite Anteil ist die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_{Hk} ($H = 1 \dots r$) aus der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ mit den Komponenten $\delta_{H\otimes}^{(0)}, \delta_{Hi}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzeichen werden auf diese Weise als virtuelle Arbeit von äußeren Kräften angegeben. Der Vergleich mit (311) bildet wiederum eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung.

Die Elastizitätsgleichung als Minimalbedingung der Formänderungsenergie. Die Formänderungsenergie A_i , die Ergänzungsenergie A_i^* eines Stabwerks oder die erweiterte Funktion A_i^{**} ist nach (37) bei Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte ein Minimum. Da nun die statischen Bedingungen durch beliebige Annahmen über die Selbstspannungszustände X_k ($k = 1 \dots n$) erfüllt werden, erhalten diese in den Funktionen A_i, A_i^*, A_i^{**} die Eigenschaft von unabhängigen veränderlichen Größen, nach denen die Funktionen partiell abgeleitet werden können. Nach dem Minimalprinzip E. Castiglianos entstehen daher bei n statisch überzähligen Größen mit n partiellen Ableitungen nach X_k die folgenden n Be-

dingungsgleichungen:

$$\frac{\partial A_i}{\partial X_k} = 0; \quad \frac{\partial A_i^*}{\partial X_k} = 0; \quad \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_k} = 0, \quad (k = 1 \dots n). \quad (314)$$

Diese genügen, abgesehen vom Ausnahmefall, zur eindeutigen Berechnung der n überzähligen Größen X_k , die hier nicht mehr auf den Begriff der einzelnen Schnittkräfte beschränkt werden müssen, sondern beliebig aus ihnen zusammengesetzt sein können, wenn die Gruppen unabhängig voneinander bleiben.

Die Ergänzungsenergie eines Stabwerks, dessen Symmetrieebene mit der Kraftebene zusammenfällt und dessen Spannungen nach den Regeln der technischen Biegelehre berechnet werden, ist nach (158) und (163) mit den vorgeschriebenen Stützenverschiebungen

$$A_i^* = \frac{1}{2} \int \left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{\kappa Q_z^2}{GF} \right) ds - \sum C_e \Delta_e. \quad (315)$$

Soll außerdem eine Temperaturänderung des Baustoffes berücksichtigt werden, so tritt hierfür die Funktion

$$A_i^{**} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{\kappa Q_z^2}{GF} \right) + \int \left(N \alpha_t t + M \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) ds - \sum C_e \Delta_e. \quad (316)$$

Die Stütz- und Schnittkräfte sind nach dem Superpositionsgesetz Funktionen der unbekanntenen X_k . Als Ansatz wird (288) gewählt.

$$C = C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2 - \dots - X_k C_k - \dots - X_n C_n,$$

$$N = N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2 - \dots - X_k N_k - \dots - X_n N_n,$$

$$M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - \dots - X_k M_k - \dots - X_n M_n,$$

$$Q = Q_0 - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - \dots - X_k Q_k - \dots - X_n Q_n.$$

Die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach X_k und damit die Minimalbedingung k ist

$$\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X_k} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_k} ds + \int \kappa \frac{Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial X_k} ds + \int \frac{\partial N}{\partial X_k} \alpha_t t ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_k} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_k} \Delta_e = 0. \quad (317)$$

Mit

$$\frac{\partial N}{\partial X_k} = -N_k, \quad \frac{\partial M}{\partial X_k} = -M_k, \quad \frac{\partial Q}{\partial X_k} = -Q_k, \quad \frac{\partial C}{\partial X_k} = -C_k \quad (318)$$

wird dieselbe Elastizitätsbedingung erhalten wie unter (286), welche mit dem Ansatz (288) weiter entwickelt worden ist.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichungen mit dem Prinzip E. Castiglianos nimmt im Gegensatz zu der anschaulichen geometrischen Methode nach (293) die Zwangsläufigkeit der mathematischen Behandlung als Vorteil für sich in Anspruch und bietet die Möglichkeit, aus statisch unbestimmten Schnittkräften Y_H neue überzählige Größen X_k zu bilden, mit denen Ansatz und Lösung vereinfacht werden können. Dies wirkt sich jedoch meist nur in einzelnen Ausnahmefällen aus, so daß die Lösung nach E. Castigliano in der Regel einen Umweg bedeutet, da der Ansatz (293) und seine Ergänzung durch den Abschnitt 19 die Elastizitätsgleichungen bereits in integrierter Form bieten.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wird jede Elastizitätsgleichung in Zukunft nach dem Ansatz (293) oder (294) entwickelt.

Worch, G.: Beispiele zur Anwendung des Reduktionssatzes. Beton u. Eisen 1924 S. 39.
— Pasternack: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefestiger Stab- und Flächen-tragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

25. Die Grundlagen für die Bildung der Matrix.

Ansatz. Die n Elastizitätsgleichungen zur Berechnung von n überzähligen Größen X_k aus einem statisch bestimmten Hauptsystem erhalten nach der Begründung in Abschnitt 24 folgende Form:

$$X_1 \delta_{k1} + X_2 \delta_{k2} + \dots + X_k \delta_{kk} + \dots + X_{n-1} \delta_{k(n-1)} + X_n \delta_{kn} = \delta_{k0}.$$

Bei einem $(n - k)$ fach statisch unbestimmtem Hauptsystem erscheinen nach (294) die Verschiebungen $\delta_{kk}^{(n-k)}$, $\delta_{k+1}^{(n-k)}$, $\delta_{k0}^{(n-k)}$. Die n Gleichungen werden zur besseren Übersicht in einer Zahlentafel (319) zusammengefaßt:

X_1	X_2	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	X_{n-1}	X_n	
δ_{11}	δ_{12}	$\delta_{1(k-1)}$	δ_{1k}	$\delta_{1(k+1)}$	$\delta_{1(n-1)}$	δ_{1n}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	$\delta_{2(k-1)}$	δ_{2k}	$\delta_{2(k+1)}$	$\delta_{2(n-1)}$	δ_{2n}	δ_{20}
							\vdots
δ_{k1}	δ_{k2}	$\delta_{k(k-1)}$	δ_{kk}	$\delta_{k(k+1)}$	$\delta_{k(n-1)}$	δ_{kn}	δ_{k0}
							\vdots
$\delta_{(n-1)1}$	$\delta_{(n-1)2}$	$\delta_{(n-1)(k-1)}$	$\delta_{(n-1)k}$	$\delta_{(n-1)(k+1)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}$
δ_{n1}	δ_{n2}	$\delta_{n(k-1)}$	δ_{nk}	$\delta_{n(k+1)}$	$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	δ_{n0}

(319)

Für den allgemeinen Belastungsfall tritt an die Stelle von δ_{k0}

$$\delta_{k\otimes} = \delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}.$$

Die gegenseitigen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_{k1} \dots \delta_{kh} \dots$ der Ufer des Querschnitts (k) infolge von $-X_h = 1$ ($h = 1 \dots n$) werden als virtuelle Arbeiten $1_k \cdot \delta_{k1} \dots 1_k \cdot \delta_{kh} \dots$ der Kräftegruppe $-X_k = 1$ berechnet. Sie erhalten den gleichen Richtungssinn wie die Kräfte $-X_k$. Die Summe der Vorzeichen einer Zeile (k)

$$\delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kh} + \dots + \delta_{kn} = \delta_{k\Sigma}, \tag{320}$$

kann als die virtuelle Arbeit der Kraft $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus dessen Belastung durch $-X_1 = 1 \dots -X_n = 1$, also durch die Nachrechnung von $1_k \cdot \delta_{k\Sigma}$ geprüft werden. Hieraus entsteht mit $k = 1 \dots n$

$$\sum_{k=1}^{k=n} 1_k \delta_{k\Sigma} = 1_\Sigma \delta_{\Sigma\Sigma} = (\delta_{11} + \dots + \delta_{1n}) + (\delta_{21} + \dots + \delta_{2n}) + \dots + (\delta_{n1} + \dots + \delta_{nn}) \tag{321}$$

und damit eine allgemeine Rechenprobe für die Richtigkeit des Ansatzes.

Die Matrix der Elastizitätsgleichungen ist mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ zur Hauptdiagonale symmetrisch. Die Tafel (319) kann daher abgekürzt angeschrieben werden. Im Grenzfalle sind entweder die n überzähligen Größen in allen n Gleichungen enthalten oder sie sind unabhängig voneinander. Die Matrix ist dabei voll besetzt oder auf die Hauptdiagonale beschränkt. Die Nebenglieder sind dann Null. Beide Grenzfälle sind Ausnahmen. Der Aufbau der zahlreichen, für das Bauwesen charakteristischen, statisch unbestimmten Stabzüge führt vielmehr zu ausgezeichneten Klassen von mehrgliedrigen Bedingungsgleichungen. Sie unterscheiden sich nach der Anzahl der Unbekannten, die in jeder von ihnen auftreten und den aufeinanderfolgenden Gleichungen gemeinsam sind. Die Zuordnung der überzähligen Größen begründet in der Regel die Zusammenfassung einer ungeraden Anzahl von ihnen, also drei-, fünf-,

sieben- und neungliedrige Gleichungen. Aus dem gleichen Grunde enthalten die ersten und letzten Gleichungen des Ansatzes im Vergleich zu den mittleren eine geringere Anzahl von Unbekannten.

Auflösung und konjugierte Matrix. Die Auflösung einer Gruppe von n linearen Gleichungen begegnet in formaler Beziehung keinen Schwierigkeiten. Jede Unbekannte kann mit den aus der Determinantentheorie bekannten Symbolen unmittelbar angegeben werden.

$$X_k = \frac{D_k}{D} = \frac{D_{1k}}{D} \delta_{10} + \frac{D_{2k}}{D} \delta_{20} + \dots + \frac{D_{nk}}{D} \delta_{n0}. \quad (322)$$

In diesem Ausdruck ist D_{ik} die Adjunkte zu der Vorzahl δ_{ik} der Matrix. Sie entsteht aus der Nennerdeterminante durch Streichung der i ten Zeile und der k ten Spalte. Ihr Vorzeichen wird durch $(-1)^{i+k}$ bestimmt. Dem Bruch $D_{ik}/D = \beta_{ik}$ liegt ein ausgezeichnetes Hauptssystem zugrunde. Er ist von der Belastung unabhängig und allein durch die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks bestimmt.

$$X_k = \beta_{1k} \delta_{10} + \dots + \beta_{ik} \delta_{i0} + \dots + \beta_{kk} \delta_{k0} + \dots + \beta_{nk} \delta_{n0}. \quad (323)$$

Mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ wird nach einer Vertauschung der Zeilen und Spalten der Determinante ebenfalls $D_{ik} = D_{ki}$, damit auch $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ und

$$X_k = \beta_{k1} \delta_{10} + \dots + \beta_{ki} \delta_{i0} + \dots + \beta_{kk} \delta_{k0} + \dots + \beta_{kn} \delta_{n0}. \quad (324)$$

Hiernach erhält β_{ki} die Bedeutung der überzähligen Größe X_k , wenn die Belastungszahl δ_{i0} allein gleich 1 und alle übrigen δ_{k0} Null gesetzt werden. Der Index i durchläuft dabei die Zahlenreihe 1, 2 über k bis n . Bei n überzähligen Größen X_k entstehen auf diese Weise der Zahl nach n^2 Vorzahlen β_{ik} , von denen jedoch nur $1/2 \cdot n(n+1)$ untereinander verschieden sind. Sie werden auch hier unabhängig von der Belastung allein aus den elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und bilden, als Spalten einer Tabelle angeschrieben, die konjugierte, zur Hauptdiagonale symmetrische Matrix zu (319)

	δ_{10}	δ_{20}	$\delta_{(k-1)0}$	δ_{k0}	$\delta_{(k+1)0}$	$\delta_{(n-1)0}$	δ_{n0}		
X_1	β_{11}	β_{12}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}
X_2	β_{21}	β_{22}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}
\vdots									
X_k	β_{k1}	β_{k2}		$\beta_{k(k-1)}$	β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}
\vdots									
X_{n-1}	$\beta_{(n-1)1}$	$\beta_{(n-1)2}$		$\beta_{(n-1)(k-1)}$	$\beta_{(n-1)k}$	$\beta_{(n-1)(k+1)}$		$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$
X_n	β_{n1}	β_{n2}		$\beta_{n(k-1)}$	β_{nk}	$\beta_{n(k+1)}$		$\beta_{n(n-1)}$	β_{nn}

Die Auflösung der geometrischen Bedingungsgleichungen mit Determinanten ist nur bei einer Verknüpfung von wenigen Unbekannten möglich. Bei größeren Ansätzen wird stets nach den Vorschriften des Abschnitts 29 gerechnet. Dies geschieht bei vorgeschriebener Belastung unter Einbeziehung der Belastungszahlen. Bei mehreren Belastungsfällen wird in der Regel die konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ki} (325) verwendet

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \delta_{i0} \quad (k = 1 \dots n). \quad (326)$$

Werden an Stelle der Vorzahlen δ_{ik} der geometrischen Bedingungsgleichungen (319) zur Vereinfachung der Zahlenrechnung Vielfache dieser Werte, also $c\delta_{ik}$ verwendet, so ist

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki} (c\delta_{i0}) \quad (k = 1 \dots n). \quad (327)$$

Die Glieder der konjugierten Matrix $\beta'_{ki} = \beta_{ki}/c$ ($k = 1 \dots n$) werden dann für $(c\delta_{i0}) = 1$ berechnet.

Steht eine wandernde Last $P_m = 1$ in einem beliebigen Punkte m des Lastgurtes, so ist $\delta_{k0} = \delta_{km}$ die Ordinate der Einflußlinie der gegenseitigen Verschiebung (k) des Hauptsystems. Sie wird nach Maxwell als Biegelinie des Lastgurtes für $-X_k = 1$ berechnet. Demnach entsteht die Einflußlinie

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \delta_{mi} \quad (k = 1 \dots n) \quad (328)$$

durch Überlagerung der mit den Vorzahlen β_{ki} erweiterten Ordinaten der Biegelinien δ_{mi} ($i = 1 \dots n$) oder als einzelne Biegelinie des Lastgurtes unter der gemeinsamen Wirkung der überzähligen Größen

$$-X_1 = \beta_{1k}, \quad \dots -X_i = \beta_{ik}, \quad \dots -X_n = \beta_{nk}$$

am Hauptsystem.

Die Auflösung der Matrix wird durch Einsetzen der einer vorgeschriebenen Belastung zugeordneten Wurzeln X_k in die geometrischen Bedingungen (319) nachgeprüft. Dasselbe gilt von den Vorzahlen β_{ki} . Sie müssen den Ansatz (319) mit dem Leitwert i , also mit den Belastungsgliedern $\delta_{i0} = 0, \dots, \delta_{i0} = 1, \dots, \delta_{n0} = 0$ identisch erfüllen.

Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung kann entweder nach dem Einfluß von Fehlern in den Vorzahlen δ_{ik} aus ungenauen Annahmen oder nach dem Einfluß von Abrundungsfehlern in der Zwischenrechnung beurteilt werden. Sie unterliegen gleichen mathematischen Kennzeichen, da die Abrundungsfehler als ungenaue Vorzahlen des Ansatzes gelten können.

Die Wurzeln der Lösung werden nach S. 166 mit $X_k = D_k/D$ angegeben, so daß mit der Nennerdeterminante D auch deren Fehler allen überzähligen Größen X_k gemeinsam sind. Daher untersucht A. Hertwig den Einfluß der um $\pm p_{ik}\delta_{ik}$ von dem wahren Betrag δ_{ik} abweichenden Vorzahlen ($\delta_{ik} \pm p_{ik}\delta_{ik}$) auf die Nennerdeterminante D . Wird $p_{ik} = p$ konstant angenommen und darunter ein größter oder mittlerer Fehler verstanden, um den sich alle Vorzahlen von den wirklichen Werten unterscheiden, so ist mit $D' = D + \Delta D$ für $(\delta_{ik} \pm p\delta_{ik})$ an Stelle von δ_{ik}

$$X'_k = \frac{D_k}{D'} = \frac{D_k}{D + \Delta D} = \frac{D_k}{D} - \frac{D_k}{D} \frac{\Delta D}{D'} = X_k \left(1 - \frac{\Delta D}{D'}\right) = X_k (1 - \varphi). \quad (329)$$

Der Fehler p der Vorzahlen ist eine kleine Zahl, so daß die Entwicklung der Nennerdeterminante D' als Reihe von Potenzen in p mit dem linearen Gliede abgebrochen werden kann. In diesem Falle ist

$$\frac{\Delta D}{D'} = \frac{\sum p \delta_{ik} D_{ik}}{D'} = \sum p \delta_{ik} \beta_{ik}. \quad (330)$$

Der Unterschied φX_k wird im Vergleich zum wahren Wert der Wurzeln X_k am größten, wenn die Summe nur aus positiven Gliedern besteht. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung wird daher unter der Annahme eines Betrages $\pm p$, also eines Fehlers

$$\varphi = \pm p \frac{\sum |\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} = \pm p \sum_i \sum_k |\beta_{ik} \delta_{ik}| \quad (331)$$

beurteilt. Der Zähler ist die Summe der n^2 Produkte der n^2 Unterdeterminanten D_{ik} von $(n-1)$ ter Ordnung mit den ihnen zugeordneten Vorzeichen δ_{ik} .

Da nun die Nennerdeterminante D' als die Summe der positiven und negativen Produkte $\delta_{ik}D_{ik}$ jeder Spalte angeschrieben wird, ist φ um so größer, je mehr sich die Summe bei gegebenen p von dem n -fachen Betrage der Nennerdeterminante D' unterscheidet, je kleiner also D' wird. Ist $D' = 0$, $p \neq 0$, so ist φ unendlich groß. Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn zwei Zeilen oder Spalten einander gleich sind oder mit konstantem Faktor ineinander übergehen. Der optimale Grenzwert liegt bei $\varphi = (\pm p)n$.

Die Empfindlichkeit der Wurzeln gegen Abrundungsfehler kann unter Umständen durch Transformation der Unbekannten X_k abgeändert werden. Der Ansatz erhält auf diese Weise eine größere Nennerdeterminante. Die Empfindlichkeit des Ansatzes gegen Fehler in den Vorzeichen bleibt dabei bestehen. Beide Ursachen der Fehlerempfindlichkeit können gleichzeitig nur durch Änderung des Hauptsystems gemildert oder beseitigt werden.

Die Stützwiderstände C und die Schnittkräfte N, M, Q des Stabwerks entstehen nach (288) durch numerische oder graphische Superposition der Anteile aus der Belastung \mathfrak{P} und den überzähligen Größen X_k des Hauptsystems. Das Ergebnis ist als Summe von positiven und negativen Beiträgen wiederum durch Fehlerempfindlichkeit gefährdet. Diese wird durch das Hauptsystem bestimmt und kann daher nur durch dessen Abänderung beseitigt werden. Sie verliert um so mehr an Bedeutung, je kleiner die überzähligen Größen durch geeignete Anordnung und Belastung des Hauptsystems sind. Am besten werden sie überhaupt nur als Unterschiede gegenüber plausiblen Annahmen der überzähligen Größen berechnet.

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks. Die statisch überzähligen Schnittkräfte X_k aus den vorgeschriebenen Ursachen ($\mathfrak{P}, t, \Delta_e$) sind neben der Belastung \mathfrak{P} äußere Kräfte des Hauptsystems. Die Schnittkräfte und Verschiebungen lassen sich daher nach den Abschnitten 13ff. und 17ff. wie bei jedem statisch bestimmten Stabwerk für eine Belastung aus \mathfrak{P} und X_k ($k = 1 \dots n$) berechnen. Sie können aber auch nach (288) und (289) durch die gruppenweise Überlagerung einzelner statisch bestimmter Beiträge C_0, M_0 usw. mit $C_k \cdot X_k, M_k \cdot X_k$ usw. oder einzelner Verschiebungen w_0 usw. mit $w_k \cdot X_k$ usw. angeschrieben werden. Die statisch bestimmten Schnittkräfte M_0, M_k usw. sind einzeln und daher auch nach der Gruppenbildung im Sinne von (284) im Gleichgewicht.

Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach denselben Regeln aufgezeichnet. Sie entstehen entweder durch die unmittelbare Überlagerung der Anteile M_0 mit $M_k \cdot X_k$ nach (288) oder durch die Verwendung der Ansätze (324ff.) für X_k . In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} M &= M_0 - \sum_k M_k X_k & ; & & Q &= Q_0 - \sum_k Q_k X_k & ; \\ &= M_0 - \sum_k [M_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}] & ; & & &= Q_0 - \sum_k [Q_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}] & ; \\ &= M_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k M_k \beta_{ki}] & ; & & &= Q_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k Q_k \beta_{ki}] & . \end{aligned} \quad (332)$$

Die Einflußlinien setzen sich darnach aus dem statisch bestimmten Anteil M_0, Q_0 und einer resultierenden Biegelinie zusammen, die entweder durch Überlagerung von n Biegelinien oder ebenso wie auf S. 167 als einzelne Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für Kräfte $-X_i = \sum_k M_k \beta_{ki}$ ($i = 1 \dots n$) gefunden wird.

Nachprüfung der Kontinuität des Stabzugs als Rechenprobe für die Schnittkräfte. Da die statischen Bedingungen durch die Art der Untersuchung an jedem Abschnitt des Stabwerks von vornherein erfüllt sind, können die Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks (C, N, M, Q) nur durch die

Untersuchung des zugeordneten Verschiebungszustandes als richtig festgestellt werden. Dies geschieht durch Nachprüfung der Randbedingungen des freien Stabwerks, welche durch die Abstützung vorgeschrieben sind und durch Nachrechnung der relativen Bewegung $\delta_i^{(n)}$ der Ufer von n Querschnitten. Das Ergebnis $\delta_i^{(n)} = 0$ ($i = 1 \dots n$) bestätigt die Richtigkeit der Rechnung. In der Regel begnügt man sich mit einzelnen für die Nachprüfung geeigneten Ansätzen. Dabei sollen die Biegemomente \bar{M}_i (171) in einem möglichst großen Bereich des Stabwerks vorhanden sein und sich von den Biegemomenten M_i wesentlich unterscheiden.

Ergeben sich die $\delta_i^{(n)} \neq 0$, so muß die Rechnung wiederholt werden. Eine Abschätzung des Fehlers $\delta_i^{(n)} = \Delta$ in seiner Bedeutung für den Spannungszustand genügt nur bei kleinen Unterschieden. Sind die Vorzahlen δ_{ik} der Elastizitätsgleichungen richtig, so können die $\delta_i^{(n)} = \Delta$ zugeordneten Unterschiede ΔX_k der überzähligen Größen mit den Vorzahlen der konjugierten Matrix ausgerechnet werden. Um sich jedoch von allen Voraussetzungen der vorhandenen Lösung frei zu machen, wird die dem Fehler $\delta_i^{(n)} = \Delta$ zugeordnete Änderung der Stütz- oder Schnittkraft Z_i in einem $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystem festgestellt. Bezeichnet Z_i die genaue Stütz- oder Schnittkraft, Z_i^* ihren fehlerhaften Wert in der vorhandenen Lösung, so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta_{i0}^{(n-1)} - Z_i \delta_{ii}^{(n-1)} &= 0, \\ \delta_{i0}^{(n-1)} - Z_i^* \delta_{ii}^{(n-1)} &= \Delta. \end{aligned}$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen liefert den Fehler

$$\Delta Z_i = Z_i - Z_i^* = \Delta / \delta_{ii}^{(n-1)}. \quad (333)$$

Er läßt sich zur Vereinfachung der Rechnung mit

$$\overline{\Delta Z_i} = \Delta / \delta_{ii}^{(0)} < \Delta Z_i \quad (334)$$

abschätzen.

Das System wird daher von den Stützen gelöst oder an einer geeigneten Stelle durchgeschnitten, um die ihrer Größe nach bekannten gegenseitigen Verschiebungen oder Verdrehungen als Funktion der nachgewiesenen Schnittkräfte nach Abschnitt 13 ff. zu berechnen. Die virtuelle Arbeit $1_i^{(n)} \cdot \delta_i^{(n)}$ ist dabei Null oder vorgeschrieben. Sie kann nach (293) als Funktion äußerer Kräfte angegeben werden:

$$1_i^{(n)} \delta_{i0}^{(n)} = 1_i^{(0)} \delta_{i0}^{(0)} = 1_i^{(0)} \delta_{i0}^{(0)} - \sum_{k=1}^n X_{k0}^{(0)} \delta_{ik}^{(0)}. \quad (335)$$

In der Regel wird jedoch die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte nachgeprüft, so daß mit der üblichen Abkürzung folgende Gleichung identisch erfüllt sein muß:

$$1_i^{(n)} \delta_{i0}^{(n)} = 1_i^{(0)} \delta_{i0}^{(n)} = \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_0^{(n)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_i^{(0)} M_0^{(n)} \frac{J_c}{J} ds = 0. \quad (336)$$

Für die Schnittkräfte aus Temperatur- und Stützenbewegung ist

$$\left. \begin{aligned} 1_i^{(0)} \delta_{ii}^{(n)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_i^{(n)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_i^{(0)} M_i^{(n)} \frac{J_c}{J} ds \\ &\quad + EJ_c \left[\int N_i^{(0)} \alpha_t t ds + \int M_i^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds \right] = 0, \\ 1_i^{(0)} \delta_{is}^{(n)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_s^{(n)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_i^{(0)} M_s^{(n)} \frac{J_c}{J} ds - EJ_c \sum C_{ei}^{(0)} \Delta_e = 0. \end{aligned} \right\} \quad (337)$$

Die Schnittkräfte $M_i^{(0)}$ eines geschlossenen oder beiderseits eingespannten Stabzugs sind in Abb. 153 eingetragen, so daß durch die Kontinuität des Stabwerks am Querschnitt i die folgenden drei Bedingungen nachgewiesen werden müssen:

$$\sum \int 1 M_0^{(3)} \frac{J_c}{J} ds = 0; \quad \sum \int v M_0^{(3)} \frac{J_c}{J} ds = 0; \quad \sum \int x M_0^{(3)} \frac{J_c}{J} ds = 0. \quad (338)$$

In diesem Falle ist die Summe der positiven und negativen mit J_e/J reduzierten Momentenflächen aus der vorgeschriebenen Belastung Null. Dasselbe gilt von ihren Momenten bezogen auf die Achsen u und v .

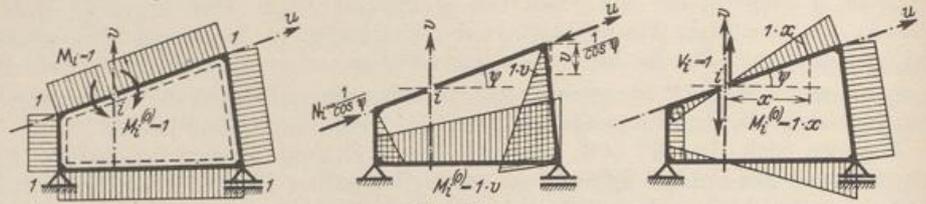


Abb. 153.

Wahl des Hauptsystems. Das Hauptsystem soll nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, abgesehen von besonderen Ausnahmen, kinematisch starr sein und keine unendlich kleine Beweglichkeit enthalten. Dabei sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte derart auszuwählen, daß die Schnittkräfte des Hauptsystems der Größenordnung nach mit denjenigen des vorgelegten Stabwerks übereinstimmen und der dem Ansatz (285) zugrunde liegende Stabzug nach Möglichkeit symmetrisch ist. Zumeist ergeben sich Vorteile für die Lösung, wenn alle überzähligen Größen die gleiche Dimension besitzen, also entweder Momente oder Kräfte darstellen. Die Brauchbarkeit des Hauptsystems zeigt sich im Ansatz durch kleine Verschiebungen δ_{ik} relativ zu δ_{kk} , also durch geringe gegenseitige Abhängigkeit der überzähligen Größen. Die Auflösung des Ansatzes wird um so günstiger, je enger der Bereich ist, in dem sich die Schnittkräfte M_i, M_k aus den einzelnen Belastungszuständen $-X_i = 1, -X_k = 1$ überlagern. Je kleiner die Schnittkräfte M_i, M_k des Hauptsystems aus den überzähligen Größen im Verhältnis zu denjenigen sind, welche allein durch die Belastung hervorgerufen werden, um so zweckmäßiger ist das Hauptsystem zur Abminderung der mit jeder Superposition verbundenen Fehlerquellen. Führt die Untersuchung zu Einflußlinien und daher zur Aufzeichnung von Biegelinien des Lastgurtes, so verdient der einfache oder zusammengesetzte Balkenträger durch die einfachen Stützenbedingungen als Hauptsystem den Vorzug.

Pirlet, J.: Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Gebilde. Diss. Aachen 1909. — Hertwig, A.: Die Fehlerwirkungen beim Auflösen linearer Gleichungen und die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1917 S. 110. — Worch, G.: Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Bauing. 1925 S. 554.

26. Stabwerke mit wenigen überzähligen Größen.

Um die Methode im einzelnen anzuwenden und die Auflösung der n Elastizitätsgleichungen eines hochgradig statisch unbestimmten Systems vorzubereiten, werden zunächst Stabwerke mit 1 bis 3 überzähligen Größen behandelt.

Einfach statisch unbestimmtes System. Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus Belastung \mathfrak{B} und überzähliger Größe X_1 sind nach (288)

$$C = C_0 - X_1 C_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \quad M = M_0 - X_1 M_1, \quad Q = Q_0 - X_1 Q_1. \quad (339)$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 wird aus der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems und des vorgelegten Systems bestimmt und nach (290) mit $k = 1$ berechnet.

$$1_1 \cdot \delta_1 = 0 = \int N_1 \frac{N_0 ds}{EF} + \int M_1 \frac{M_0 ds}{EJ} + \int N_1 \alpha_t t ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{e1} \Delta_e - X_1 \left[\int N_1^2 \frac{ds}{EF} + \int M_1^2 \frac{ds}{EJ} \right]. \quad (340)$$

Die Superposition der Formänderung des Hauptsystems aus den vorhandenen äußeren Ursachen nach (293) liefert folgende Bedingung:

$$\delta_1 = 0 = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} - X_1 \delta_{11} = \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11}. \quad (341)$$

Nach dem erweiterten Ansatz vom Minimum der Formänderungsarbeit ist die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach X_1 Null.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 &= \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t ds \\ &+ \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e. \end{aligned}$$

In dieser ist $\partial C_e / \partial X_1 = -C_1$, $\partial N / \partial X_1 = -N_1$, $\partial M / \partial X_1 = -M_1$, so daß der Ansatz mit (340) übereinstimmt.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11}} \\ &= \frac{\frac{J_e}{F_e} \int N_1 N_0 \frac{F_e}{F} ds + \int M_1 M_0 \frac{J_e}{J} ds + E J_e \left[\int N_1 \alpha_t t ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{e1} \Delta_e \right]}{\frac{J_e}{F_e} \int N_1^2 \frac{F_e}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_e}{J} ds}. \end{aligned} \quad (342)$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 besteht aus drei Anteilen. Die Belastung \mathfrak{P} erzeugt im statisch bestimmten Hauptsystem die Schnittkräfte N_0, M_0 , die Temperaturänderung ist mit $(t, \Delta t)$, die Stützenverschiebung durch gemessene oder geschätzte Beträge Δ_e vorgeschrieben. Die Gleichung der Einflußlinie von X_1 wird nach

$$X_1 = \delta_{m1} / \delta_{11} \quad (343)$$

berechnet oder aufgezeichnet.

Zweifach statisch unbestimmtes System. Die Stütz- und Schnittkräfte entstehen durch Superposition der Anteile aus der Belastung \mathfrak{P} und den überzähligen Größen X_1 und X_2 .

$$\left. \begin{aligned} C &= C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2, & N &= N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2, \\ M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2. \end{aligned} \right\} \quad (344)$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_1, X_2 machen nach S. 164 die erweiterte Funktion der Formänderungsarbeit A_i^{**} zum Minimum, so daß deren partielle Ableitungen nach X_1 und X_2 Null sind.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 &= \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t ds \\ &+ \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e, \\ \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_2} = 0 &= \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \frac{N ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{M ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \alpha_t t ds \\ &+ \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_2} \Delta_e, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_1} = -N_1, \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -M_1, \quad \frac{\partial C}{\partial X_1} = -C_1,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_2} = -N_2, \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = -M_2, \quad \frac{\partial C}{\partial X_2} = -C_2.$$

Der Ansatz ist hier wegen seiner grundsätzlichen Bedeutung für die Elastizitätstheorie wiederholt worden, obwohl das Ergebnis nach (293) in integrierter Form an-

geschrieben werden kann. Die Abkürzung verdient durch die anschauliche geometrische Auslegung den Vorzug.

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 = 0 &= \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12}; & \delta_{1\otimes} &= \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s}; \\ \delta_2 = 0 &= \delta_{2\otimes} - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22}; & \delta_{2\otimes} &= \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s}; \\ X_1 &= \frac{\delta_{1\otimes} \delta_{22} - \delta_{2\otimes} \delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}} \left(\delta_{1\otimes} - \delta_{2\otimes} \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \right); \\ X_2 &= \frac{\delta_{2\otimes} \delta_{11} - \delta_{1\otimes} \delta_{21}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}} \left(\delta_{2\otimes} - \delta_{1\otimes} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (345)$$

Dasselbe Ergebnis entsteht nach (324) durch Superposition der Belastungsglieder. Die Lösung des Ansatzes für $\delta_{10} = 1$ und $\delta_{20} = 0$ wird mit $X_1 = \beta_{11}$ und $X_2 = \beta_{21}$, die Lösung für $\delta_{10} = 0$ und $\delta_{20} = 1$ mit $X_1 = \beta_{12}$ und $X_2 = \beta_{22}$ bezeichnet. Dabei ist $\beta_{21} = \beta_{12}$.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1\otimes} = 1 \\ \delta_{2\otimes} = 0 \end{aligned} \right\} \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}}; \quad \beta_{21} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} \beta_{11}, \\ \delta_{2\otimes} = 1 \\ \delta_{1\otimes} = 0 \end{aligned} \right\} \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}; \quad \beta_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \beta_{22}, \quad (346)$$

$$X_1 = \beta_{11} \delta_{1\otimes} + \beta_{12} \delta_{2\otimes}; \quad X_2 = \beta_{21} \delta_{1\otimes} + \beta_{22} \delta_{2\otimes}. \quad (347)$$

Das Ergebnis läßt sich unmittelbar mit (345) vergleichen und bildet die Anweisung für die Berechnung der Einflußlinien der statisch unbestimmten Schnittkräfte. Die Einflußlinie X_1 wird als Biegelinie des Lastgurtes bei der Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = \beta_{11}$, $-X_2 = \beta_{12}$, die Einflußlinie X_2 bei der Belastung mit $-X_1 = \beta_{21}$, $-X_2 = \beta_{22}$ erhalten.

Der Quotient δ_{21}/δ_{22} der Lösung kann als die überzählige Schnittkraft X_2 für $-X_1 = 1$ angesehen und daher durch X_{21} bezeichnet werden. Ebenso läßt sich $\delta_{12}/\delta_{11} = X_{12}$ als der Betrag von X_1 infolge von $-X_2 = 1$ und $\delta_{10}/\delta_{11} = X_{10}$, $\delta_{20}/\delta_{22} = X_{20}$ als die überzähligen Größen eines einfach statisch unbestimmten Systems aus der Belastung \mathfrak{P} deuten. Daher ist (345) auch

$$X_1 = \frac{\delta_{10} - \delta_{12} X_{20}}{\delta_{11} - \delta_{12} X_{21}}; \quad X_2 = \frac{\delta_{20} - \delta_{21} X_{10}}{\delta_{22} - \delta_{21} X_{12}}. \quad (348)$$

Zähler und Nenner sind daher nach dem Superpositions-gesetz die Verschiebungen $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}$ in zwei einfach statisch unbestimmten Hauptsystemen aus der Belastung \mathfrak{P} und $-X_1 = 1$ oder $-X_2 = 1$. Die überzähligen Größen können daher auch folgendermaßen angeschrieben und berechnet werden:

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(1)}}{\delta_{11}^{(1)}}; \quad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}. \quad (349)$$

Dreifach statisch unbestimmtes System. Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems werden nach (288) durch Superposition der Belastung und der überzähligen Größen folgendermaßen zerlegt:

$$\left. \begin{aligned} C &= C_{\otimes} - X_1 C_1 - X_2 C_2 - X_3 C_3, \\ N &= N_{\otimes} - X_1 N_1 - X_2 N_2 - X_3 N_3, \\ M &= M_{\otimes} - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3, \\ Q &= Q_{\otimes} - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - X_3 Q_3. \end{aligned} \right\} \quad (350)$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_1, X_2, X_3 sind nach (285) durch die geometrische Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems bestimmt.

$$\begin{array}{c}
 X_1 \quad X_2 \quad X_3 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \hline \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \hline \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \delta_{10} \\
 \delta_{20} \\
 \delta_{30}
 \end{array}
 \quad (351)$$

Der Ansatz wird nach S. 166 mit Determinanten aufgelöst.

$$\left. \begin{array}{l}
 X_1 = \frac{\delta_{10}(\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{23}) - \delta_{20}(\delta_{12}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{13}) + \delta_{30}(\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{22}\delta_{13})}{\delta_{11}(\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{23}) - \delta_{21}(\delta_{12}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{13}) + \delta_{31}(\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{22}\delta_{13})}, \\
 X_2 = \frac{-\delta_{10}(\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23}) + \delta_{20}(\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{13}) - \delta_{30}(\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{21}\delta_{13})}{-\delta_{12}(\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23}) + \delta_{22}(\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{13}) - \delta_{32}(\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{21}\delta_{13})}, \\
 X_3 = \frac{\delta_{10}(\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{22}) - \delta_{20}(\delta_{11}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{12}) + \delta_{30}(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12})}{\delta_{13}(\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{22}) - \delta_{23}(\delta_{11}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{12}) + \delta_{33}(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12})}.
 \end{array} \right\} (352)$$

Das Ergebnis läßt sich nach (324) auch durch Superposition der Belastungszahlen δ_{h0} entwickeln. Dabei ist für

$$\begin{array}{l}
 \delta_{10} = 1, \quad \delta_{20} = 0, \quad \delta_{30} = 0: \quad X_1 = \beta_{11}, \quad X_2 = \beta_{21}, \quad X_3 = \beta_{31}, \\
 \delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = 1, \quad \delta_{30} = 0: \quad X_1 = \beta_{12}, \quad X_2 = \beta_{22}, \quad X_3 = \beta_{32}, \\
 \delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = 0, \quad \delta_{30} = 1: \quad X_1 = \beta_{13}, \quad X_2 = \beta_{23}, \quad X_3 = \beta_{33}.
 \end{array}$$

Die Vorzeichen sind unabhängig von der Belastung und können hier aus (352) mit D als Bezeichnung für die Nennerdeterminante angeschrieben werden.

$$\left. \begin{array}{l}
 \beta_{11} = \frac{1}{D} (\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{23}); \quad \beta_{21} = -\frac{1}{D} (\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23}); \\
 \beta_{31} = \frac{1}{D} (\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{22}); \quad \text{usw.}
 \end{array} \right\} (353)$$

Die Zählerdeterminanten D_{hk} und D_{kh} sind einander gleich. Damit ist auch die Beziehung $\beta_{hk} = \beta_{kh}$ nachgeprüft worden.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte aus einer beliebigen Belastung mit $\delta_{1\otimes}, \delta_{2\otimes}, \delta_{3\otimes}$ sind nunmehr

$$\left. \begin{array}{l}
 X_1 = \beta_{11}\delta_{1\otimes} + \beta_{12}\delta_{2\otimes} + \beta_{13}\delta_{3\otimes}, \\
 X_2 = \beta_{21}\delta_{1\otimes} + \beta_{22}\delta_{2\otimes} + \beta_{23}\delta_{3\otimes}, \\
 X_3 = \beta_{31}\delta_{1\otimes} + \beta_{32}\delta_{2\otimes} + \beta_{33}\delta_{3\otimes}.
 \end{array} \right\} (354)$$

Die Matrix der Lösung ist zu (351) konjugiert und mit $\beta_{kh} = \beta_{hk}$ außerdem zur Hauptdiagonale symmetrisch.

$$\begin{array}{c}
 \delta_{1\otimes} \quad \delta_{2\otimes} \quad \delta_{3\otimes} \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \hline \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \hline \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad (355)$$

Das Ergebnis muß die Bedingungen (351) identisch erfüllen. Die Nachprüfung für

$\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}$ und $\delta_{10} = 1$ besteht daher in

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} \delta_{11} + \beta_{21} \delta_{12} + \beta_{31} \delta_{13} &= 1, \\ \beta_{11} \delta_{21} + \beta_{21} \delta_{22} + \beta_{31} \delta_{23} &= 0, \\ \beta_{11} \delta_{31} + \beta_{21} \delta_{32} + \beta_{31} \delta_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (356)$$

Ähnliche Bedingungen gelten für $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32}$ und $\delta_{20} = 1$ oder $\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}$ und $\delta_{30} = 1$.

Die Einflußlinien der überzähligen Größen nach (328) werden wieder durch Überlagerung der mit den β -Vorzeichen erweiterten Ordinaten der Biegelinien δ_{mk} des Lastgurtes des Hauptsystems oder auch als Biegelinien für ausgezeichnete Gruppen von äußeren Kräften erhalten. Diese bestehen für die Einflußlinie X_1 aus $-X_1 = \beta_{11}, -X_2 = \beta_{12}, -X_3 = \beta_{13}$.

Schnittkräfte. Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach (288) durch Superposition bestimmt. Die Vorzeichen C_k, N_k, M_k, Q_k des Ansatzes sind aus den

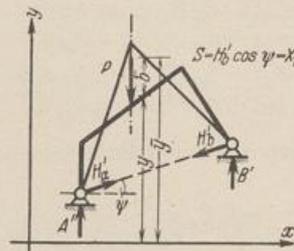


Abb. 154.

$$\begin{aligned} M &= X_1 \left[\frac{M_0}{X_1} - M_1 \right] \\ &= X_1 \bar{b} = X_1 (\bar{y} - y). \end{aligned}$$

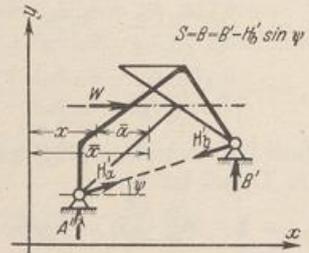


Abb. 155.

$$\begin{aligned} M &= B \left[\frac{M_0}{B} - \frac{X_1}{B} M_1 \right] \\ &= B \bar{a} = B (\bar{x} - x). \end{aligned}$$

Schaulinien der Schnittkräfte für $-X_k = 1$ bekannt, mit denen die Verschiebungen δ_{1k} usw. berechnet worden sind. Der Ansatz (288) gilt auch für die Schnittkräfte aus einer vorgeschriebenen Belastung. Die statisch unbestimmten Größen X_1 usw. sind in diesem Falle ebenso wie \mathfrak{P} äußere Kräfte, aus denen die Schnittkräfte numerisch oder zeichnerisch nach den Abschnitten (13 ff.) angegeben werden.

Die graphische Darstellung der Schnittkräfte wird in der Regel auf die Biegemomente beschränkt. Sie werden meist als Ordinaten an der Zugseite des Stabzugs winkelrecht zur Achse aufgetragen, um ein übersichtliches Bild zu gewinnen.

Die Lösung ist bei zahlreichen Aufgaben durch die Entwicklung der Biegemomente nach $M = S \bar{s}$ einfacher. In dieser bedeutet S eine Komponente der Mittelkraft der äußeren Kräfte des statisch unbestimmten Tragwerks links von einem beliebigen Querschnitt, die für den ganzen Stabzug oder wenigstens für große Abschnitte konstant ist. Die Strecke \bar{s} ist die Differenz $\bar{b} = (\bar{y} - y)$ oder $\bar{a} = (\bar{x} - x)$ der Koordinaten x, y der Schwerpunkte oder Kernpunkte der Querschnitte und der Koordinaten \bar{x}, \bar{y} der Mittelkraftlinie des n -fach statisch unbestimmten Systems.

a) Einfach statisch unbestimmtes Stabwerk mit \mathfrak{P} und der überzähligen Größe X_1 eines statisch bestimmten Hauptsystems (Abb. 154 u. 155):

$$M = M_0 - X_1 M_1 = S \left(\frac{M_0}{S} - \frac{X_1}{S} M_1 \right). \quad (357)$$

b) Zwei- und dreifach statisch unbestimmtes Stabwerk mit \mathfrak{P} und der überzähligen Größe X_1 des ein- oder zweifach statisch unbestimmten Hauptsystems:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} = S \left(\frac{M_0^{(1)}}{S} - \frac{X_1}{S} M_1^{(1)} \right), \\ M &= M_0^{(2)} - X_1 M_1^{(2)} = S \left(\frac{M_0^{(2)}}{S} - \frac{X_1}{S} M_1^{(2)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (358)$$

Diese Formulierung der Schnittkräfte kann mit Vorteil auf die beiderseits eingespannten und die ringsum geschlossenen Stabzüge angewendet und auch auf mehrteilige Tragwerke übertragen werden. Der Abschnitt 60 enthält Beispiele.

Untersuchung eines Brückenträgers auf 3 Stützen.

1. Geometrische Grundlagen: Theoretische Stützweite: $l_1 = l_2 = l = 18,0$ m. Abmessungen nach Abb. 156a, hieraus $\zeta = J_c/J$ (Abb. 156b)¹.

$$J_c = J_a = J_b = 0,2 J_k = 0,1150 \text{ m}^4.$$

x und $\xi = x/l$ werden im Felde l_1 von a nach c , im Felde l_2 von b nach c gemessen.

ξ	0 bis 6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	1,0
J_c/J	1,0000	0,9631	0,8406	0,6453	0,4551	0,3016	0,2026

a) Trägerbild

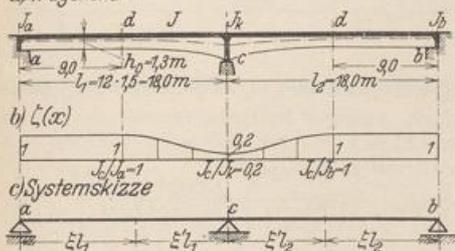


Abb. 156.

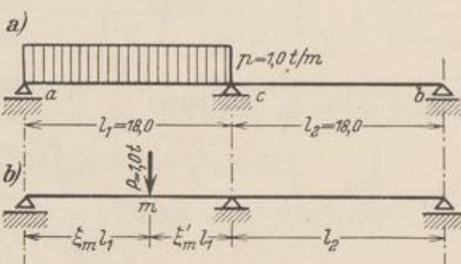


Abb. 157.

Materialkonstanten: $E_b = 210 \text{ t/cm}^2$; $\alpha_t = 0,00001$.

2. Belastung: Aus der Anzahl der möglichen Belastungsfälle werden die folgenden herausgegriffen: a) ruhende Last $p = 1,0 \text{ t}$ (Abb. 157a); b) bewegliche Last $P = 1,0 \text{ t}$ (Abb. 157b); c) geschätzte Stützensenkung:

$$\Delta_c = 1 \text{ cm}; \quad \Delta_a = \Delta_b = 0;$$

d) ungleichmäßige Erwärmung:

$$\Delta t = t_u - t_0 = -10^{\circ}.$$

¹ Zum Vergleich werden auch die Funktionen J_c/J auf S. 97 verwendet:

Trägerbild:

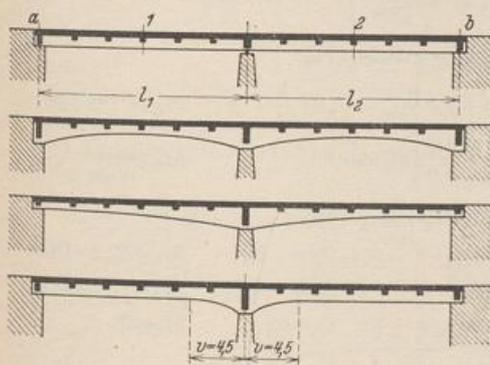


Abb. 158 a-d.

Verlauf der Trägheitsmomente:

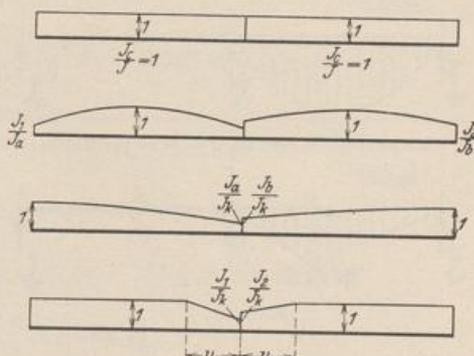


Abb. 159 a-d.

- a) $\zeta = J_1/J = 1$ { konstantes Trägheitsmoment jedes Stabes
($J_c = J_1$ für $x = 0,5 l$).
- b) $\zeta = J_1/J = 1 - (1 - J_1/J_a)(1 - 2\xi)^2$ { Die Querschnittszunahme ist stetig und symmetrisch zur Feldmitte.
- c) $\zeta = J_a/J = 1 - (1 - J_a/J_k)(1 - \xi)^2$ { Die Querschnittszunahme ist stetig und unsymmetrisch zur Feldmitte.
- d) $\zeta = J_1/J = 1 - (1 - J_1/J_k)(1 - \xi'/v_1)$ { Die Querschnittszunahme beschränkt sich auf die Voute ($v_1 = v_1/l_1$).

Die Formeln gelten für den Bereich l_1 .

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist einfach statisch unbestimmt.

Ausbildung des Hauptsystems.

a) Träger auf zwei Stützen. X_1 : Stützkraft der Mittelstütze (Abb. 160a).

b) Auslegerträger. X_1 : Stützkraft einer Seitenstütze (Abb. 160b).

c) Zwei Träger auf zwei Stützen. X_1 : Moment der Normalspannungen in dem der Mittelstütze unmittelbar benachbarten Querschnitt (Abb. 160c).

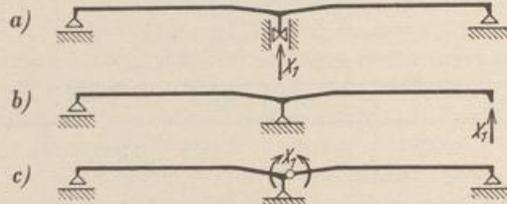


Abb. 160.

Nach den Bemerkungen auf S. 170 verdient das Hauptsystem c) (Abb. 160) den Vorzug. Berechnung von X_1 nach (342):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\int_0^l M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds + E J_c \int_0^l M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - E J_c \sum C_{e1} \Delta e}{\int_0^l M_1^2 \frac{J_c}{J} ds} = \frac{\delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1e}}{\delta_{11}}$$

Die Mitwirkung der Querkraft wird nach S. 159 vernachlässigt, der Einfluß der Längskräfte ist Null.

Stütz- und Schnittkräfte im Hauptsystem (Kräfte in t, Momente in mt) (Abb. 161):

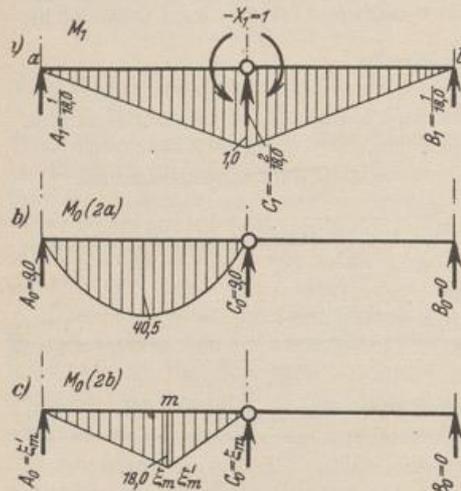


Abb. 161.

a) Belastung $-X_1 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= + \frac{1}{18,0} \\ C_1 &= - \frac{2}{18,0} \\ B_1 &= + \frac{1}{18,0} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_1 &= + \frac{1}{18,0}; & M_1 &= \xi; \\ Q_1 &= - \frac{1}{18,0}; & M_1 &= \xi. \end{aligned}$$

b) Belastung (2a):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= + 9,0 \\ C_0 &= + 9,0 \\ B_0 &= \pm 0,0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_0 &= 18,0 \left(\frac{1}{2} - \xi \right); & M_0 &= 162 \xi \xi'; \\ Q_0 &= 0; & M_0 &= 0. \end{aligned}$$

c) Belastung (2b):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \xi'_m \\ C_0 &= \xi_m \\ B_0 &= 0,0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \div m: & Q_0 = \xi'_m; & M_0 &= \xi'_m \xi \cdot 18,0; \\ m \div c: & Q_0 = -\xi_m; & M_0 &= \xi_m \xi' \cdot 18,0; \\ c \div b: & Q_0 = 0; & M_0 &= 0. \end{aligned}$$

$$4. \quad \delta_{11} = \int_a^b M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2l \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi; \quad \xi^2 \frac{J_c}{J} = \eta.$$

Numerische Integration für die punktweise vorgeschriebene Funktion J_c/J mit Hilfe der Simpsonschen Reihe nach (181) oder (182):

$$\alpha) \quad \delta'_{11} = 2l \int_0^1 \eta d\xi = 2 \frac{\Delta x}{3} (\eta_0 + 4\eta_1 + 2\eta_2 + \dots + 2\eta_{2n-2} + 4\eta_{2n-1} + \eta_{2n}) = 2 \frac{\Delta x}{3} \Sigma_1$$

$$\Delta x = 1,5 \text{ m}; \quad \Sigma_1 = 7,10838; \quad \delta'_{11} = 7,10838.$$

$$\beta) \delta_{11} = 2l \int_0^1 \eta d\xi = 2 \frac{p}{3} \Delta x (\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + \dots + 3\eta_{n-2} + 3\eta_{n-1} + \eta_n) = 2 \frac{p}{3} \Delta x \Sigma_2,$$

$$\Delta x = 1,5 \text{ m}; \quad \Sigma_2 = 6,32425; \quad \delta_{11} = 7,11477.$$

m	ξ	ξ^2	$\frac{J_c}{J}$	$\xi^2 \frac{J_c}{J}$	h_1	$h_1 \xi^2 \frac{J_c}{J}$	h_2	$h_2 \xi^2 \frac{J_c}{J}$
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1	0,00000	1	0,00000
1	0,08333	0,00694	1,00000	0,00694	4	0,02776	3	0,02082
2	0,16667	0,02778	1,00000	0,02778	2	0,05556	3	0,08334
3	0,25000	0,06250	1,00000	0,06250	4	0,25000	2	0,12500
.
.
12	1,00000	1,00000	0,2026	0,20260	1	0,20260	1	0,20260
					Σ_1	7,10838	Σ_2	6,32425

Wird die Funktion $\zeta = J_c/J$ zwischen den Querschnitten d und c angenähert linear angenommen, so kann δ_{11} formal integriert werden¹. Nach Tabelle 14b Seite 108 ist mit $M_a = \bar{M}_a = 1,0 \text{ mt}$, $n = 0,2$; $v = v/l = 0,5$ und $l' = l = 18,0 \text{ m}$:

$$\delta_{11} = \int_a^b M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \int_a^c M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \frac{1}{12} 1,0 \{4 - (1 - 0,2) 0,5 [2 + (2 - 0,5)^2]\} 18,0 = 6,9;$$

$$5. \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{1}{7,11477} = 0,14055;$$

6. und 7. Überzählige Schnittkraft $X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \beta_{11} \delta_{10}$.

a) Belastung (2a):

$$\delta_{10} = \int_0^l M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \xi^2 \xi' \frac{J_c}{J} d\xi; \quad \left(\xi^2 \frac{J_c}{J}\right) \xi' = \eta \xi' = \eta';$$

Numerische Integration nach Simpson [(181) und (182)] mit $p = 1,0 \text{ t/m}$, $l = 18,0 \text{ m}$; $\Delta x = 1,5 \text{ m}$: $\Sigma_3 = 2,41055$; $\Sigma_4 = 2,1444$.

$$\alpha) \quad \delta'_{10} = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \eta' d\xi = \frac{p l^3}{2} \frac{\Delta x}{3} \Sigma_3 = 195,25455;$$

¹ Tabellen 12 ff.: S. 175 mit $l_1 = l_2 = 18,0$; $n_1 = n_2 = 0,2$; $v_1 = v_2 = 0,25$ und Annahmen $a \div d$ für ζ nach

$$a) \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0; \quad \delta_{11} = \frac{1}{3} (l'_1 + l'_2) = 12,0;$$

$$b) \quad \frac{J_1}{J_a} = n_1; \quad \frac{J_2}{J_b} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{3 + 2 n_1}{15} l'_1 + \frac{3 + 2 n_2}{15} l'_2 = 8,16;$$

$$c) \quad \frac{J_a}{J_k} = n_1; \quad \frac{J_b}{J_k} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_a} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_b} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{2 + 3 n_1}{15} l'_1 + \frac{2 + 3 n_2}{15} l'_2 = 6,24;$$

$$d) \quad \frac{J_1}{J_k} = n_1; \quad \frac{J_2}{J_k} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l'_1}{12} \{4 - (1 - n_1) v_1 [2 + (2 - v_1)^2]\} + \frac{l'_2}{12} \{4 - (1 - n_2) v_2 [2 + (2 - v_2)^2]\} = 8,95.$$

$$\beta) \quad \delta_{10} = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \eta' d\xi = \frac{p l^2}{2} \frac{3}{8} \Delta x \Sigma_4 = 195,41210;$$

$$X'_1 = \frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = 27,46822 \text{ mt}; \quad X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 27,46569 \text{ mt}.$$

Die lineare Angleichung¹ der Funktion $\zeta = J_c/J$ zwischen den Querschnitten d und c liefert mit $M_0 = 162 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 40,5$ und $M_1 = 1,0$; $n = 0,2$:

$$\delta_{10} = \frac{1}{15} 1,0 \cdot 40,5 \{5 - (1 - 0,2) \frac{1}{4} (10 - 10 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{4})\} 18 = 187,11; \quad X_1 = 27,11739 \text{ mt}.$$

b) Belastung (2b).

Gleichung der Biegelinie δ_{m1} : $\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = -M \frac{J_c}{J} = -\xi \frac{J_c}{J} = -w_m$. Berechnung und Vergleich der Ergebnisse aus (206) und (207):

$\alpha)$

$$\mathfrak{B}'_0 = c/6 \cdot (2 w_0 + w_1),$$

$$\mathfrak{B}'_m = c/6 \cdot (w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}),$$

$$\mathfrak{B}'_n = c/6 \cdot (w_{n-1} + 2 w_n).$$

m	w_m	$2 w_0$ 4 w_m	$6/c \cdot \mathfrak{B}'_0$ $w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}$	$2 w_n$ $6/c \cdot \mathfrak{B}'_n$	\mathfrak{B}'_m
0	0,00000	0,00000	0,08333	—	0,02083
1	0,08333	0,33332	—	0,49999	0,12500
.

$\beta)$

$$\mathfrak{B}_0 = c/24 (7 w_0 + 6 w_1 - w_2),$$

$$\mathfrak{B}_m = c/12 (w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}),$$

$$\mathfrak{B}_n = c/24 (7 w_n + 6 w_{n-1} - w_{n-2}).$$

m	w_m	$7 w_0$ $w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}$ $7 w_n$	$6 w_1$ $6 w_{n-1}$	$24/c \mathfrak{B}_0$ $24/c \mathfrak{B}_m$	\mathfrak{B}_m
0	0,00000	0,00000	0,49998	0,33331	0,02083
1	0,08333	—	1,00000	—	0,12500
.

Die Untersuchung wird mit den genaueren Werten \mathfrak{B}_m fortgesetzt:

$$A_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m \xi'_m; \quad C_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m \xi_m; \quad \text{Probe: } A_w + C_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m; \quad M_w = \delta_{m1}; \quad X_1 = M_w/\delta_{11}.$$

m	\mathfrak{B}_m	ξ'_m	ξ_m	$\mathfrak{B}_m \xi'_m$	$\mathfrak{B}_m \xi$	Q_{wm}	$Q_{wm} c$	M_w	X_1 [mt]
a	(2,63180)	—	—	—	—	—	—	—	—
0	0,02083	1,00000	0,00000	0,02083	0,00000	—	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,12500	0,91667	0,08333	0,11458	0,01042	2,61097	3,91646	3,91646	0,55045
2	0,25000	0,83333	0,16667	0,20833	0,04167	2,48597	3,72896	7,64542	1,07455
.

¹ Mit den Annahmen über $\zeta = J_c/J$ im Sinne der Anmerkung auf S. 175, δ_{11} nach S. 177, $l_1 = l_2 = 18,0$, $n_1 = n_2 = 0,2$; $\varphi' = l_2/l_1 = 1,0$; und $p_1 = 1,0$ t/m ist:

a) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{1}{1 + \varphi'} = 20,25 \text{ mt};$ b) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{4 + n_1}{(3 + 2 n_1) + (3 + 2 n_2) \varphi'} = 25,0 \text{ mt};$

c) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{3 + 2 n_1}{(2 + 3 n_1) + (2 + 3 n_2) \varphi'} = 26,5 \text{ mt};$

d) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{3,61 + 0,38 n_1}{(2,734 + 1,266 n_1) + (2,734 + 1,266 n_2) \varphi'} = 25,0 \text{ mt};$

Lineare Annäherung¹ der Funktion $\zeta = J_c/J$ zwischen den Querschnitten d und c (Abb. 156):

$$X_1 = \delta_{m1}/\delta_{11} = \delta_{m1}/6,9;$$

$$P = 1 \text{ innerhalb der Voute: } \delta_{m1} = 10,8 \xi' \{5,75 - \xi' [(2 + \xi) + 4(1 - \xi^2)]\};$$

$$P = 1 \text{ außerhalb der Voute: } \delta_{m1} = 27,0 \xi [2(1 - \xi^2) - 0,3].$$

Zahlenwerte der Einflußordinaten:

	$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8
α) Funktion $\zeta = J_c/J$ nach Abb. 156 b (Fall e, Abb. 162)		1,27	2,17	2,35	1,55
β) lineare Annäherung zwischen d und c		1,27	2,17	2,30	1,53

c) Belastung (2c) und (2d)².

$$\alpha) \delta_{11} = 7,11477, \quad \Delta_a = 1,0 \text{ cm}, \quad \Delta_a = \Delta_b = 0, \quad C_1 = -\frac{2}{18,0}, \quad \delta_{1s} = -E J_c (C_1 \Delta_c).$$

Die virtuelle Arbeit ($C_1 \Delta_c$) ist für $C_1 = -\frac{2}{18}$ positiv, daher

$$\delta_{1s} = -2100000 \cdot 0,115 \left(\frac{2}{18} \cdot 0,01\right) = -268,3333;$$

$$X_{1s} = \delta_{1s}/\delta_{11} = -37,71497 \text{ mt};$$

β) $\Delta t = t_u - t_o = -10^\circ$; $\alpha_t = 10^{-5}$; Annahme $\alpha_t \cdot \Delta t/h = \text{const}$, $h = 1,3 \text{ m}$.

$$\delta_{1t} = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) = -2100000 \cdot 0,115 \cdot \frac{10^{-5} \cdot 10}{1,3} \cdot 18,0 = -334,3846;$$

$$X_{1t} = \delta_{1t}/\delta_{11} = -46,99865 \text{ mt}.$$

¹ Annahmen über $\zeta = J_c/J$ nach Anmerkung auf S. 175, $n = J_1/J$; $v_1 = v_1/l_1$:

$$a) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{6} (\xi - \xi^3); \quad b) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{15} \xi \xi' \left[\frac{n_1 + 4}{2} (1 + \xi) + (1 - n_1) \xi^2 (3 \xi' - 1) \right];$$

$$c) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{60} \xi \xi' (1 + \xi) [10 - 3(1 - n_1)(1 + \xi^2)];$$

d) P innerhalb der Voute:

$$\delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{12} \xi \xi' \left\{ 4 - (1 - n_1) [v_1 (2 + (2 - v_1)^2)] - \xi' \left[2 n_1 (2 + \xi) + \frac{1 - n_1}{v_1} (1 - \xi^2) \right] \right\};$$

P außerhalb der Voute:

$$\delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{12} \xi [2(1 - \xi^2) - (1 - n_1) v_1^2 (2 - v_1)];$$

Gleichung der Einflußlinie für X_1 :

$$(P = 1; l_1 = l_1' = 18,0 \quad n_1 = 0,2;$$

$$v_1 = 0,25; \delta_{11} \text{ Seite 177}).$$

$$a) X_1 = 4,5 \omega_D;$$

$$b) X_1 = 5,56 \omega_D + 2,12 \xi^3 (2 - 5 \xi + 3 \xi^2);$$

$$c) X_1 = 8,65 \omega_D (0,76 - 0,24 \xi^2);$$

d) P innerhalb der Voute:

$$X_1 = 3,02 \xi' \{2,98 - \xi' [0,4(2 + \xi) + 3,2(1 - \xi^2)]\};$$

P außerhalb der Voute:

$$X_1 = 3,02 \xi [2(1 - \xi^2) - 0,088].$$

Zahlenwerte der Einflußordinaten (Abb. 162):

$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8
a	0,864	1,512	1,728	1,296
b	1,077	1,933	2,172	1,512
c	1,250	2,100	2,240	1,510
d	1,110	1,920	2,160	1,530

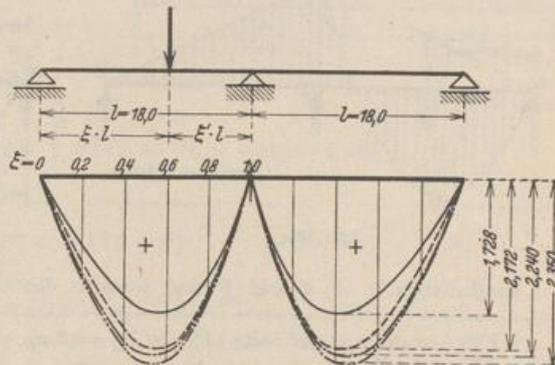


Abb. 162.

Fall a: —
 Fall b und d: - - - -
 Fall c:
 Fall e: $\zeta(x)$ nach Abb. 156 b. - - - - -
 - Einflußlinie für X_1 .

² Mit $\alpha_t \Delta t/h = \text{const}$ ist δ_{1t} ebenso wie δ_{1s} unabhängig von $\zeta = J_c/J$. Daher ist für alle Querschnittsänderungen:

$$X_{1s} = E J_c \left[\frac{\Delta_a}{l_1} + \frac{\Delta_b}{l_2} - \Delta_c \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \frac{1}{\delta_{11}}; \quad X_{1t} = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Lineare Annäherung der Funktion $\zeta = J_c/J$ nach Seite 177:

$$X_{1s} = -\frac{268,3333}{6,9} = -38,8889 \text{ mt}, \quad X_{1t} = -\frac{334,3846}{6,9} = -48,46153 \text{ mt}.$$

8. Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Systems. Die Stütz- oder Schnittkraft K des einfach statisch unbestimmten Systems ist nach (339): $K = K_0 - X_1 \cdot K_1$. Die Kräfte K_0 und K_1 sind in Abb. 161 angegeben.

a) Belastung (2a) (Abb. 163).

$$\begin{aligned} A &= 9,0 - 27,47 \frac{1}{18,0} = 7,47 \text{ t}, & \text{Feld } AC: & \begin{cases} Q = 18,0(0,415 - \xi), \\ M = 1,62\xi(0,83 - \xi), \end{cases} \\ C &= 9,0 + 27,47 \frac{2}{18,0} = 12,06 \text{ t}, & \text{Feld } BC: & \begin{cases} Q = 1,53, \\ M = -27,47\xi, \end{cases} \\ B &= 0,0 - 27,47 \frac{1}{18,0} = -1,53 \text{ t}, \end{aligned}$$

Grenzwerte von M : $Q = 0$ für $\xi = 0,415$: $M_{\max} = 27,9 \text{ mt}$;
 $Q = 0$ für $\xi = 1,0$: $M_{\min} = -27,47 \text{ mt}$;

b) Belastung (2b) (Abb. 164).

$$A = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0}; \quad C = \xi_m + X_1 \frac{2}{18,0}; \quad B = -X_1 \frac{1}{18,0}.$$

M und Q für den Schnitt $x = \xi l$.

$$\text{Feld } AC: \begin{cases} 0 < \xi < \xi_m: & Q = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0}; & M = \xi(18,0 \xi'_m - X_1); \\ \xi_m < \xi < 1,0: & Q = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0} - 1; & M = \xi \left(18,0 \frac{\xi'_m \xi_m}{\xi} - X_1 \right); \end{cases}$$

$$\text{Feld } BC: \quad Q = +X_1 \frac{1}{18,0}; \quad M = -\xi X_1.$$

Grenzwerte von M : $Q = 0$ für $\xi = \xi_m$: $M_{\max} = \xi_m(18,0 \xi'_m - X_1)$;
 $Q = 0$ für $\xi = 1,0$: $M_{\max} = -X_1$;

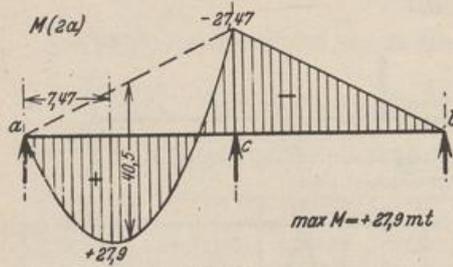


Abb. 163.

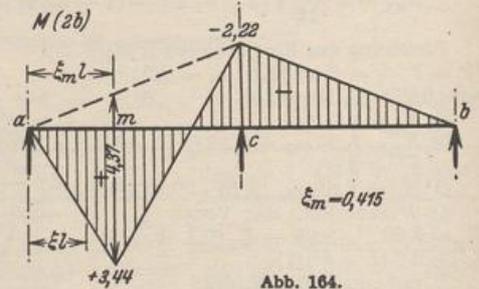


Abb. 164.

Einflußlinien¹: A , C und B sind zugleich die Gleichungen der Einflußlinien der Stütz-

¹ Für Annahme a) auf Seite 175 mit $X_1 = 4,5 \omega_D$ werden die folgenden Einflußlinien erhalten (Abb. 165 und 166):

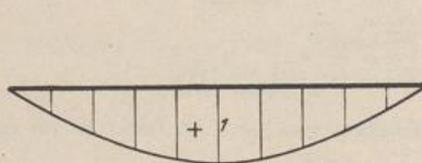


Abb. 165.
Einflußlinie für C .

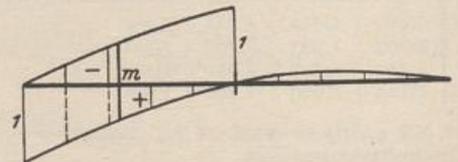


Abb. 166.
Einflußlinie für Q_m und A .

kräfte. Einflußlinien für Q_m und M_m im Schnitt m :

Feld AC: $0 < \xi < \xi_m : Q_m = -\xi - X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = \xi_m \left(18,0 \frac{\xi'_m \xi}{\xi_m} - X_1 \right);$

$\xi_m < \xi < 1 : Q_m = -1 - \xi - X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = \xi_m (18,0 (1 - \xi) - X_1);$

Feld CB: $Q_m = +X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = -\xi_m X_1.$

c) Belastungsfall (2c) und (2d):

	A t	C t	B t	Feld AC		Feld BC	
				Q [t]	M [mt]	Q [t]	M [mt]
K_s	+ 2,10	- 4,20	+ 2,10	+ 2,1	+ 37,71 ξ	- 2,1	+ 37,71 ξ
K_t	+ 2,23	- 4,46	+ 2,23	+ 2,23	+ 40,05 ξ	- 2,23	+ 40,05 ξ

9. Die Schnittkräfte des Stabwerkes ergeben Verschiebungen, die mit den Stützenbedingungen verträglich sein müssen. Dies wird nach (335) geprüft durch:

$$\tau = \int M^{(a)} \bar{M}^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 0.$$

Die Funktionen $\bar{M}^{(0)}$ aller hierfür geeigneten Ansätze zur Nachprüfung der gegenseitigen Verdrehung τ der Ufer eines beliebigen Querschnitts k (Abb. 168 a), der Ufer des Stützenquerschnittes c (Abb. 168 b) oder der Durchbiegungen $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ (Abb. 168 c) unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor μ .

$$\bar{M}^{(0)} = \mu \xi, \quad \tau = 0 = \int M^{(a)} \xi \frac{J_c}{J} ds.$$

Belastung (2a):

$M^{(a)}$ wird als Funktion von ξ angeschrieben. Numerische Integration nach Simpson mit J_c/J nach 1. S. 175

$$\tau = \int_0^1 \left(A \xi l - \frac{p \xi^2 l^2}{2} \right) \xi \frac{J_c}{J} d\xi + \int_0^1 B \xi l \xi \frac{J_c}{J} d\xi = 9,649 - 9,649 = 0,0.$$

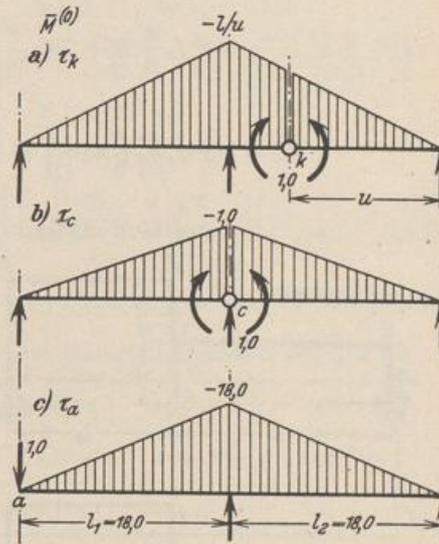


Abb. 168.

$$C = C_0 + 2 \frac{X_1}{l} = \xi + \frac{2 \cdot 4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = \frac{1}{2} (3\xi - \xi^3); \quad M_m = M_{0m} - \xi_m X_1;$$

$$Q_m = Q_{0m} - \frac{X_1}{l} = \begin{cases} -\xi - \frac{4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = -\frac{1}{4} \xi (5 - \xi^2) & \text{links von } m; \\ +1 - \xi - \frac{4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = 1 - \frac{1}{4} \xi (5 - \xi^2) & \text{rechts von } m. \end{cases}$$

Es soll die Einflußlinie für dasjenige Feldmoment berechnet werden, das bei gleichförmiger Belastung am größten wird. An dieser Stelle ist (Fall a):

$$M_m = \begin{cases} \xi'_m l \xi - \xi_m X_1 & \text{links von } m \text{ (Abb. 167),} \\ \xi_m l \xi' - \xi_m X_1 & \text{rechts von } m, \end{cases}$$

$$Q_m = 0 = \frac{p l}{16} (7 - 16 \xi_m); \quad \xi_m = \frac{7}{16}.$$

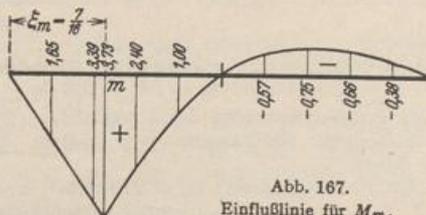


Abb. 167.
Einflußlinie für M_m .

Belastung (2c) und (2d):
 Die Verschiebungen aus Temperatur und Stützensenkung im Hauptsystem und aus den zugeordneten überzähligen Schnittkräften sind nach Abb. 168:

$$\tau = \tau_t + \tau_{ot} = 0; \quad \tau = \tau_s + \tau_{os} = 0;$$

$$\tau = 2 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi d\xi + 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 0,$$

$$0 = \frac{1}{2} E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} + X_1 \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 9,28846 - 9,28846,$$

$$\tau_s = \tau_o + \tau_b = E J_c \left\{ \frac{1}{l} \Delta_c + \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{l} \right) \Delta_c \right\}; \quad \tau_{os} = 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi,$$

$$\tau = E J_c \frac{2}{u} \Delta_c + 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 0,$$

$$0 = E J_c \Delta_c + X_1 l^2 \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 2415,0 - 2414,9999;$$

Dreifach statisch unbestimmtes System.

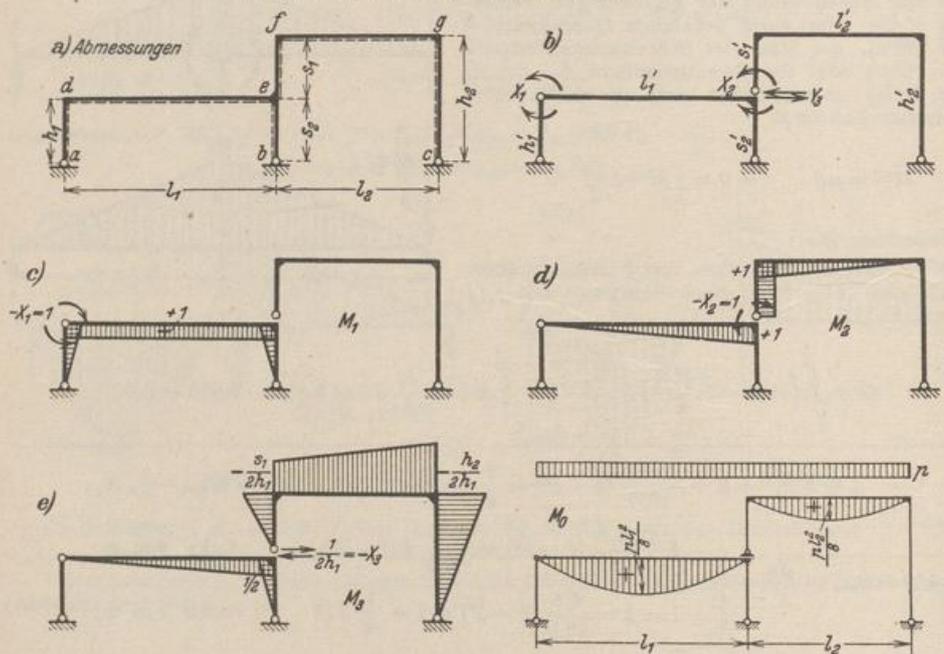


Abb. 169.

1. Geometrische Grundlagen: Abmessungen (Abb. 169a): $l_1 = 15,0 \text{ m}$; $l_2 = 12,0 \text{ m}$; $h_1 = s_1 = s_2 = 4,5 \text{ m}$; $h_2 = 2h_1 = 9,0 \text{ m}$.
 J_c Trägheitsmoment des Riegels $\bar{d}e$.
 Reduzierte Stablängen: $l'_1 = 15,0 \text{ m}$; $l'_2 = 18,0 \text{ m}$; $h'_1 = 27,0 \text{ m}$; $h'_2 = 18,0 \text{ m}$; $s'_1 = 9,0$; $s'_2 = 9,0 \text{ m}$.
 Materialkonstanten: $E_s = 210 \text{ t/cm}^2$; $\alpha_t = 0,00001$.
2. Belastung: Gleichförmig verteilte Belastung der beiden Riegel mit $p \text{ t/m}$.

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Als überzählige Größen wird neben den beiden Eckmomenten X_1 und X_2 , $X_3 = Y_3/2h_1$ verwendet, um die Zahlenrechnungen zu vereinfachen (Abb. 169b).

Ansatz zur Berechnung der überzähligen Kräfte:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} = \delta_{1\otimes},$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s} = \delta_{2\otimes},$$

$$X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = \delta_{30} + \delta_{3t} + \delta_{3s} = \delta_{3\otimes}.$$

4. Die Vorzahlen werden nach (300) berechnet. Der Anteil der Quer- und Längskräfte wird nach Seite 92 und 159 vernachlässigt.

$$\delta_{11} = \frac{h'_1}{3} + \frac{s'_2}{3} + l'_1 = \frac{27}{3} + \frac{9}{3} + 15 = 27,00;$$

$$\delta_{22} = \frac{l'_1}{3} + \frac{l'_2}{3} + s'_1 = \frac{15}{3} + \frac{18}{3} + 9 = 20,00;$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{l'_1}{3} + \frac{s'_2}{3} + \frac{s'_1}{3} \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 + \frac{h'_2}{3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{l'_2}{3} \left[\left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 + \frac{s_1}{h_1} \frac{h_2}{h_1} + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{15}{3} + \frac{9}{3} + \frac{9}{3} \left(\frac{4,5}{4,5} \right)^2 + \frac{18}{3} \left(\frac{9}{4,5} \right)^2 + \frac{18}{3} \left[\left(\frac{4,5}{4,5} \right)^2 + \frac{4,5}{4,5} \cdot \frac{9}{4,5} + \left(\frac{9}{4,5} \right)^2 \right] \right\} \\ &= 19,25; \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \frac{l'_1}{2} = \frac{15}{2} = 7,50; \quad \delta_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{l'_1}{2} + \frac{s'_2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + \frac{9}{3} \right) = 5,25;$$

$$\begin{aligned} \delta_{23} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{l'_1}{3} - \frac{s'_1}{2} \frac{s_1}{h_1} - \frac{l'_2}{6} \cdot \left(2 \frac{s_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{15}{3} - \frac{9}{2} \frac{4,5}{4,5} - \frac{18}{6} \left(2 \cdot \frac{4,5}{4,5} + \frac{9}{4,5} \right) \right\} \\ &= -5,75. \end{aligned}$$

Matrix der Elastizitätsgleichungen und Abschätzung der Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes nach (331):

	X_1	X_2	X_3		Matrix der Unterdeterminanten D_{ik} aus 5.			
(1)	27,00	7,50	5,25	δ_{10}	(1)	351,9375	-174,5625	-148,125
(2)	7,50	20,00	-5,75	δ_{20}	(2)	-174,5625	492,1875	194,625
(3)	5,25	-5,75	19,25	δ_{30}	(3)	-148,125	194,625	483,75

Matrix der Produkte $\delta_{ik} D_{ik}$

(1)	9502,313	-1309,219	-777,656	$\sum_k \delta_{1k} D_{1k} = 11589,188,$
(2)	-1309,219	9843,750	-1119,094	$\sum_k \delta_{2k} D_{2k} = 12272,063,$
(3)	-777,656	-1119,094	9312,188	$\sum_k \delta_{3k} D_{3k} = 11208,938.$

Mit $D' = 7415,438$ aus 5. und $\sum_i \sum_k |\delta_{ik} D_{ik}| = 35070,189$ wird

$$\varphi = (\pm p) \frac{\sum |\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} = (\pm p) \frac{35070,189}{7415,438} = (\pm p) 4,73.$$

Für einen mittleren Fehler $\pm p = 0,01$ der Vorzahlen δ_{ik} ist der mögliche Fehler von X_k aus der Nennerdeterminante ca. $0,05 \cdot X_k$.

5. Konjugierte Matrix β_{ik} . Die Vorzahlen β_{ik} werden nach Seite 166 als Quotient zweier Determinanten berechnet. Dabei wird die Nennerdeterminante nach (352) mit 3 verschiedenen Ansätzen angeschrieben:

$$\begin{aligned} D &= 27(20 \cdot 19,25 - 5,75^2) - 7,5(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75) + 5,25(-7,5 \cdot 5,75 - 20 \cdot 5,25) \\ &= -7,5(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75) + 20(27 \cdot 19,25 - 5,25^2) + 5,75(-27 \cdot 5,75 - 7,5 \cdot 5,25) \\ &= 5,25(-7,5 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 20) + 5,75(-27 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 7,5) + 19,25(27 \cdot 20 - 7,5^2) \\ &= 7415,4375 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \alpha) \beta_{k1}: \delta_{10} = 1; \delta_{20} = 0; \delta_{30} = 0: \\ \beta_{11} = \frac{1 \cdot (20 \cdot 19,25 - 5,75^2)}{7415,4375} = 0,0474601, \\ \beta_{21} = \frac{-1(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75)}{7415,4375} = -0,0235404, \\ \beta_{31} = \frac{1(-7,5 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 20)}{7415,4375} = -0,0199752, \\ \beta) \beta_{k2}: \delta_{10} = 0; \delta_{20} = 1; \delta_{30} = 0: \\ \beta_{22} = \frac{1 \cdot (27 \cdot 19,25 - 5,25^2)}{7415,4375} = 0,0663734, \\ \beta_{32} = \frac{(27,0 \cdot 5,75 + 7,5 \cdot 5,25)}{7415,4376} = 0,0262459, \\ \gamma) \beta_{k3}: \delta_{10} = 0; \delta_{20} = 0; \delta_{30} = 1: \\ \beta_{33} = \frac{+1(27 \cdot 20 - 7,5^2)}{7415,4375} = 0,0652355. \end{array}$$

Kontrolle (356): Die Werte β_{ik} erfüllen den Ansatz (351) identisch, z. B. ist

$$\begin{aligned} \beta_{11}\delta_{11} + \beta_{21}\delta_{12} + \beta_{31}\delta_{13} &= 0,0474601 \cdot 27 - 0,0235404 \cdot 7,5 - 0,0199752 \cdot 5,25 = 0,9999999 \approx 1, \\ \beta_{11}\delta_{21} + \beta_{21}\delta_{22} + \beta_{31}\delta_{23} &= 0,0474601 \cdot 7,5 - 0,0235404 \cdot 20 + 0,0199752 \cdot 5,75 = 0,0000001 \approx 0, \\ \beta_{11}\delta_{31} + \beta_{21}\delta_{32} + \beta_{31}\delta_{33} &= 0,0474601 \cdot 0,25 + 0,0235404 \cdot 5,75 - 0,0199752 \cdot 19,25 = 0,0000002 \approx 0. \end{aligned}$$

6. Belastungszahlen nach (300) (Abb. 169):

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{12} = p \cdot \frac{15^2}{12} = 281,25 p; \\ \delta_{20} &= \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{24} + \frac{p \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{24} = p \left[\frac{281,25}{2} + \frac{12^2 \cdot 18}{24} \right] = 248,625 p; \\ \delta_{30} &= \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{2 \cdot 24} - \frac{p \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{24} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{s_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) = p \left[\frac{281,25}{2 \cdot 2} - \frac{108}{2} \left(\frac{4,5}{4,5} + \frac{9}{4,5} \right) \right] = -91,6875 p. \end{aligned}$$

7. α) Ansatz der überzähligen Größen als Funktionen der Belastungszahlen:

$$\begin{aligned} X_1 &= +0,0474601 \delta_{10} - 0,0235404 \delta_{20} - 0,0199752 \delta_{30}, \\ X_2 &= -0,0235404 \delta_{10} + 0,0663734 \delta_{20} + 0,0262459 \delta_{30}, \\ X_3 &= -0,0199752 \delta_{10} + 0,0262459 \delta_{20} + 0,0652355 \delta_{30}. \end{aligned}$$

β) Lösung für die Belastungszahlen $\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}$ aus 6.:

$$X_1 = +9,3269 p; \quad X_2 = +7,4746 p; \quad X_3 = -5,0739 p.$$

8. Superposition der Belastung p und der überzähligen Schnittkräfte zur Bildung der Stütz-

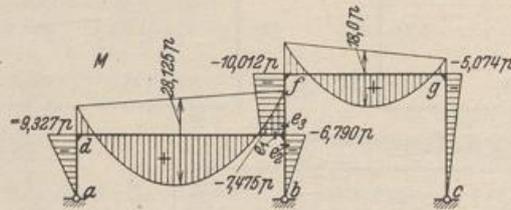


Abb. 170.

und Schnittkräfte nach (350). Schnittkräfte im Hauptssystem nach Abb. 169. Momente M in den Schnitten e_1, e_2, e_3 (Abb. 170):

$$\begin{aligned} M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3, \\ M_{e,1} &= -9,327 p \cdot 1,0 - 7,475 p \cdot 1,0 + 5,074 p \cdot \frac{1}{2} = -14,265 p \text{ [mt]}, \\ M_{e,2} &= -9,327 p \cdot 1,0 + 5,074 p \cdot \frac{1}{2} = -6,790 p \text{ [mt]}, \\ M_{e,3} &= -7,475 p \cdot 1,0 = -7,475 p \text{ [mt]}. \end{aligned}$$

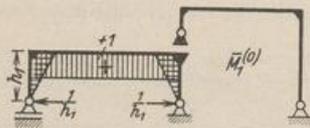


Abb. 171 a.

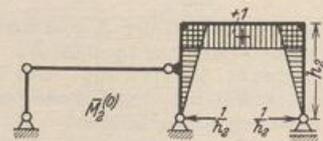


Abb. 171 b.

9. Der Spannungszustand mit X_1, \dots, X_3 nach (350) erfüllt die Stützenbedingungen. Daher sind die gegenseitigen Verschiebungen τ_1 und τ_2 der Stützpunkte a, b und b, c für die Ergebnisse

in (8) und Abb. 171 Null. Nachweis durch

$$1 \tau'_1 = \int M^{(3)} \bar{M}_1^{(3)} \frac{J_e}{J} ds = \int M^{(3)} \bar{M}_1^{(0)} \frac{J_e}{J} ds, \quad 1 \tau'_2 = \int M^{(3)} \bar{M}_2^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \quad (\text{Abb. 171 a, b}).$$

$$1 \tau'_1 = -\frac{1}{8} \cdot 9,3269 \cdot 27 - \frac{1}{8} \cdot 6,7899 \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 28,125 - 15 \cdot 11,7957 = -0,002.$$

$$1 \tau'_2 = +\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,7899 \cdot 9 - \frac{1}{8} [\frac{1}{2} (2 \cdot 7,4746 + 10,0116) + 1 (7,4746 + 20,0232)] \cdot 9 = 0,004,$$

$$\tau_1 = \tau'_1 \cdot h_1 = -0,002 \cdot 4,5 = -0,009 \approx 0,0; \quad \tau_2 = \tau'_2 \cdot h_2 = 0,004 \cdot 9,0 = 0,036 \approx 0,0.$$

Der Fehler in der Berechnung der Schnittkräfte kann wie in Abschnitt 25, S. 169 bestimmt werden.

27. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Tragwerks und Symmetrie oder Antimetrie der Belastung.

Je mehr statisch überzählige Schnittkräfte zur Berechnung eines statisch unbestimmten Tragwerks notwendig sind, um so ungünstiger ist die gegenseitige Abhängigkeit für die Fehlerempfindlichkeit und damit auch für die Brauchbarkeit der Lösung. Man versucht daher die gegenseitige Verknüpfung unabhängig von der Größe der einzelnen statisch unbestimmten Schnittkräfte durch Symmetriebetrachtungen über den vorhandenen Spannungs- und Verschiebungszustand des Tragwerks zu klären und damit die Lösung zu vereinfachen.

Die Symmetrie des Tragwerks ist durch die Anzahl der Symmetrieachsen bestimmt. Man unterscheidet die Symmetrie zu einer Achse, zu mehreren Achsen und zyklische Symmetrie. Die äußeren Kräfte des Tragwerks können symmetrisch oder antimetrisch zu einer Achse zugeordnet oder in allgemeiner Form vorgeschrieben sein. Symmetrie oder Antimetrie der äußeren Kräfte bedeuten

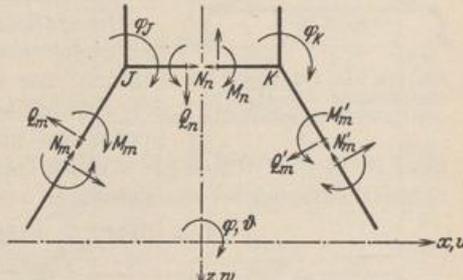


Abb. 172.

auch Symmetrie oder Antimetrie des Spannungs- und Verschiebungszustandes, so daß die Komponenten von Schnittkraft und Verschiebung in symmetrisch zugeordneten Querschnitten gleich groß oder entgegengesetzt gleich sind und einzelne Komponenten in den Querschnitten der Achsen ausgezeichnete Werte annehmen.

Bei Symmetrie der Belastung sind die Längskräfte N , die Biegemomente M und die Verschiebungen w parallel zur Achse in symmetrisch zugeordneten Querschnitten m, m' gleich groß, die Querkraft Q , die Verschiebungen u senkrecht zur Achse und die Verdrehungen φ entgegengesetzt gleich (Abb. 172). Für die Querschnitte n in der Symmetrieachse sind die Querkraft Q , die Verschiebungen u senkrecht zur Achse und die Drehwinkel φ Null oder entgegengesetzt gleich, die Glieder der ersten Gruppe (N, M, w) erhalten ausgezeichnete Werte.

Bei Antimetrie der Belastung sind die Querkraft Q , die Verschiebungen u senkrecht zur Achse und die Verdrehungen φ in symmetrisch zugeordneten Querschnitten m, m' gleich groß, die Längskräfte N , die Biegemomente M und die Verschiebungen w parallel zur Achse entgegengesetzt gleich. Für die Querschnitte n in der Symmetrieachse sind die Längskräfte N , die Biegemomente M und die Verschiebungen w parallel zur Achse Null oder entgegengesetzt gleich, die Glieder der zweiten Gruppe (Q, u, φ) erhalten ausgezeichnete Werte.

Damit sind bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung eines durch Achsen ausgezeichneten Tragwerks einzelne Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Die Anzahl der statisch überzähligen Schnittkräfte wird

dadurch kleiner, das Stabwerk zerfällt in Abschnitte, deren statische und geometrische Randbedingungen zum Teil bekannt sind. Die Nullstellen der Biegemomente erhalten die Bedeutung von Gelenken, die Nullstellen der Quer- und Längskräfte diejenige von Führungen. Die statische Untersuchung eines mehrteiligen Stabwerks wird daher bei symmetrischer oder antimetrischer Belastung zu einer oder mehreren Achsen des Tragwerks auf einen Abschnitt mit wenigen statisch unbestimmten Schnittkräften beschränkt (Abschnitt 26).

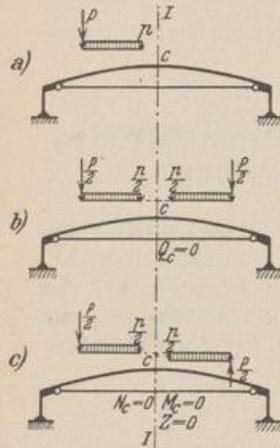


Abb. 173. Abb. 173 b: Symmetrische Belastung $(1)P$, Abb. 173 c: Antimetrische Belastung $(2)P$.

Die Belastungsumordnung. Um die Rechnung bei einer allgemeinen Belastung P des Tragwerks in derselben Weise zu vereinfachen, wird diese nach dem Superpositionsgesetz (284) in einzelne Anteile zerlegt, die zu jeder Achse symmetrisch oder antimetrisch sind. Sie zerfällt bei einer Symmetrieachse in zwei $(1)P, (2)P$, bei zwei Symmetrieachsen in vier Gruppen $(1)P, \dots (4)P$, die zu jeder Achse entweder symmetrisch oder antimetrisch sind, also einen symmetrischen oder antimetrischen Spannungs- und Verschiebungszustand mit den Eigenschaften auf S. 185 hervorrufen. Auch bei Systemen mit mehr als zwei Symmetrieachsen ist keine andere als die Umordnung nach diesen vier Gruppen möglich.

Die statische Untersuchung mehrteiliger Tragwerke mit ausgezeichneten Achsen beginnt daher stets mit der Umordnung der vorgeschriebenen allgemeinen Belastung und der Beschreibung der ausgezeichneten Eigenschaften des Spannungs- und Verschiebungszustandes jeder Teilbelastung.

$P \equiv (1)P, \dots (4)P$. Sie schließt mit der Superposition der Teilergebnisse für die Schnittkräfte und Verschiebungen aus

$$M \equiv (1)M, \dots (4)M, \quad w \equiv (1)w, \dots (4)w.$$

Anwendungen.

a) Der Bogenträger mit Zugband Abb. 173 ist nach einer Achse symmetrisch und für die vorgeschriebene Belastung P vierfach statisch unbestimmt. Die Be-

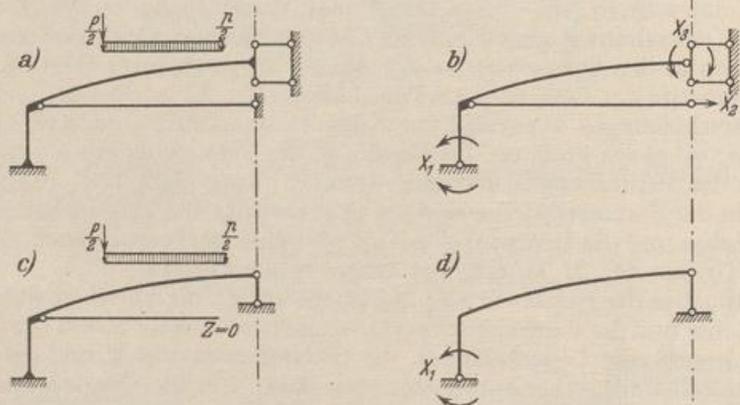


Abb. 174.

lastung zerfällt daher in die Anteile $(1)P, (2)P$. Die Belastung $(1)P$ ist zur Achse I symmetrisch und daher $Q_e = 0$ und $\varphi_e = 0$. Das Tragwerk ist für die symmetrische Belastung dreifach statisch unbestimmt. Die Berechnung wird auf den linken Trägerabschnitt Abb. 174a mit dem Hauptsystem Abb. 174b beschränkt.

Die Belastung $^{(2)}\mathfrak{P}$ ist zur Achse I antimetrisch und daher $M_c = 0, N_c = 0, w_c = 0, Z = 0$. Das Tragwerk ist für die antimetrische Belastung einfach statisch unbestimmt. Es zerfällt für die Berechnung nach S. 185 in zwei Abschnitte Abb. 174c mit dem Hauptssystem Abb. 174d.

b) Der Rahmenträger Abb. 175a ist nach zwei Achsen I, II symmetrisch und für die vorgeschriebene Belastung \mathfrak{P} neunfach statisch unbestimmt. Sie wird in 4 Anteile ungeordnet, die zu den Achsen I, II symmetrisch oder antimetrisch sind und bei der Überlagerung \mathfrak{P} liefern $^{(1)}\mathfrak{P}, ^{(2)}\mathfrak{P}, ^{(3)}\mathfrak{P}, ^{(4)}\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}$. Dasselbe gilt daher nach dem Superpositionsgesetz auch für die Schnittkräfte $^{(1)}M, \dots, ^{(4)}M \equiv M$ und für die Verschiebungen $^{(1)}w, \dots, ^{(4)}w \equiv w$.

1. Belastung $^{(1)}\mathfrak{P}$ symmetrisch zu beiden Achsen (Abb. 175b). Die Querkräfte Q und die Verdrehungen φ der sechs Querschnitte $a \dots f$ sind Null. Der Spannungs- und Verschiebungszustand ist daher durch Abb. 176a bestimmt. Der Abschnitt des Stabwerks ist dreifach statisch unbestimmt. Die überzähligen Größen werden nach Abb. 176b berechnet.

2. Belastung $^{(2)}\mathfrak{P}$ symmetrisch zur Achse I , antimetrisch zur Achse II mit $Q = 0, \varphi = 0$ in den Querschnitten c, d und $M = 0, N = 0, u = 0$ in den Querschnitten a, b, e, f (Abb. 175c). Das Tragwerk ist jetzt zweifach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte und Verschiebungen werden aus Abb. 177a mit Abb. 177b als Hauptssystem abgeleitet.

3. Belastung $^{(3)}\mathfrak{P}$ antimetrisch zur Achse I symmetrisch zur Achse II mit $M = 0, N = 0, w = 0$ in den Querschnitten c, d und $Q = 0, \varphi = 0$ in den Querschnitten a, b, e, f (Abb. 175d). Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte und Verschiebungen werden aus Abb. 178a mit Abb. 178b als Hauptssystem abgeleitet.

4. Belastung $^{(4)}\mathfrak{P}$ antimetrisch zu den Achsen I, II mit $M = 0, N = 0, w = 0$ in den Querschnitten c, d und $M = 0, N = 0, u = 0$ in den Querschnitten a, b, e, f (Abb. 175e). Das Tragwerk ist einfach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte und Verschiebungen werden aus Abb. 179a mit Abb. 179b als Hauptssystem abgeleitet.

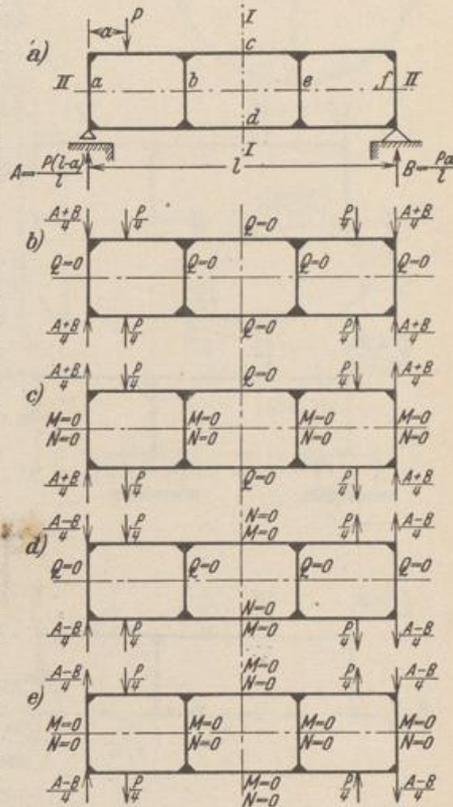


Abb. 175. Die Abb. 175 b, c, d, e zeigen die Belastungsanteile $^{(1)}\mathfrak{P}, ^{(2)}\mathfrak{P}, ^{(3)}\mathfrak{P}, ^{(4)}\mathfrak{P}$.

Der Abschnitt 51 über die Berechnung der Stockwerkrahmen enthält ein ausführliches Zahlenbeispiel.

c) Der Kreisring Abb. 180a besitzt konstanten Querschnitt F, J . Er ist durch n gelenkig angeschlossene Zugglieder F_z in n gleichgroße Sektoren unterteilt und rotationssymmetrisch durch p belastet.

Spannungs- und Verschiebungszustand sind in bezug auf n Achsen symmetrisch. In den Symmetriequerschnitten sind die Drehwinkel Null, die Querkräfte Null oder entgegengesetzt gleich. Die Untersuchung kann daher auf einen Kreissektor beschränkt werden, dessen Anschlußquerschnitte keine Verdrehung, dessen Spitzen keine Verschiebung erleiden. Damit sind zwei Bedingungen gegeben, aus denen das Biegemoment X_1 und die Längskraft X_2 berechnet werden können.

1. Hauptssystem mit den überzähligen Schnittkräften X_1, X_2 nach Abb. 180b.

2. Ansatz: $X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \delta_{10}$, $X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = \delta_{20}$.
 Belastungszustand: $-X_1 = 1, M_1 = 1$; $-X_2 = 1, M_2 = y/2 \sin(\pi/n)$ (Abb. 180c).

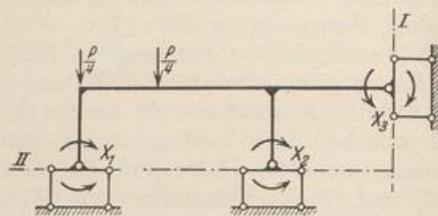
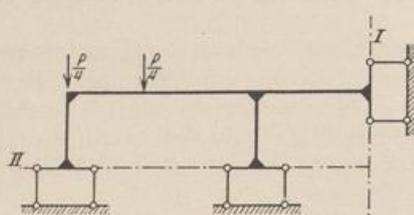


Abb. 176 a und b.

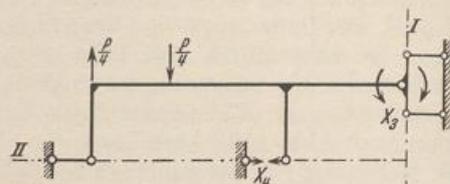
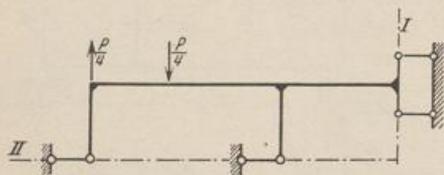


Abb. 177 a und b.

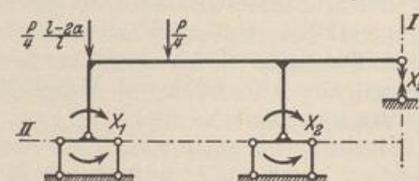
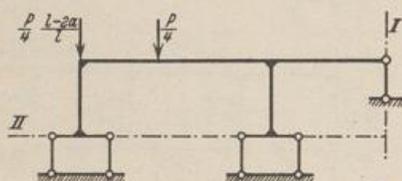


Abb. 178 a und b.

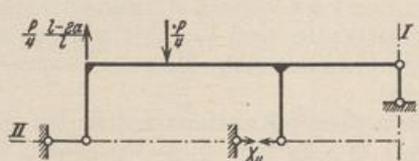
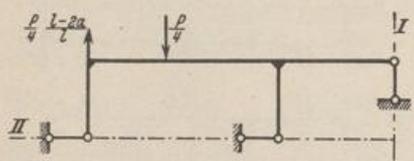


Abb. 179 a und b.

3. Vorzahlen (Tab. 16):

$$\delta_{11} = \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} M_1^2 ds = l^2 \cdot \frac{2\pi r}{n} = 2r \frac{\pi}{n}; \quad \delta_{12} = \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} \frac{1}{2} \frac{y}{\sin \pi/n} ds = \frac{r}{2 \sin \pi/n} \left(\frac{l}{b} - \frac{e}{r} \right) b;$$

$$\delta_{12} = r^2 \left(1 - \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right); \quad \delta_{22} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{J}{0,5 \cdot F_s} r + \frac{J}{F} \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} N_2^2 ds + \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} M_2^2 ds,$$

$$\delta_{22} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{J}{0,5 F_s} r + \frac{J}{F} \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} \frac{\cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \pi/n} r d\varphi + \frac{1}{4 \sin^2 \pi/n} \cdot \frac{r^2}{2} \left(1 + 2 \frac{e^2}{r^2} - \frac{3el}{br} \right) b$$

$$= r \frac{J}{F_s} + \frac{r}{4} \cdot \frac{J}{F} \left(\frac{\pi/n}{\sin^2 \pi/n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right) + \frac{\pi}{n} \cdot \frac{r^3}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \pi/n} + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} - 3 \frac{n}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right).$$

4. Belastungsglieder: $M_0 = 0$; $N_0 = pr$.

$$\delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = \frac{J}{F} \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} N_0 N_2 r d\varphi = \frac{J}{F} \int_{-\pi/n}^{+\pi/n} pr \frac{\cos \varphi}{2 \sin \pi/n} r d\varphi = pr^2 \frac{J}{F}.$$

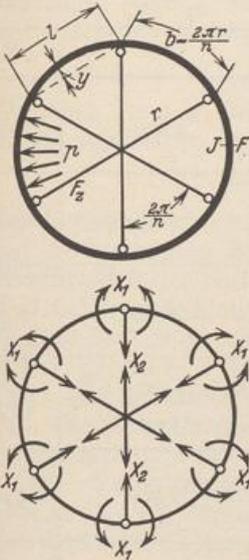


Abb. 180a bis c.

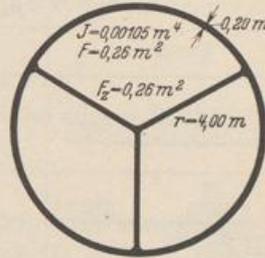
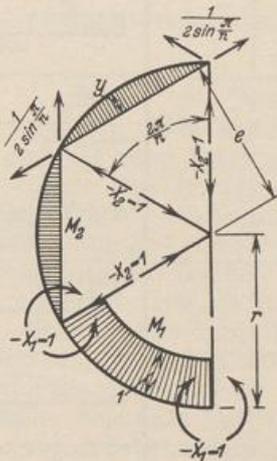


Abb. 181.

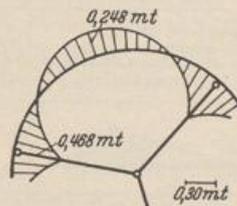


Abb. 182.

5. Auflösung des Ansatzes für $\delta_{10} = 0$: $X_1 = -X_2 \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$, $X_2 = \frac{\delta_{20}}{\delta_{22} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{11}}}$,

$$X_2 = pr \frac{\frac{J}{F}}{\frac{J}{F_2} + \frac{r^2}{4} \left[\left(\frac{\pi/n}{\sin^2 \pi/n} + \text{ctg} \frac{\pi}{n} \right) \left(1 + \frac{J}{F r^2} \right) - 2 \frac{n}{\pi} \right]},$$

$$X_1 = -\frac{pr^2}{2} \frac{\frac{J}{F} \left(\frac{n}{\pi} - \text{ctg} \frac{\pi}{n} \right)}{\frac{J}{F_2} + \frac{r^2}{4} \left[\left(\frac{\pi/n}{\sin^2 \pi/n} + \text{ctg} \frac{\pi}{n} \right) \left(1 + \frac{J}{F r^2} \right) - 2 \frac{n}{\pi} \right]}.$$

Zahlenbeispiel (Abb. 181).

$p = 10,00 \text{ t/m}$, $J = 0,00105 \text{ m}^4$, $r = 4,00 \text{ m}$, $F = F_2 = 0,26 \text{ m}^2$, $n = 3$.

J , F und F_2 sind ideale Querschnittsgrößen.

$$X_1 = -0,468 \text{ mt}, \quad X_2 = +0,620 \text{ t}.$$

Der Verlauf der Momente ist in Abb. 182 dargestellt.

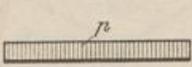
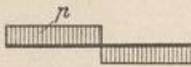
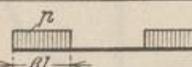
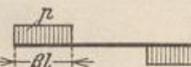
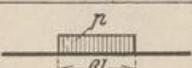
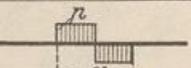
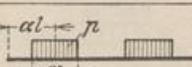
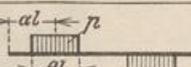
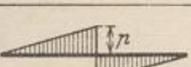
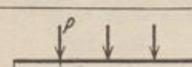
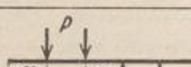
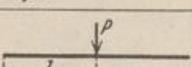
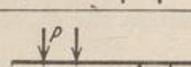
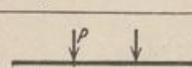
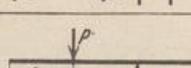
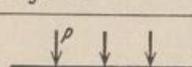
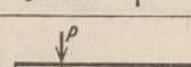
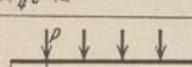
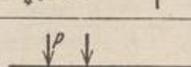
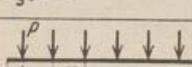
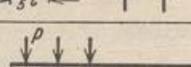
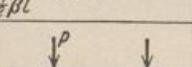
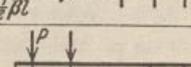
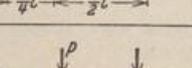
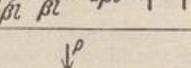
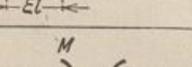
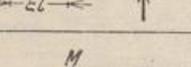
Die Längskraft N im Ring ohne Zugbänder beträgt 40 t , also $\sigma = \frac{N}{F} = 153,8 \text{ t/m}^2$. Die Zugbänder vermindern die Längskraft höchstens um 1% , dagegen ergibt das Biegemoment von $0,468 \text{ mt}$ bei der Wandstärke von $0,20 \text{ m}$ eine Zusatzspannung von

$$\sigma' = \frac{M}{J} \frac{h}{2} = \frac{0,468}{0,00105} \cdot 0,10 = 44,5 \text{ t/m}^2,$$

das sind 29% der reinen Ringspannung.

Verhältnis der Biegemomente eines Stabwerks bei verschiedener Belastung eines Stabes. Die Umordnung der Belastung ist unter Umständen auch von

Tabelle 24. Verhältniszahlen für die Umformung der Momente eines Stabwerks bei verschiedenen symmetrischen oder antisymmetrischen Belastungsformen eines Stabes.

Nr.	$M_r = M_k \cdot \frac{\mu_r}{\mu_k} \cdot \frac{R_r}{R_k}$			$M_r = M_k \cdot \frac{\nu_r}{\nu_k} \cdot \frac{R_r}{R_k}$		
	Belastung	μ_k	R_k	Belastung	ν_k	R_k
1		1,00	$p l$		1,000	$p l$
2		$2 \beta (\frac{3}{2} - \beta)$	$2 p \beta l$		$8 \beta (1 - \beta)^2$	$2 p \beta l$
3		$\frac{1}{2} (3 - \beta^2)$	$p \beta l$		$\beta (2 - \beta^2)$	$p \beta l$
4		$6 \alpha (1 - \alpha) - \frac{1}{2} \beta^2$	$2 p \beta l$		$16 [\alpha (1 - \alpha) - \frac{1}{2} \beta^2] \cdot (1 - 2 \alpha)$	$2 p \beta l$
5		1,250	$\frac{1}{2} p l$		0,311	$\frac{1}{2} p l$
6		$1 + \beta$	$(\frac{1}{\beta} - 1) P$		$(1 + \beta) (1 - \beta^2)$	$(\frac{1}{\beta} - 1) P$
7		1,500	P		$1 + 2 \beta$	$(\frac{1}{\beta} - 2) P$
8		1,333	$2 P$		1,185	$2 P$
9		1,250	$3 P$		1,500	$2 P$
10		1,200	$4 P$		1,152	$4 P$
11		$\frac{1}{2} (2 + \beta^2)$	$\frac{1}{\beta} P$		$1 + 2 \beta^2$	$\frac{1}{\beta} P$
12		1,125	$2 P$		$4 \beta + (1 - \beta) \cdot [1 - \beta (2 + \beta)]$	$(\frac{1}{\beta} - 1) P$
13		$6 \omega_R$	$2 P$		$16 (\omega_D' - \omega_D)$	$2 P$
14		$12 (1 - 2 \beta)$	$\frac{M}{l}$		$64 (\frac{1}{8} - \omega_R)$	$\frac{M}{l}$

Nutzen, um die Schnittkräfte für verschiedene Belastungen eines einzelnen Stabes ($h - 1$), h auf eine bekannte Belastung zu beziehen. Eine überzählige Größe X_k des Hauptsystems kann oft aus zwei Belastungszahlen nach (323) als

$$X_k = \beta_{k(h-1)} \delta_{(h-1)0} + \beta_{kh} \delta_{h0}$$

berechnet werden, so daß bei symmetrischer Stabform und symmetrischer oder antimetrischer Belastung

$$\delta_{(h-1)0} = \pm \delta_{h0} \quad \text{und} \quad X_k = \delta_{h0} (\beta_{k(h-1)} \pm \beta_{kh}).$$

Demnach ist für zwei verschiedene entweder symmetrische oder antimetrische Belastungsformen \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2

$$X_{k,1} : X_{k,2} = \delta_{h0,1} : \delta_{h0,2}.$$

Die Schaubilder der Biegemomente eines Belastungsfalles (2) können damit auf die bekannten Biegemomente eines Belastungsfalles (1) bezogen werden. Hierfür wird der einfachste Fall, die gleichförmige Belastung, gewählt.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Ansatzes sind erfüllt, wenn von dem Einfluß der Längs- und Querkkräfte auf die Verschiebungen abgesehen wird und die Belastung des in A und B gelenkig angeschlossenen Stabes l_h in den benachbarten Stabteilen des statisch bestimmten Hauptsystems keine Biegemomente hervorruft. Die Komponenten $\delta_{(h-1)0}$, δ_{h0} bedeuten daher die relativen Verdrehungen der Endquerschnitte ($h - 1$), h des ausgezeichneten Stabes.

Die Verhältniszahlen sind für symmetrische Belastung mit $\delta_{h0,2} : \delta_{h0,1} = \mu_r R_r : \mu_k R_k$, für antimetrische Belastung mit $\delta_{h0,2} : \delta_{h0,1} = \nu_r R_r : \nu_k R_k$ nach Tabelle 17 für Stäbe mit konstantem Trägheitsmoment berechnet worden und in Tabelle 24 enthalten.

Gegeben ist die Schaulinie M_{mp} für eine gleichförmige Belastung des Stabes AB (Abb. 183a). Hieraus folgen die Momente M_{mP} (Abb. 183b) für die Belastung des Stabes AB durch Einzel-

$$\mu_7 = 1,5; \quad \mu_{13} = 6 \cdot 0,16 = 0,96; \quad M_{mP} = \left(1,5 \cdot \frac{2,0}{0,6 \cdot 5,0} + 0,96 \cdot \frac{2 \cdot 1,0}{0,6 \cdot 5,0} \right) M_{mp} = 1,64 M_{mp}.$$

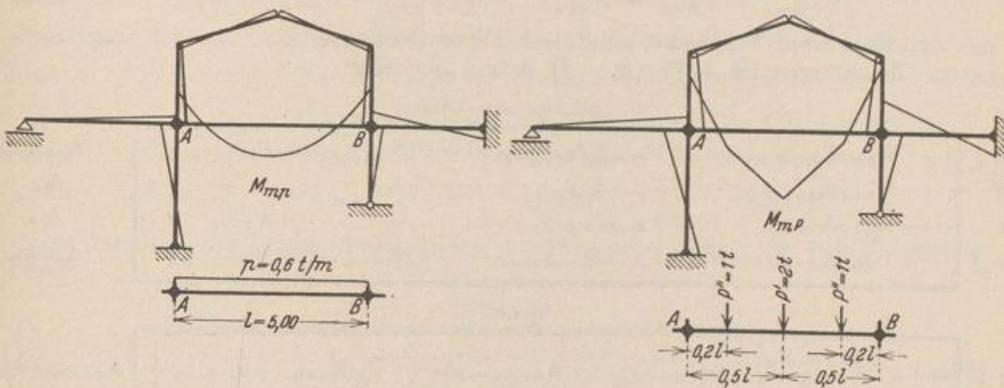


Abb. 183a und b.

28. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Hauptsystems.

Die Symmetrie des Hauptsystems setzt Symmetrie des Tragwerks voraus, deren Eigenschaften im allgemeinen bereits auf S. 185 dargelegt worden sind.

Das Hauptsystem mit einfacher Symmetrie. Von n statisch unbestimmten Schnittkräften Y_j wird in der Regel eine gerade Anzahl r symmetrisch zugeordnet sein. Der Rest $(n - r) = t$ gehört Querschnitten der Symmetrieachse an oder be-

steht aus Stütz- und Schnittkräften, deren Einheit im Hauptsystem ebenfalls symmetrische oder antimetrische Kräftebilder erzeugt. Statisch unbestimmte Biegemomente und Längskräfte in der Symmetrieachse des Hauptsystems liefern symmetrische, statisch unbestimmte Querkräfte antimetrische Spannungszustände. Die r symmetrisch zueinander liegenden, statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit $Y_A \dots Y_{A+J} \dots Y_{R-J} \dots Y_R$, die übrigen $(n-r) = t$ mit Z_b bezeichnet. Von diesen soll die Anzahl t' symmetrisch (U_h), die Anzahl t'' antimetrisch (V_k) sein ($t = t' + t''$). Die symmetrischen Eigenschaften des Hauptsystems sind die Ursache folgender Beziehungen:

$$\delta_{AA} = \delta_{RR}, \dots \delta_{(A+J)(A+J)} = \delta_{(R-J)(R-J)}, \dots \delta_{A(A+J)} = \delta_{R(R-J)},$$

$$\delta_{(A+J)h} = \delta_{(R-J)h}, \quad \delta_{(A+J)k} = -\delta_{(R-J)k}.$$

Die Matrix ist daher auch zur Nebendiagonale symmetrisch oder antimetrisch. Dasselbe gilt von der konjugierten Matrix.

Zerlegung der Matrix und Bildung von Gruppenlasten. Werden je zwei der r Bedingungsgleichungen mit den Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$ symmetrisch zueinander liegender Schnittkräfte addiert und subtrahiert, so entstehen zwei voneinander unabhängige Ansätze. Die Gleichungen α enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften U_h die Größen $(Y_A + Y_R) = X'_a$, $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$. Die Schnittkräfte V_k fallen aus. Die Gleichungen β enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften V_k die Größen $(Y_A - Y_R) = X'_r$, $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$. Die Schnittkräfte U_h fallen aus. Hierzu treten noch t' geometrische Bedingungen $\delta_h = 0$ mit den unbekanntenen Größen U_h , $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$ und t'' geometrische Bedingungen $\delta_k = 0$, welche nur V_k und $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$ enthalten. Die beiden Ansätze α und β zählen daher $(r/2 + t')$ und $(r/2 + t'')$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten.

Um die Aufspaltung der Matrix nach Abschnitt 34 vorzubereiten, werden die Glieder mit den Summen und Differenzen statisch unbestimmter Schnittkräfte mit der Zahl 2 erweitert, so daß daraus neue Unbekannte

$$\frac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X_{a+i}, \quad \frac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X_{r-i} \quad (359)$$

mit den doppelten Vorzeichen entstehen. Diese Rechnung wird an vier ausgezeichneten Gleichungen $(A+J)$, $(R-J)$, h und k gezeigt.

Allgemeiner Ansatz.

$A+J$	$\dots + Y_{A+J} \delta_{(A+J)(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{(A+J)(R-J)} \dots + U_h \delta_{(A+J)h} \dots + V_k \delta_{(A+J)k} \dots$	$\delta_{(A+J)0}$
h	$\dots + Y_{A+J} \delta_{h(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{h(R-J)} \dots + U_h \delta_{hh} \dots - \dots$	δ_{h0}
k	$\dots + Y_{A+J} \delta_{k(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{k(R-J)} \dots - \dots + V_k \delta_{kk} \dots$	δ_{k0}
$R-J$	$\dots + Y_{A+J} \delta_{(R-J)(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{(R-J)(R-J)} \dots + U_h \delta_{(R-J)h} \dots + V_k \delta_{(R-J)k} \dots$	$\delta_{(R-J)0}$

Ansatz α .

$a+i$	$\dots + \frac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2} 2(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) \dots + U_h (\delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)}) \dots$	$\delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0}$
h	$\dots + \frac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2} 2 \delta_{(A+J)h} \dots \dots + U_h \delta_{hh} \dots$	δ_{h0}

Ansatz β .

$r-i$	$\dots + \frac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2} 2(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) \dots + V_k (\delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)}) \dots$	$\delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0}$
k	$\dots + \frac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2} 2 \delta_{(A+J)k} \dots \dots + V_k \delta_{kk} \dots$	δ_{k0}

Die Verwendung der halben Summe und der halben Differenz zweier zueinander symmetrisch liegender, statisch unbestimmter Schnittkräfte nach (359) bedeutet mechanisch die Erweiterung der statisch unbestimmten Schnittkraft zur statisch unbestimmten Gruppenlast und damit zu einer statisch überzähligen Größe allgemeiner Art. Diese sind ebenfalls unabhängig voneinander, so daß bei der Ableitung beliebiger Schnittkräfte und Verschiebungen auf die Superposition über die Beziehung

$$Y_{A+J} = X_{a+i} + X_{r-i}, \quad Y_{R-J} = X_{a+i} - X_{r-i}$$

verzichtet und dafür folgender Ansatz verwendet werden kann:

$$\left. \begin{aligned} M_H &= M_{H_0} - \sum (M_{H(a+i)} X_{a+i} + M_{H(r-i)} X_{r-i} + M_{Hh} U_h + M_{Hk} V_k), \\ \delta_H &= \delta_{H_0} - \sum (\delta_{H(a+i)} X_{a+i} + \delta_{H(r-i)} X_{r-i} + \delta_{Hh} U_h + \delta_{Hk} V_k). \end{aligned} \right\} (360)$$

$M_{H(a+i)}$, $\delta_{H(a+i)}$ bedeuten im Hauptsystem die auf den Querschnitt H bezogene Schnittkraft und die relative Verschiebung der Querschnitte H infolge von $-X_{a+i} = 1$. Alle anderen überzähligen Größen sind dabei Null. Der Belastungszustand

$$\left. \begin{aligned} -X_{a+i} &= -\frac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = 1, \quad -X_{r-i} = -\frac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = 0 \text{ usw.} \\ \text{besteht aus den Schnittkräften} \\ & -Y_{A+J} = 1, \quad -Y_{R-J} = 1, \end{aligned} \right\} (361a)$$

der Belastungszustand

$$\left. \begin{aligned} -X_{r-i} &= -\frac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = 1, \quad -X_{a+i} = -\frac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = 0 \text{ usw.} \\ \text{aus den Schnittkräften} \\ & -Y_{A+J} = 1, \quad +Y_{R-J} = 1. \end{aligned} \right\} (361b)$$

Die Vorzeichen der Gleichungen α und β werden aus der Arbeit einer virtuellen Belastung entwickelt:

$$2(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) = 1_{A+J}(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) + 1_{R-J}(\delta_{(R-J)(R-J)} + \delta_{(R-J)(A+J)})$$

$$= 1_{A+J} \delta_{(A+J)(a+i)} + 1_{R-J} \delta_{(R-J)(a+i)} = 1_{a+i} \delta_{(a+i)(a+i)},$$

$$2(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) = 1_{A+J}(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) - 1_{R-J}(\delta_{(R-J)(A+J)} - \delta_{(R-J)(R-J)})$$

$$= 1_{A+J} \delta_{(A+J)(r-i)} - 1_{R-J} \delta_{(R-J)(r-i)} = 1_{r-i} \delta_{(r-i)(r-i)},$$

$$\delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)} = \delta_{h(a+i)} = 1_{a+i} \delta_{(a+i)h} = 2\delta_{(A+J)h},$$

$$\delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)} = \delta_{k(r-i)} = 1_{r-i} \delta_{(r-i)k} = 2\delta_{(A+J)k}.$$

Damit erhalten die beiden voneinander unabhängigen Ansätze α und β folgende Form:

Ansatz α .

$$\left[\begin{array}{cccc} X_a \delta_{(a+i)a} \dots + X_{a+i} \delta_{(a+i)(a+i)} \dots + U_h \delta_{(a+i)h} \dots & \delta_{(a+i)0} \\ X_a \delta_{ha} \dots + X_{a+i} \delta_{h(a+i)} \dots + U_h \delta_{hh} \dots & \delta_{h0} \end{array} \right] (362a)$$

Ansatz β .

$$\left[\begin{array}{cccc} X_r \delta_{(r-i)r} \dots + X_{r-i} \delta_{(r-i)(r-i)} \dots + V_k \delta_{(r-i)k} \dots & \delta_{(r-i)0} \\ X_r \delta_{kr} \dots + X_{r-i} \delta_{k(r-i)} \dots + V_k \delta_{kk} \dots & \delta_{k0} \end{array} \right] (362b)$$

Diese Gleichungen können nach dem Prinzip von Castigliano (S. 163) auch unmittelbar angeschrieben werden. Die virtuelle Belastung besteht dabei aus den Teilkräften eines der Belastungszustände $-X_a = 1, \dots -X_{a+i} = 1, \dots -X_r = 1, \dots -X_{r-i} = 1$.

Da die relativen Verschiebungen δ_{A+J} und δ_{R-J} des Hauptsystems aus den äußeren Ursachen und den überzähligen Größen X_k Null sind, ist in Verbindung mit (361)

$$1_{a+i} \delta_{a+i} = 1_{A+J} \delta_{A+J} + 1_{R-J} \delta_{R-J} = 0.$$

$$\alpha) \delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} - \sum (\delta_{(A+J)a} + \delta_{(R-J)a}) X_a - \sum (\delta_{(A+J)h} + \delta_{(R-J)h}) U_h = 0, \\ \delta_{(a+i)0} - \sum \delta_{(a+i)a} X_a - \sum \delta_{(a+i)h} U_h = 0; \quad a = 1 \dots \quad h = 1 \dots \ell', \\ 1_{r-i} \delta_{r-i} = 1_{A+J} \delta_{A+J} - 1_{R-J} \delta_{R-J} = 0.$$

$$\beta) \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} - \sum (\delta_{(A+J)r} - \delta_{(R-J)r}) X_r - \sum (\delta_{(A+J)k} - \delta_{(R-J)k}) V_k = 0, \\ \delta_{(r-i)0} - \sum \delta_{(r-i)r} X_r - \sum \delta_{(r-i)k} V_k = 0; \quad r = 1 \dots \quad k = 1 \dots \ell''.$$

Die Belastungsglieder bei Symmetrie der Matrix. Die Belastungsglieder der beiden Ansätze α und β (S. 192) entstehen durch Addition und Subtraktion der Bedingungsgleichungen mit den symmetrischen Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$

$$\delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} = \delta_{(a+i)0}; \quad \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} = \delta_{(r-i)0}.$$

Bei symmetrischer Belastung ist $\delta_{(A+J)0} = \delta_{(R-J)0}$, $\delta_{(r-i)0} = \delta_{k0} = 0$; die Gleichungen β sind daher homogen, so daß

$$X_{r-i} = 0, \quad V_k = 0 \quad \text{und} \quad X_{a+i} = Y_{A+J} = Y_{R-J}. \quad (363)$$

Bei Antimetrie der Belastung wird $\delta_{(A+J)0} = -\delta_{(R-J)0}$, also $\delta_{(a+i)0} = \delta_{k0} = 0$, so daß die Gleichungen α homogen sind. Daher wird jetzt

$$X_{a+i} = 0, \quad U_h = 0 \quad \text{und} \quad X_{r-i} = Y_{A+J} = -Y_{R-J}. \quad (364)$$

Diese Lösung trifft bei Verwendung von unsymmetrisch liegenden Stütz- oder Schnittkräften W'_H mit symmetrischem oder antimetrischem Kräftebild nicht immer zu, so daß diese oft in ein statisch unbestimmtes Hauptsystem einbezogen werden. Ist W''_H die zur statisch unbestimmten Stütz- oder Schnittkraft symmetrisch liegende Größe, so werden zweckmäßiger von vornherein Gruppenlasten

$$\bar{W}'_h = \frac{W'_h + W''_h}{2} \quad \bar{W}''_h = \frac{W'_h - W''_h}{2} \quad (365)$$

gebildet, von denen dann stets die eine oder andere bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung Null ist.

Um diese übersichtliche Lösung auch bei einer beliebigen Belastung \mathfrak{P} anschreiben zu können, wird diese nach S. 186 durch Belastungsumordnung in einen symmetrischen Anteil $(1)\mathfrak{P}$ und in einen antimetrischen Anteil $(2)\mathfrak{P}$ so zerlegt, daß

$$\mathfrak{P} \equiv (1)\mathfrak{P} + (2)\mathfrak{P}.$$

In der statischen Untersuchung des Tragwerks für $(1)\mathfrak{P}$ erscheinen dann allein die überzähligen Größen X_a , X_{a+i} und die symmetrischen Kräfte U_h , in der statischen Untersuchung des Tragwerks für $(2)\mathfrak{P}$ nur die überzähligen Größen X_r , X_{r-i} und die antimetrischen Kräfte V_k . Jedem Lastanteil wird zur Vereinfachung der Rechnung ein der Eigenart der Belastung $(1)\mathfrak{P}$ oder $(2)\mathfrak{P}$ entsprechendes Hauptsystem zugeordnet.

Der symmetrische Anteil $(1)\mathfrak{P}$ liefert

$$\left. \begin{array}{l} (1)X_{r-i} = 0, \quad (1)X_{a+i} = (1)Y_{A+J} = (1)Y_{R-J}, \\ \text{der antimetrische Anteil } (2)\mathfrak{P} \\ (2)X_{a+i} = 0, \quad (2)X_{r-i} = (2)Y_{A+J} = -(2)Y_{R-J}, \end{array} \right\} \quad (366)$$

die Superposition von ⁽¹⁾ϑ und ⁽²⁾ϑ daher

$$Y_{A+J} = {}^{(1)}Y_{A+J} + {}^{(2)}Y_{A+J}, \quad Y_{R-J} = {}^{(1)}Y_{R-J} + {}^{(2)}Y_{R-J}.$$

Schnittkraft $M = {}^{(1)}M + {}^{(2)}M$ usw.

Anwendungen. a) Durchgehender Träger auf 4 Stützen in symmetrischer Anordnung (Abb. 184a). Das Tragwerk ist zweifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem a (Abb. 184b): Träger auf zwei Stützen. Überzählige Größen sind die Stützkkräfte $X_a \equiv Y_A$, $X_b \equiv Y_B$, so daß $\delta_{aa} = \delta_{bb}$.

Hauptsystem b (Abb. 184e): Drei einzelne Träger. Überzählige Größen sind die Stützenmomente $X_a \equiv Y_A$, $X_b \equiv Y_B$, so daß ebenfalls $\delta_{aa} = \delta_{bb}$.

Umformung des Ansatzes nach (359):

$$X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = \delta_{a0},$$

$$X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = \delta_{b0};$$

$$\frac{X_a + X_b}{2} 2(\delta_{aa} + \delta_{ab}) = \delta_{a0} + \delta_{b0},$$

$$\frac{X_a - X_b}{2} 2(\delta_{aa} - \delta_{ab}) = \delta_{a0} - \delta_{b0};$$

$$X_1 \delta_{11} = \delta_{10}, \quad X_2 \delta_{22} = \delta_{20}.$$

Belastungszustand $-X_1 = 1$: $-X_a = 1, \quad -X_b = 1,$

Schnittkräfte M_1 ;

Belastungszustand $-X_2 = 1$: $-X_a = 1, \quad +X_b = 1,$ Schnittkräfte M_2 .

Symmetrische Belastung: $X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b, \quad X_2 = 0.$

Antimetrische Belastung: $X_1 = 0, \quad X_2 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b.$

Schnittkraft aus der Superposition: $M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2.$

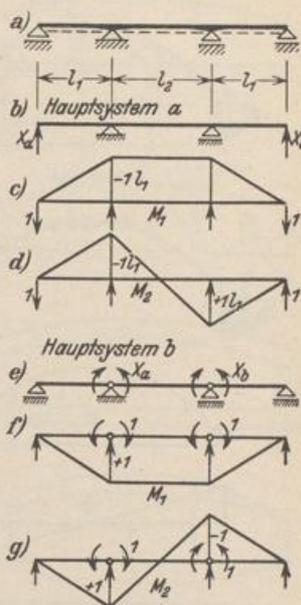


Abb. 184.

b) Beiderseits elastisch eingespannter Bogenträger in symmetrischer Anordnung (Abb. 185). Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem a. Träger auf zwei Stützen (Abb. 186a). Die Einspannungsmomente X_a, X_b und die Längskraft X_c im Bogenscheitel sind statisch unbestimmte Schnittkräfte.

Überzählige Größen:

$$X_1 = X_c; \quad -X_1 = 1, \quad M = M_1,$$

$$X_2 = \frac{X_a - X_b}{2}; \quad -X_2 = 1: \quad -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_2,$$

$$X_3 = \frac{X_a + X_b}{2}; \quad -X_3 = 1: \quad -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_3.$$

Die Schnittkräfte aus $-X_1 = 1$ und $-X_3 = 1$ sind symmetrisch, die Schnittkräfte aus $-X_2 = 1$ antisymmetrisch. Daher $\delta_{12} = \delta_{23} = 0.$

	X_1	X_2	X_3	
δ_{11}			δ_{13}	δ_{10}
		δ_{22}		δ_{20}
δ_{31}			δ_{33}	δ_{30}

Symmetrische Belastung:

$${}^{(1)}M_0; \quad {}^{(1)}X_1 \neq 0, \quad {}^{(1)}X_2 = 0, \quad {}^{(1)}X_3 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b \neq 0.$$

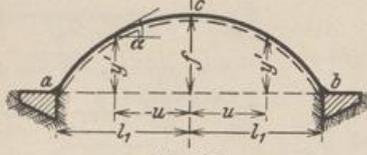


Abb. 185.

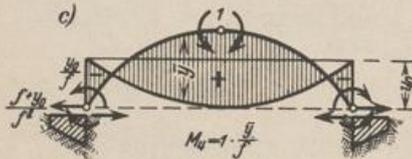
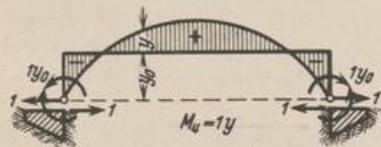
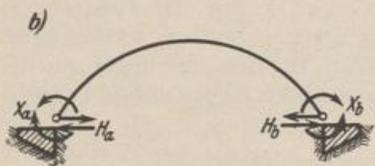
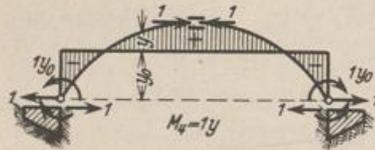
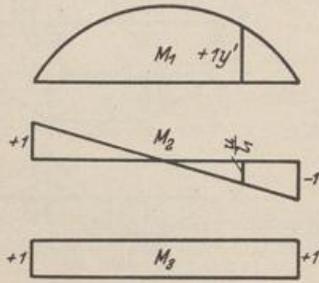
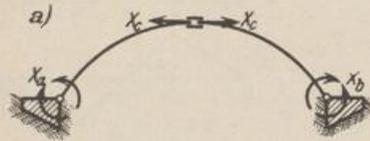


Abb. 186.

Kräftepaare $X_1 y_0$ in a und b . Die Ansatz und Ergebnis wie in Lösung (a).

Antimetrische Belastung:

$${}^{(2)}M_0; \quad {}^{(2)}X_1 = 0, \quad {}^{(2)}X_3 = 0,$$

$${}^{(2)}X_2 = {}^{(2)}X_a = - {}^{(2)}X_b \neq 0,$$

$$M_0 = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0,$$

$$M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3$$

$$= M_0 - X_1 y' + X_2 \frac{u}{l_1} - X_3,$$

$$N = N_0 - X_1 \cos \alpha - X_2 \sin \alpha.$$

Die statisch unbestimmte Längskraft $X_c = X_1$ des symmetrischen Anteils des Ansatzes läßt sich außerdem noch durch einen Anteil der Gruppenlast X_3 in Gestalt zweier Momente $X_1 y_0$ in a und b derart zu einer Gruppenlast X_4 ergänzen, daß diese im Gegensatz zu X_1 unabhängig von X_3 berechnet werden kann. Die Bedingung ist hierfür $1_3 \delta_{34} = 0$. Gruppenlast $-X_4 = 1: -X_1 = 1, +X_3 = 1 y_0$.

$$1_3 \delta_{34} = \delta_{31} - y_0 \delta_{33} = 0$$

(starre Einspannung),

$$1_3 \delta_{34} = \delta_{31} - 2 \varepsilon_{31} - y_0 \delta_{33} - 2 y_0 \varepsilon_{33} = 0$$

(elastische Einspannung).

$\varepsilon_{33}, \varepsilon_{31}$ sind die EJ_c fachen Drehwinkel des Widerlagers infolge eines Momentes von der Größe 1 oder einer waagerechten Kraft 1 in a oder b .

$$y_0 = \frac{\int y' \frac{J^e}{J} ds - 2 \varepsilon_{31}}{\int \frac{J^e}{J} ds + 2 \varepsilon_{33}};$$

X_2, X_3, X_4 nach (465).

Hauptsystem b (Abb. 186b). Die Längskraft $N_c = X_c$ im Scheitel wird durch die statisch unbestimmte Schnittkraft H_b am Kämpfer ersetzt. Als überzählige Größen werden außer X_2 und X_3 nach Lösung (a) die Gruppenlasten $X_1 = 1/2 (H_a + H_b)$ und $X_1^* = 1/2 (H_a - H_b)$ verwendet. Von diesen ist X_1^* statisch bestimmt und bei symmetrischer Belastung Null. Bei antimetrischer Belastung ist $H_a = -H_b$.

Die beiden symmetrischen überzähligen Größen X_1, X_3 werden auch hier durch Erweiterung von X_1 zu einer symmetrischen Gruppenlast X_4 unabhängig voneinander. Diese besteht aus X_1 und einem Anteil von X_3 in Gestalt zweier

Hauptsystem *c* (Abb. 186c). An Stelle der Längskraft N_c dient das Biegemoment $M_c = X_1$ im Bogenscheitel als statisch unbestimmte Schnittkraft. Das Hauptsystem ist dann ein Dreigelenkträger mit X_1 und den Gruppenlasten X_2, X_3 nach (a) als überzähligen Größen. Der Ansatz erhält wiederum die in (a) angegebene Form. Auch hier kann der symmetrische Teil durch die Ergänzung von X_1 zu einer Gruppenlast X_4 in zwei voneinander unabhängige Gleichungen zerlegt werden, die aus X_1 und zwei Momenten $\frac{y_0}{l} X_1$ besteht. Die Strecke y_0 wird aus der Bedingung $\delta_{34} = 0$ berechnet.

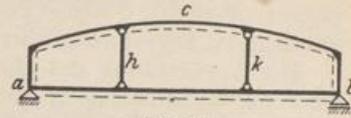


Abb. 187.

c) Geschlossener Dachrahmen mit Hängestangen in symmetrischer Anordnung (Abb. 187). 1. Statisch bestimmtes Hauptsystem nach Abb. 188a:

Zwei übereinander liegende Balkenträger. Als statisch unbestimmte Schnittkräfte werden die Längskräfte in *c, h* und *k* und die Biegemomente in *a* und *b* verwendet.

Symmetrische überzählige Größen:

$$X_1 = \frac{1}{2}(X_a + X_b), \quad X_2 = \frac{1}{2}(X_h + X_k), \quad X_3 = X_c.$$

Antimetrische überzählige Größen:

$$X_4 = \frac{1}{2}(X_a - X_b), \quad X_5 = \frac{1}{2}(X_h - X_k).$$

Belastungszustände: $-X_3 = 1, M = M_3,$

$$-X_1 = 1: \quad -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_1,$$

$$-X_2 = 1: \quad -X_h = 1, \quad -X_k = 1, \quad M = M_2,$$

$$-X_4 = 1: \quad -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_4,$$

$$-X_5 = 1: \quad -X_h = 1, \quad +X_k = 1, \quad M = M_5.$$

Ansatz für symmetrische Belastung:

X_1	X_2	X_3	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{20}
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{30}

Ansatz für antimetrische Belastung:

X_4	X_5	
δ_{44}	δ_{45}	δ_{40}
δ_{54}	δ_{55}	δ_{50}

Symmetrische Belastung: $X_4 = X_5 = 0.$

$$X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b, \quad X_2 = {}^{(1)}X_h = {}^{(1)}X_k, \quad X_3 = X_c.$$

Antimetrische Belastung: $X_1 = X_2 = X_3 = 0.$

$$X_4 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b, \quad X_5 = {}^{(2)}X_h = -{}^{(2)}X_k.$$

Beliebiger Lastangriff:

$$M = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0 - \sum X_r M_r; \quad r = 1 \dots 5.$$

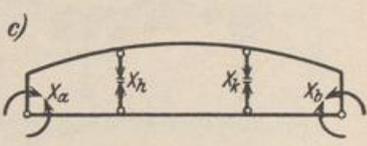
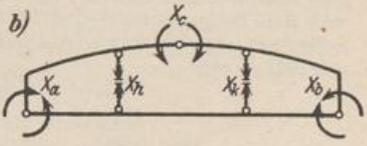
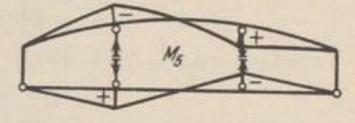
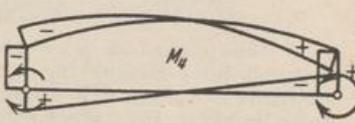
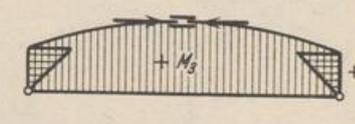
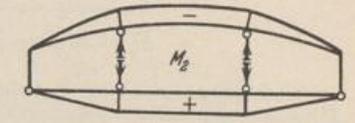
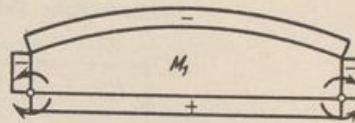
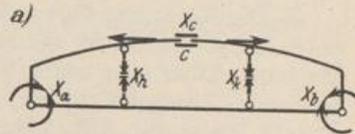


Abb. 188.

Die Längskraft $X_0 = X_3$ kann ebenso wie X_1 auf S. 196 zu einer Gruppenlast X_3^* ergänzt werden, so daß δ_{13} oder δ_{23} Null ist. Die Erweiterung des Ansatzes zur unabhängigen Berechnung aller überzähligen Größen wird in Abschnitt 36 behandelt.

Die Verwendung des Biegemomentes im Scheitelquerschnitt c (Abb. 188b) oder der Schnittkraft H_b im Querschnitt b an Stelle der statisch unbestimmten Längskraft $X_3 = X_0$ führt zu keinen wesentlichen Änderungen der Lösung. Sie wird dann ebenso wie auf S. 196 behandelt.

2. Die Rechnung läßt sich durch statisch unbestimmte Hauptsysteme abkürzen, deren Schnittkräfte für die Belastung \mathfrak{P} und $-X_k = 1$ aus Tabellen bekannt sind. Sie kann daher hier unter Umständen mit Vorteil auf den geschlossenen Stabzug oder den Zweigelenkrahmen mit biegeungssteifem Zugstab bezogen werden. Der Ansatz lautet für Abb. 188c:

Symmetrische Belastung

X_1	X_2	
$\delta_{11}^{(1)}$	$\delta_{12}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(1)}$
$\delta_{21}^{(1)}$	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$

Antimetrische Belastung

X_4	X_5	
$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$
$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$

$$M = M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} - X_2 M_2^{(1)} - X_4 M_4^{(1)} - X_5 M_5^{(1)}.$$

Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch bestimmten Hauptsystem.

Berechnung einer zweischiffigen, zur Mitte symmetrischen Halle (Abb. 189).

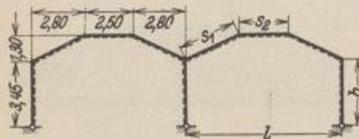


Abb. 189.

1. Geometrische Grundlagen: Trägheitsmomente und reduzierte Stablängen. Riegel: $J_r = 0,00312 \text{ m}^4 = J_e$, Pfosten: oberes Ende $J_b = 0,00540 \text{ m}^4$, unteres Ende $J_a = 0,000675 \text{ m}^4$, $J_a : J_b = n = 0,125$. Maßgebendes mittleres Trägheitsmoment für den Pfosten nach Tabelle 11

$$J_A = k \cdot J_a = 4,90 J_a = 0,00331 \text{ m}^4.$$

$$h' = 3,45 \frac{0,00312}{0,00331} = 3,25 \text{ m}, \quad s'_1 = 3,09 \text{ m}, \quad s'_2 = 2,50 \text{ m}.$$

2. Hauptsystem und überzählige Größen: Die Belastung wird bei Symmetrie des Stabzugs durch Umordnung in den symmetrischen und antimetrischen Anteil zerlegt. Die symmetrische Belastung $^{(1)}\mathfrak{P}$ erzeugt ein symmetrisches Kräftebild, so daß die symmetrisch zueinander liegenden Biegemomente der Querschnitte b, c, d, e nach (359) zu überzähligen Gruppenlasten vereinigt und aus

$$X_1 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_b + ^{(1)}M_e); \quad X_2 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_c + ^{(1)}M_d)$$

berechnet werden (Abb. 190 a). Die Differenz der Biegemomente aus $^{(1)}\mathfrak{P}$ ist Null, daher

$$X_1 = ^{(1)}M_b = ^{(1)}M_e, \quad X_2 = ^{(1)}M_c = ^{(1)}M_d.$$

Der antimetrische Anteil $^{(2)}\mathfrak{P}$ erzeugt ein antimetrisches Kräftebild, so daß ein Hauptsystem mit den Biegemomenten $^{(2)}M_b, ^{(2)}M_e$ als überzähligen äußeren Kräften statisch bestimmt berechnet werden kann (Abb. 190 b). Diese werden zu zwei überzähligen Gruppenlasten zusammengefaßt:

$$^{(2)}X_1 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b + ^{(2)}M_e); \quad ^{(2)}X_3 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b - ^{(2)}M_e);$$

$$^{(2)}X_1 = 0 \text{ daher } ^{(2)}X_3 = ^{(2)}M_b = - ^{(2)}M_e.$$

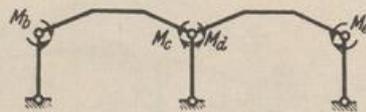


Abb. 190 a. Hauptsystem für symmetrische Belastung.

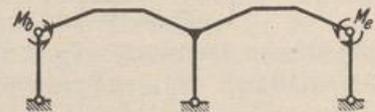


Abb. 190 b. Hauptsystem für antimetrische Belastung.

Das Hauptsystem für den symmetrischen Anteil der Belastung nach Abb. 190 a ist beweglich, aber durch die Art der Belastung im Gleichgewicht. Das Hauptsystem für den antimetrischen Anteil (Abb. 190 b) ist statisch unbestimmt, die statisch unbestimmte Schnittkraft jedoch durch die Art des Lastangriffs Null.

Ansatz:

Symmetrischer Anteil

X_1	X_2	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{20}

Antimetrischer Anteil

$$X_3 \delta_{33} = \delta_{30}$$

3. Vorzahlen der Elastizitätsgleichungen: Berechnung nach (300) mit den Abb. 191a—c

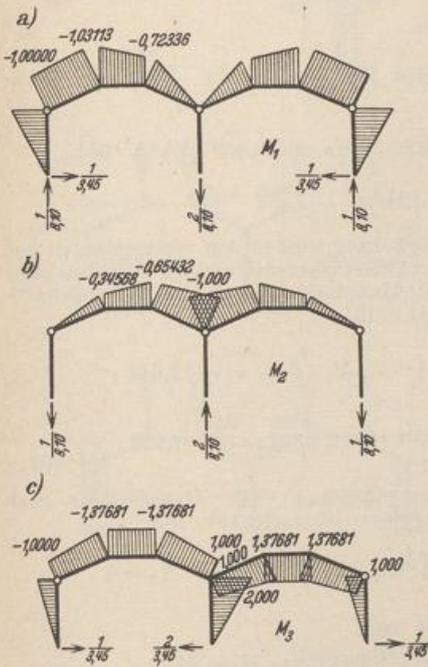


Abb. 191. Biegemomente im Hauptssystem infolge $-X_i = 1$.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int M_1^2 \frac{J^c}{J} ds = 13,506, \\ \delta_{12} &= \int M_1 M_2 \frac{J^c}{J} ds = 4,964, \\ \delta_{22} &= \int M_2^2 \frac{J^c}{J} ds = 5,826, \\ \delta_{33} &= \int M_3^2 \frac{J^c}{J} ds = 33,580. \end{aligned}$$

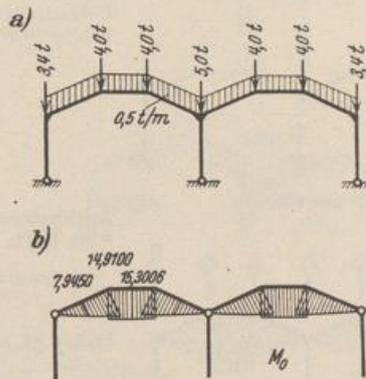


Abb. 192.

Auflösung des Ansatzes nach (347):

$$\begin{aligned} X_1 &= + 0,10780 \delta_{10} - 0,09185 \delta_{20}, \\ X_2 &= - 0,09185 \delta_{10} + 0,24990 \delta_{20}, \\ X_3 &= + 0,02978 \delta_{30}. \end{aligned}$$

4. Die überzähligen Größen und Schnittkräfte aus einzelnen Belastungsfällen. a) Eigengewicht (Abb. 192a). Die Belastung ist symmetrisch. Hauptsystem: Abb. 190a, $X_3 = 0$. Schnittkräfte: Abb. 192b.

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = - 138,57, \\ \delta_{20} &= \int M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = - 86,017, \quad \delta_{30} = 0, \\ X_1 &= - 7,037 \text{ mt} = M_b = M_e, \\ X_2 &= - 8,769 \text{ mt} = M_c = M_d. \end{aligned}$$

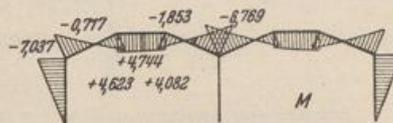


Abb. 193. Biegemomente aus Eigengewicht.

Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 193):

$$M = M_0 + 7,037 M_1 + 8,769 M_2.$$

Probe: Die gegenseitige Verschiebung δ_k der äußeren Fußgelenke muß als Null nachgewiesen werden. Die virtuelle Belastung 1_k nach Abb. 194 a liefert

$$1_k^{(3)} \delta_{k0}^{(3)} = \int \bar{M}_k M_0^{(3)} \frac{J^c}{J} ds = 0,02 = \Delta > 0,$$

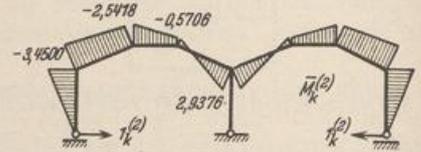
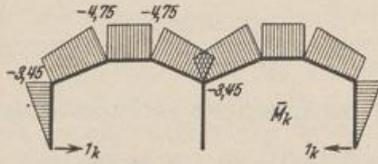


Abb. 194 a und b.

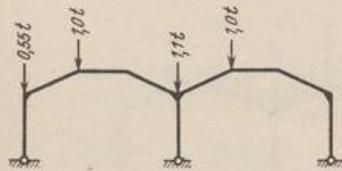
so daß die waagerechte Komponente H der äußeren Stützkkräfte nach (333) den Fehler $\Delta H = \Delta / \delta_{kk}^{(n-1)}$ enthält:

$$1_k^{(n-1)} \delta_{kk}^{(n-1)} = 1_k^{(2)} \delta_{kk}^{(2)} = \int \bar{M}_k^{(2)} \bar{M}_k^{(2)} \frac{J^c}{J} ds = 110,403 \quad (\text{Abb. 194 b}),$$

$$\Delta H = 0,02 / 110,403 = 0,181 \text{ kg},$$

gegenüber $H = 2,040 \text{ t}$.

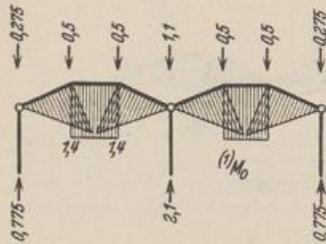
b) Einseitige Schneebelastung (Abb. 195 a). Die Belastung wird in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Belastungsanteil zerlegt. Symmetrischer Belastungsanteil $(1)\mathfrak{P}$: Hauptsystem nach Abb. 190 a, Schnittkräfte $(1)M_0$, nach Abb. 195 b



Schneebelastung.

$$(1)\delta_{10} = \int (1)M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = -12,643,$$

$$(1)\delta_{20} = \int (1)M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = -7,826.$$



Symmetrischer Anteil.

Antisymmetrischer Belastungsanteil $(2)\mathfrak{P}$: Hauptsystem nach Abb. 190 b. Schnittkräfte $(2)M_0$ nach Abb. 195 c.

$$(2)\delta_{30} = \int (2)M_0 M_3 \frac{J^c}{J} ds = 0, \quad X_3 = 0.$$

Daher ist nach 3.:

$$X_1 = -0,644 \text{ mt} = M_b = M_e,$$

$$X_2 = -0,794 \text{ mt} = M_c = M_d.$$

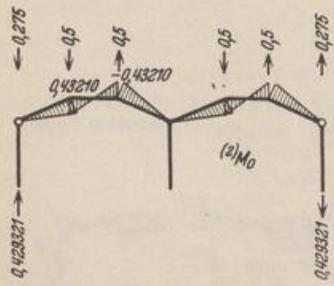
Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 196):

$$M = (1)M_0 + (2)M_0 + 0,644 M_1 + 0,794 M_2.$$

Probe wie bei a):

$$\delta_{k0}^{(3)} = 0,02 = \Delta.$$

c) Windbelastung (Abb. 197 a). Die Belastung wird in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Belastungsanteil zerlegt (Abb. 197 b und d). Symmetrischer Belastungs-



Antisymmetrischer Anteil.
Abb. 195.

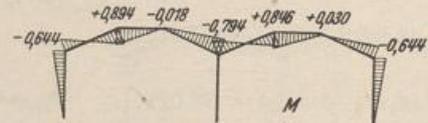


Abb. 196. Biegemomente aus Schneebelastung.

anteil: Hauptsystem nach Abb. 190 a. Schnittkräfte $(1)M_0$ nach Abb. 197 c

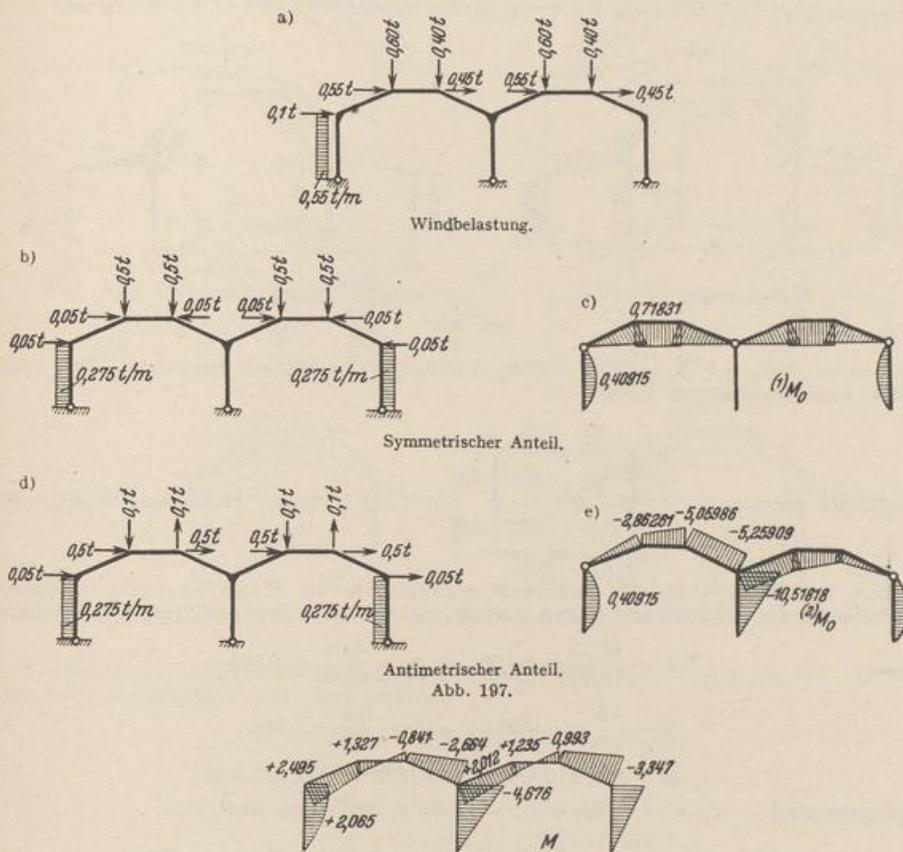
$$(1)\delta_{10} = \int (1)M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = -7,373, \quad (1)\delta_{20} = \int (1)M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = -4,015.$$

Antimetrischer Belastungsanteil: Hauptsystem nach Abb. 190 b. Schnittkräfte $^{(2)}M_0$ nach Abb. 197 e

$$^{(2)}\delta_{30} = \int ^{(2)}M_0 M_3 \frac{J_c}{J} ds = 98,05.$$

Daher ist nach 3.:

$$X_1 = -0,426 \text{ mt}, \quad X_2 = -0,326 \text{ mt}, \quad X_3 = +2,921 \text{ mt}.$$



Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 198):

$$M = ^{(1)}M_0 + ^{(2)}M_0 + 0,426 M_1 + 0,326 M_2 - 2,921 M_3.$$

Probe wie bei a):

$$\delta_{k_0}^{(3)} = 0,025 = \Delta.$$

Mit $^{(1)}\delta_{1,1} = \Delta/h = 0,025/3,45 = 0,00725$, $^{(1)}\delta_{2,2} = ^{(2)}\delta_{3,3} = 0$ ergibt sich nach S. 169 ein Fehler $\Delta X_1 = 0,10780 \cdot 0,00725 = 0,000782 \text{ mt}$ und damit ein Fehler der äußeren horizontalen Stützkkräfte

$$\Delta H = 0,000782/3,45 = 0,23 \text{ kg} \text{ gegenüber } 723 \text{ kg}.$$

Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch unbestimmten Hauptsystem. (Abb. 199 a.)

1. Geometrische Grundlagen. Trägheitsmomente:

$$J_1 = 0,0416 \text{ m}^4 = J_c, \quad J_2 = 0,0213 \text{ m}^4, \quad J_3 = 0,0114 \text{ m}^4.$$

Reduzierte Stablängen:

$$h'_1 = 5,00 \cdot \frac{0,0416}{0,0114} = 18,245 \text{ m}, \quad s'_1 = 8,06 \cdot \frac{0,0416}{0,0213} = 15,746 \text{ m},$$

$$h'_2 = 6,00 \text{ m}, \quad h' = 2,00 \text{ m}, \quad s'_2 = 5,657 \text{ m}, \quad l'_1 = 8,00 \text{ m}.$$

2. Hauptsystem (Abb. 199 b): Zwei einfach statisch unbestimmte Seitenrahmen stützen den Riegel des Mittelschiffs als Balkenträger. Statisch unbestimmte Schnittkräfte sind M_1, M_r, H_r . Um die Symmetrie des Stabzugs für die Rechnung auszunützen, wird außerdem auch H_1 als äußere Kraft verwendet, so daß die Gruppenlasten

$$X_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_r), \quad X_2 = \frac{1}{2}(M_1 - M_r), \quad X_3 = \frac{1}{2}(H_1 + H_r), \quad X_4 = \frac{1}{2}(H_1 - H_r)$$

gebildet werden können. X_1, X_2, X_3 sind überzählige Größen. Die Gruppenlast X_4 ist Null oder statisch bestimmt. Wird die Belastung in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

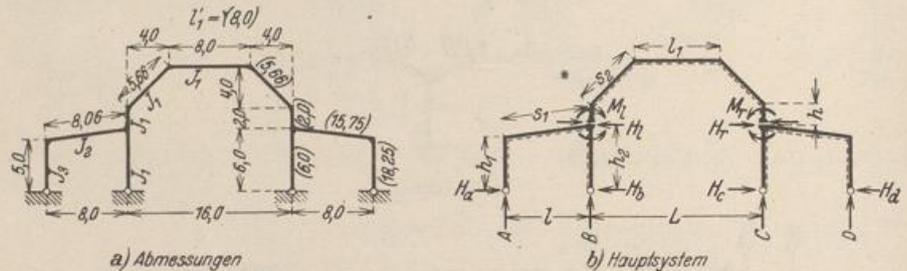


Abb. 199.

zerlegt, so ist $(1)X_2 = (1)X_4 = (2)X_1 = (2)X_3 = 0$ und $(2)X_4$ statisch bestimmt. Der Ansatz zerfällt in zwei unabhängige Teile.

	<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">X_1</td> <td style="padding: 2px 10px;">X_3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$\delta_{11}^{(2)}$</td> <td style="padding: 2px 10px;">$\delta_{13}^{(2)}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">$\delta_{31}^{(2)}$</td> <td style="padding: 2px 10px;">$\delta_{33}^{(2)}$</td> </tr> </table>	X_1	X_3	$\delta_{11}^{(2)}$	$\delta_{13}^{(2)}$	$\delta_{31}^{(2)}$	$\delta_{33}^{(2)}$	
X_1	X_3							
$\delta_{11}^{(2)}$	$\delta_{13}^{(2)}$							
$\delta_{31}^{(2)}$	$\delta_{33}^{(2)}$							
Symmetrische Belastung:	$\delta_{10}^{(2)}$	Antisymmetrische Belastung: $X_4 \delta_{22}^{(2)} = \delta_{20}^{(2)}$.						

3. Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Hauptsystems. Unterlagen zur Berechnung der Schnittkräfte in den statisch unbestimmten Seitenrahmen nach Abschn. 61

$$\kappa_1 = \frac{18,25}{15,75} = 1,159; \quad \kappa_2 = \frac{6,00}{15,75} = 0,381;$$

$$\lambda_1 = \frac{5,0}{6,0} = 0,833; \quad \lambda_2 = \frac{6,0}{5,0} = 1,200.$$

$$\mu = 0,833 \cdot 2,159 + 1 + 1,200 \cdot 1,381 = 4,456.$$

Belastungszustand $-X_1 = 1$: $-M_1 = 1, -M_r = 1, M_1^{(2)}$ nach Abb. 200 a

$$A_1 = D_1 = -\frac{1}{8,0} = -0,125 \text{ t}, \quad B_1 = C_1 = +\frac{1}{8,0} = +0,125 \text{ t}$$

$$\Phi = \frac{2 + 0,833}{2 \cdot 4,456} = 0,3179, \quad H_{a1} = H_{b1} = H_{c1} = H_{d1} = \frac{-1,000}{5,00} \cdot 0,3179 = -0,0636 \text{ t}.$$

Belastungszustand $-X_2 = 1$: $-M_1 = 1, +M_r = 1, M_1^{(2)}$ nach Abb. 200 b

$$A_2 = -0,125 \text{ t}, \quad B_2 = +0,250 \text{ t}, \quad D_2 = +0,125 \text{ t}, \quad C_2 = -0,250 \text{ t},$$

$$H_{a2} = H_{b2} = -0,0636 \text{ t}; \quad H_{c2} = H_{d2} = +0,0636 \text{ t}.$$

Belastungszustand $-X_3 = 1$: $-H_1 = 1, -H_r = 1, M_1^{(2)}$ nach Abb. 200 c

$$A_3 = D_3 = -\frac{6,0}{8,0} = -0,750 \text{ t}, \quad B_3 = C_3 = +\frac{6,0}{8,0} = +0,750 \text{ t},$$

$$\Phi = \frac{1 + 2 \cdot 1,200 (1 + 0,381)}{4,456} = 0,9682; \quad H_{a3} = -\left(\frac{-1,000}{2}\right) (-0,9682) = -0,484 \text{ t},$$

$$H_{d3} = H_{a3} = -0,484, \quad H_{b3} = H_{c3} = -0,484 + 1,000 = +0,516 \text{ t}.$$

4. Berechnung der Vorzahlen des Ansatzes als gegenseitige Verschiebungen im statisch unbestimmten Hauptsystem nach (305)

$$\delta_{11}^{(2)} = \int M_1^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J^e}{J} ds = + 28,14; \quad \delta_{13}^{(2)} = \int M_1^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J^e}{J} ds = - 77,47;$$

$$\delta_{33}^{(2)} = \int M_3^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J^e}{J} ds = + 682,5; \quad \delta_{22}^{(2)} = \int M_2^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J^e}{J} ds = + 16,05.$$

5. Auflösung des Ansatzes in 2. nach (345):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(2)} + 0,11351 \delta_{20}^{(2)}}{19,34467}, \quad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(2)}}{16,05370}, \quad X_3 = \frac{\delta_{30}^{(2)} + 2,75309 \delta_{10}^{(2)}}{469,1904}.$$

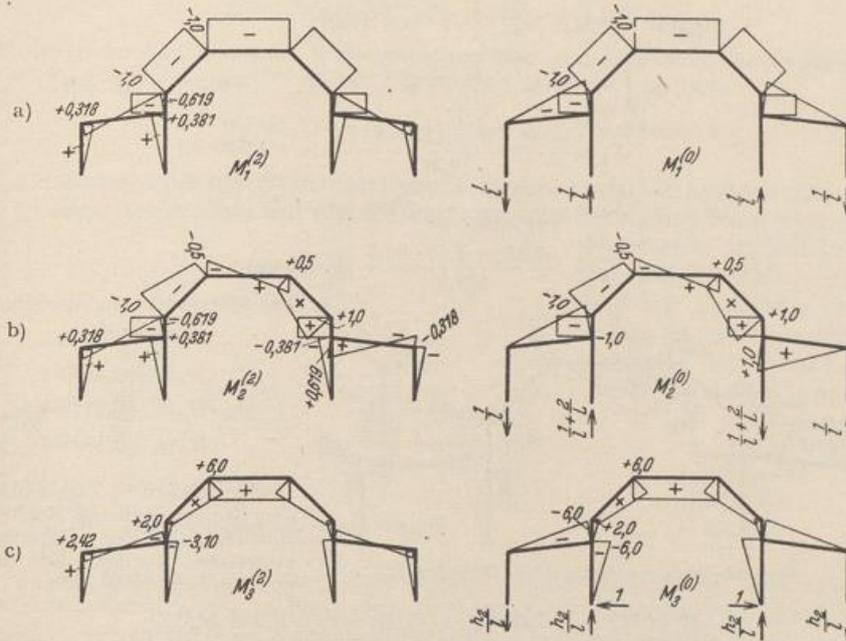


Abb. 200. Biegemomente infolge $-X_i = 1$ im statisch unbestimmten und statisch bestimmten Hauptsystem.

6. Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks können aus den Stützkraften oder durch Superposition gewonnen werden:

$$\begin{aligned} H_a &= H_{a0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 + X_2) + 0,484 X_3, \\ H_b &= H_{b0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 + X_2) - 0,516 X_3, \\ H_c &= H_{c0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 - X_2) - 0,516 X_3, \\ H_d &= H_{d0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 - X_2) + 0,484 X_3. \end{aligned}$$

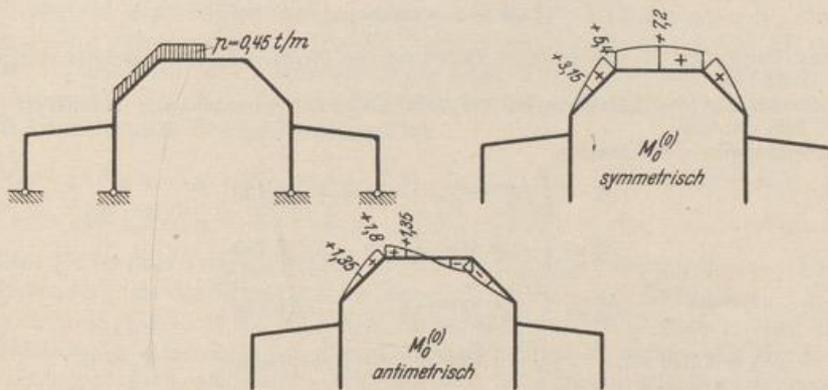


Abb. 201. Schneebelastung.

7. Belastungsfall I: Einseitige Belastung des Mittelschiffs durch Schnee mit $p = 0,45$ t/m nach Abb. 201. Sie wird in den symmetrischen und antimetrischen Lastanteil mit $p = 0,225$ t/m zerlegt, so daß $X_1 = {}^{(1)}M_1 = {}^{(1)}M_r$, $X_3 = {}^{(1)}H_1 = {}^{(1)}H_r$, $X_2 = {}^{(2)}M_1 = -{}^{(2)}M_r$. Die Be-

lastungsglieder des Ansatzes werden als gegenseitige Verschiebungen im statisch unbestimmten Hauptsystem nach (305) berechnet.

$${}^{(1)}\delta_{10}^{(2)} = \int {}^{(1)}M_0^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = -86,7; \quad {}^{(1)}\delta_{20}^{(2)} = 0;$$

$${}^{(1)}\delta_{30}^{(2)} = \int {}^{(1)}M_0^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +472,9;$$

$${}^{(2)}\delta_{20}^{(2)} = \int {}^{(2)}M_0^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = -12,33; \quad {}^{(2)}\delta_{10}^{(2)} = {}^{(2)}\delta_{30}^{(2)} = 0.$$

$$X_1 = \frac{-86,7 + 0,1135 \cdot 472,9}{19,34} = -1,710 \text{ mt},$$

$$X_2 = -\frac{12,33}{16,05} = -0,768 \text{ mt},$$

$$X_3 = \frac{472,9 - 2,75 \cdot 86,7}{469,2} = +0,499 \text{ t}.$$

Die Stützkräfte sind dann nach 6.:

$$H_a = +0,0840 \text{ t},$$

$$H_b = -0,4150 \text{ t},$$

$$H_c = -0,3173 \text{ t},$$

$$H_d = +0,1817 \text{ t}.$$

Sie können in Verbindung mit den übrigen äußeren Kräften zur Bestimmung der Schnittkräfte verwendet werden. Die Superposition nach (289) liefert

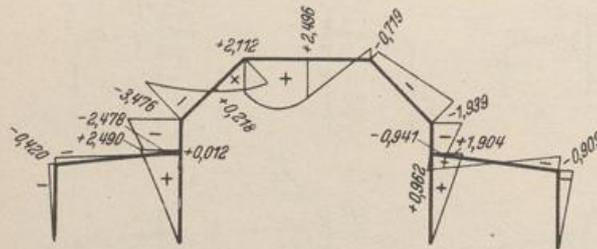


Abb. 202. Biegemomente infolge Schneelast.

$$M = M_0^{(2)} + 1,710 M_1^{(2)} + 0,768 M_2^{(2)} - 0,499 M_3^{(2)}.$$

Um die Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 202) nachzuweisen, wird festgestellt, daß die Summe der gegenseitigen Verdrehungen der Querschnitte l und r Null ist.

$$\delta_{10}^{(3)} = \int M_0^{(3)} M_1^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 16,81809 - 16,79790 = 0,02 \approx 0.$$

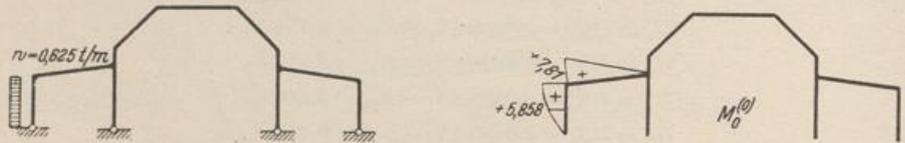


Abb. 203. Windbelastung.

8. Belastungsfall II: Waagerechte Belastung des Pfostens des Seitenschiffs durch Wind mit $w = 0,625 \text{ t/m}$.

Die Umordnung der Belastung ist bei dem einfachen Schaubild der Schnittkräfte $M_0^{(0)}$ nach Abb. 203 unnötig.

Belastungsglieder des Ansatzes:

$$\delta_{10}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +19,236,$$

$$\delta_{20}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +19,236,$$

$$\delta_{30}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +179,552;$$

$$X_1 = 2,048 \text{ mt}, \quad X_2 = 1,198 \text{ mt}, \quad X_3 = 0,496 \text{ t}, \quad X_4 = 0.$$

Nach Abschn. 61 wird

$$\Phi = \frac{2 + 0,833(4 + 5 \cdot 1,159)}{4 \cdot 4,456} = 0,5701 \text{ t};$$

$$H_{00}^{(2)} = -\frac{0,625 \cdot 5,00}{2} (-0,5701) = 0,891 \text{ t}; \quad H_{d0}^{(2)} = 0,891 - 0,625 \cdot 5,00 = -2,234 \text{ t}.$$

Die übrigen waagerechten Stützkräfte werden wiederum nach 6. berechnet.

$$H_a = -1,788 \text{ t}, \quad H_b = +0,841 \text{ t}, \quad H_c = -0,202 \text{ t}, \quad H_d = 0,294 \text{ t}.$$

Sie dienen zur Ermittlung der Schnittkräfte. Die Superposition nach (289) liefert

$$M = M_0^{(2)} - 2,048 M_1^{(2)} - 1,198 M_2^{(2)} - 0,496 M_3^{(2)}.$$

Zum Nachweis der Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 204) wird festgestellt, daß die gegenseitige Verschiebung der Stützpunkte der inneren Pfosten Null ist:

$$\delta_{30}^{(5)} = \int M_0^{(5)} M_3^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 51,618 - 51,617 = 0,001 \approx 0.$$

Das Hauptsystem mit Symmetrie nach zwei Achsen. Die Symmetrie des Tragwerks zu einer Achse führt mit der Bildung eines symmetrischen Hauptsystems zur

Symmetrie der Matrix in bezug auf die Nebendiagonale und zur Zerlegung des Ansatzes in zwei unabhängige Gruppen von Gleichungen. Durch die Addition und Sub-

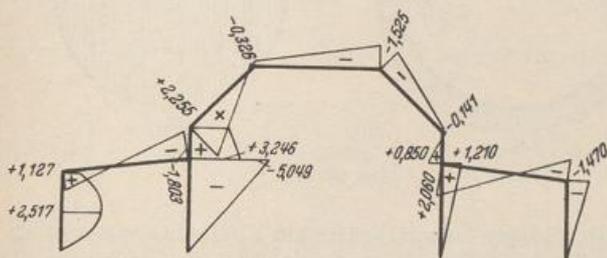


Abb. 204. Biegemomente infolge Windlast.

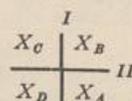


Abb. 205.

traktion von Gleichungen mit symmetrischen Ordnungsnummern sind neue Unbekannte entstanden, die in statischer Beziehung als Gruppen von überzähligen, zueinander symmetrisch liegenden Schnittkräften erkannt wurden.

Besitzt das Hauptsystem zwei Symmetrieachsen, so ist die Matrix durch vier Achsen ausgezeichnet. Der Ansatz kann dann durch wiederholte Addition und Subtraktion in vier voneinander unabhängige Teile λ, μ, ν, τ zerlegt werden. Die Unbekannten dieser Gleichungen bestehen aus Gruppen von je vier statisch unbestimmten, einander nach Abb. 205 symmetrisch zugeordneten Schnittkräften. Sie können ähnlich wie bei einfacher Symmetrie des Hauptsystems symmetrisch oder antisymmetrisch zu einer der beiden Achsen entwickelt und zur Bildung der vier unabhängigen Abschnitte des Ansatzes unmittelbar angeschrieben werden. Die Unbekannten U_k der Gleichungen λ sind zu beiden Achsen symmetrisch, die Unbekannten V_k des Ansatzes μ zu beiden Achsen antisymmetrisch. Die Unbekannten Y_k der Gleichungen ν sind symmetrisch zur Achse I und antisymmetrisch zur Achse II, die Unbekannten Z_k des Ansatzes τ antisymmetrisch zur Achse I und symmetrisch zur Achse II. Bilden daher X_A, X_B, X_C, X_D eine Gruppe statisch unbestimmter, einander symmetrisch zugeordneter Schnittkräfte, so ist

$$\left. \begin{aligned} U_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B + X_C + X_D), & Y_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B - X_C + X_D), \\ Z_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B - X_C - X_D), & V_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B + X_C - X_D). \end{aligned} \right\} (367)$$

Der Faktor $1/4$ ist durch die nachträgliche Erweiterung der Summanden der Ansätze λ bis τ entstanden, um die Schnittkräfte für $-U_k = 1$ aus der Belastung $-X_A = 1, -X_B = 1, -X_C = 1, -X_D = 1$ usw. zu entwickeln. Die Vorzeichen und die Belastungszahlen der Ansätze λ bis τ folgen aus derselben algebraischen Entwicklung wie die Gruppenlasten, also durch Addition und Subtraktion der Vorzeichen δ_{ik} und der Belastungszahlen δ_{k0} des allgemeinen Ansatzes. Sie erscheinen nach der erwähnten Erweiterung der linken Seiten der Gleichungen im vierfachen Betrage. Die Vorzeichen δ_{hh} und δ_{ht} aus $-X_h = 1$ werden jedoch dabei halbiert, wenn X_h eine überzählige Größe in der Symmetrieachse ist. Die Entwicklung kann nach dem An-

satz (362) auf S. 193 verfolgt werden. Die Vorzahlen der Ansätze λ bis τ werden je nach der Art der Gruppenbildung mit $\lambda_{hk}, \mu_{hk}, \nu_{hk}, \tau_{hk}$ bezeichnet und unabhängig von der algebraischen Grundlage ebenso wie auf S. 193 unmittelbar als die Arbeiten $1_k \cdot \lambda_{kh}, 1_k \cdot \mu_{kh}, 1_k \cdot \nu_{kh}, 1_k \cdot \tau_{kh}$ einer virtuellen Belastung $-U_k = 1, -V_k = 1, -Y_k = 1, -Z_k = 1$ bei einer Formänderung aus $-U_h = 1$ usw. entwickelt. Dasselbe gilt von den Belastungszahlen $\lambda_{k0}, \mu_{k0}, \nu_{k0}, \tau_{k0}$.

Die Gruppenlasten U bis Z können in dieser Form nur dann entwickelt

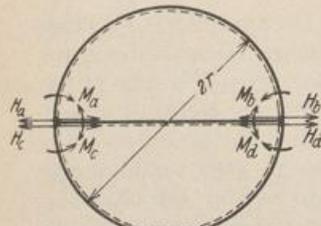


Abb. 206.

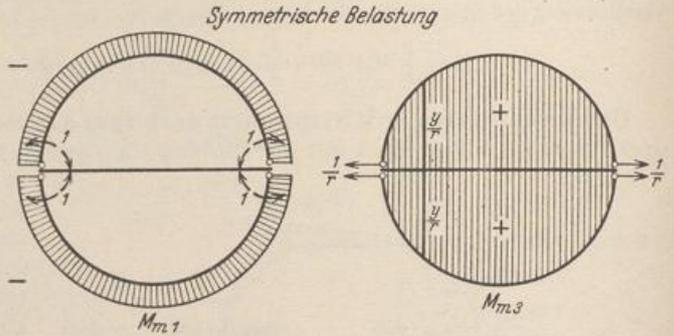


Abb. 207 a, b.

werden, wenn die Anzahl der überzähligen Schnittkräfte ein Vielfaches von vier ist. Sie werden deshalb unter Umständen durch symmetrisch liegende, statisch bestimmte Schnittkräfte ergänzt. Daher tritt in der Regel zur Bildung von Gruppenlasten die Umordnung der Belastung nach den ausgezeichneten Systemachsen (Abschnitt 27).

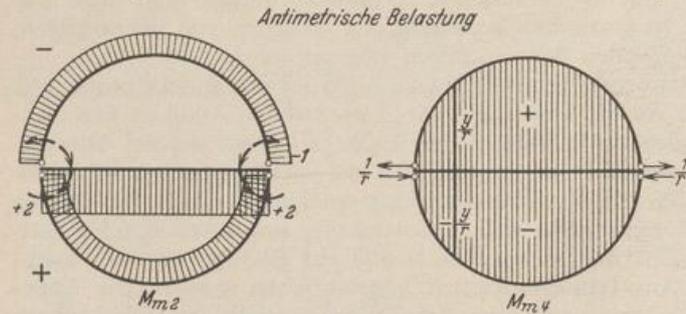


Abb. 207 c, d.

Ansatz und Lösung derartiger Aufgaben werden an der folgenden Rechnung gezeigt.

Der kreisförmige, durch eine Querwand unterteilte Behälterring (Abb. 206) ist sechsfach statisch unbestimmt. Er ist zu zwei Achsen symmetrisch. Um diese Eigenschaft für die Berechnung zu benutzen,

werden neben H_a und H_c auch H_b und H_d als äußere Kräfte verwendet, so daß durch deren Umordnung nach den vier Achsen acht überzählige Gruppenlasten entstehen. Da das Kräftebild auch bei der Füllung einer Kammer zur senkrechten Achse symmetrisch ist, sind die für diese Achse antisymmetrischen Gruppen Null. Daher werden nur die folgenden überzähligen Größen angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} U_1 = X_1 &= \frac{1}{4} (M_a + M_b + M_c + M_d), & U_2 = X_3 &= \frac{r}{4} (H_a + H_b + H_c + H_d), \\ Z_1 = X_2 &= \frac{1}{4} (M_a + M_b - M_c - M_d), & Z_2 = X_4 &= \frac{r}{4} (H_a + H_b - H_c - H_d). \end{aligned} \right\} (368)$$

Die Elastizitätsgleichungen entstehen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (156)

$$\delta_{10} - \sum \delta_{1k} X_k = 0 \quad \text{usw.}, \quad \delta_{40} - \sum \delta_{4k} X_k = 0; \quad k = 1, \dots, 4.$$

Die Vorzahlen haben die folgende Bedeutung:

$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \int N_1^2 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_c}{J} ds; \quad \delta_{40} = \frac{J_c}{F_c} \int N_0 N_1 \frac{F_c}{F} ds + \int M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds.$$

N_1 und M_1 sind die Schnittkräfte aus $-X_1 = 1, X_2 = X_3 = X_4 = 0$. Dieser Belastungszustand ist gleichbedeutend mit $-M_a = 1, -M_b = 1, -M_c = 1, -M_d = 1$ (Abb. 207 a).

1. Um die viergliedrige Matrix zur Bestimmung der überzähligen Größen $X_1 \dots X_4$ zu zerlegen, wird die Belastung in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten.

$$\text{Symmetrische Gruppe: } \begin{array}{|c|c|} \hline X_1 & X_3 \\ \hline \delta_{11} & \delta_{13} \\ \hline \delta_{31} & \delta_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \delta_{10} \\ \delta_{30} \end{array} \quad \text{Antisymmetrische Gruppe: } \begin{array}{|c|c|} \hline X_2 & X_4 \\ \hline \delta_{22} & \delta_{24} \\ \hline \delta_{42} & \delta_{44} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \delta_{20} \\ \delta_{40} \end{array}$$

2. Die Vorzahlen (Abb. 207):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 ds = 2r\pi; & \delta_{13} &= -2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} yr d\varphi = -4r, \\ \delta_{33} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y^2}{r^2} r d\varphi + 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{J_c}{F_c} r d\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^2 2r \frac{J_c}{F_c} = \pi r + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi}{r} + \frac{J_c}{F_c} \frac{8}{r}, \\ \delta_{22} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 r d\varphi + 2^2 \cdot 2r \frac{J_c}{F_c} = 2r(\pi + 4 \frac{J_c}{F_c}); & \delta_{24} &= -2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} yr d\varphi = -4r, \\ \delta_{44} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y^2}{r^2} r d\varphi + 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = \pi r + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi}{r}. \end{aligned}$$

3. Die Belastungszahlen für einen zur waagerechten Achse symmetrischen oder antisymmetrischen Wasserdruck p :

$$\begin{aligned} (1)\delta_{10} &= 0, & (1)\delta_{30} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} \cos \varphi pr \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = 4pr \frac{J_c}{F_c}, \\ (2)\delta_{20} &= 2 \cdot \frac{2}{3} p \frac{(2r)^2}{4} \cdot 2r \frac{J_c}{F_c}, & (2)\delta_{40} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \varphi \frac{1}{r} pr \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = 4pr \frac{J_c}{F_c}. \end{aligned}$$

4. Die überzähligen Größen sind nach den Ansätzen 1.:

$$\begin{aligned} (1)X_1 &= \frac{\delta_{10}\delta_{33} - \delta_{30}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2} = \frac{8pr \frac{J_c}{F_c}}{r(\pi^2 - 8) + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi^2}{r} + \frac{J_c}{F_c} 8 \frac{\pi}{r}}, \\ (1)X_3 &= \frac{\delta_{30}\delta_{11} - \delta_{10}\delta_{31}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2} = \frac{4p\pi r \frac{J_c}{F_c}}{r(\pi^2 - 8) + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi^2}{r} + \frac{J_c}{F_c} 8 \frac{\pi}{r}}, \\ (2)X_2 &= \frac{\delta_{20}\delta_{44} - \delta_{40}\delta_{24}}{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2} = pr \frac{\frac{4}{3} \pi \frac{J_c}{F_c} \left(r^2 + \frac{J_c}{F_c}\right) + 8 \frac{J_c}{F_c}}{\pi \left(4 \frac{J_c}{F_c} + \pi\right) \left(r + \frac{1}{r} \frac{J_c}{F_c}\right) - 8r}, \\ (2)X_4 &= \frac{\delta_{40}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{42}}{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2} = 4pr \frac{\frac{J_c}{F_c} \left(4 \frac{J_c}{F_c} + \pi\right) + \frac{4}{3} r^2 \frac{J_c}{F_c}}{\pi \left(4 \frac{J_c}{F_c} + \pi\right) \left(r + \frac{1}{r} \frac{J_c}{F_c}\right) - 8r}. \end{aligned}$$

5. Die Schnittkräfte aus der Füllung eines Abteils entstehen durch Überlagerung des symmetrischen und antisymmetrischen Anteils aus $p/2$. Daher ist bei Füllung beider Hälften des Behälters

$$M_a = M_b = M_c = M_d = X_1, \quad H_a = H_b = H_c = H_d = \frac{X_3}{r},$$

bei Füllung eines Abteils

$$M_a = M_b = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad M_c = M_d = \frac{X_1 - X_2}{2};$$

$$H_a = H_b = \frac{X_3 + X_4}{2r}; \quad H_c = H_d = \frac{X_3 - X_4}{2r}.$$

Die Abmessungen nach Abb. 208a liefern für $p = 6,0$ t/m folgendes Ergebnis:

$$J_c = \frac{0,15^3 \cdot 1,0}{12} = 0,000281 \text{ m}^4,$$

$$J_z = \frac{0,30^3 \cdot 1,0}{12} = 0,00225 \text{ m}^4,$$

$$F_c = 0,15 \cdot 1,0 = 0,15 \text{ m}^2,$$

$$F_z = 0,30 \cdot 1,0 = 0,30 \text{ m}^2,$$

$$J_c : J_z = 0,125,$$

$$J_c : F_c = 0,001873 \text{ m}^2,$$

$$J_c : F_z = 0,000936 \text{ m}^2,$$

$$X_1 = 8 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873}{5,0 (\pi^2 - 8) + 0,001873 \cdot \frac{\pi^2}{5,0} + 0,000936 \cdot \frac{8\pi}{5,0}} = 0,0478 \text{ mt},$$

$$X_2 = 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{1,333\pi \cdot 0,125 (5,0^2 + 0,001873) + 8 \cdot 0,001873}{\pi (4 \cdot 0,125 + \pi) \left(5,0 + \frac{0,001873}{5,0} \right) - 8 \cdot 5,0} = 22,85 \text{ mt},$$

$$X_3 = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873 \cdot \pi}{5,0 (\pi^2 - 8) + 0,001873 \cdot \frac{\pi^2}{5,0} + 0,000936 \cdot \frac{8\pi}{5,0}} = 0,0751 \text{ mt},$$

$$X_4 = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873 (4 \cdot 0,125 + \pi) + 1,333 \cdot 5,0^2 \cdot 0,125}{\pi (4 \cdot 0,125 + \pi) \left(5,0 + \frac{0,001873}{5,0} \right) - 8 \cdot 5,0} = 29,15 \text{ mt}.$$

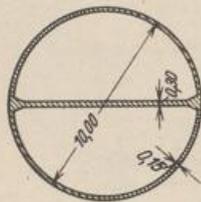
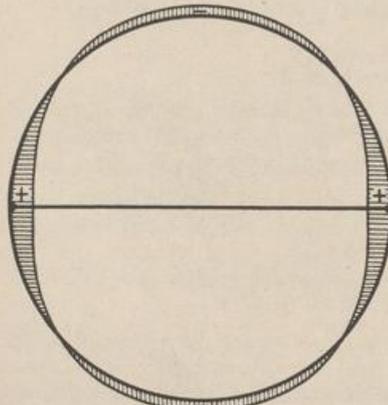
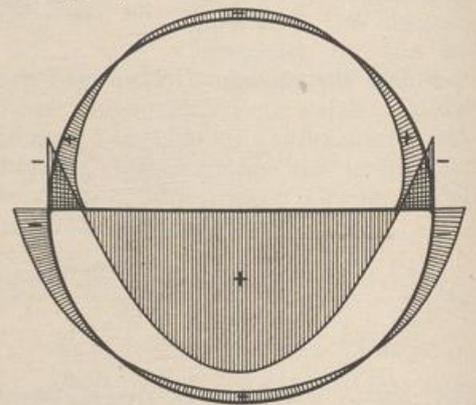


Abb. 208a.



Füllung beider Kammern,
1 mt \equiv 66% mm.



Füllung einer Kammer,
1 mt \equiv 0,4 mm.

Abb. 208b. Biegemomente.

Statische Untersuchung eines Kühlturmunterbaues. Um auch die Bedeutung der mehrfachen Symmetrie eines Tragwerks für die Vereinfachung der statischen

Untersuchung zu zeigen, wird ein waagrecht liegendes Stabeck berechnet, dessen Knotenpunkte durch senkrechte, am unteren Ende eingespannte Pfosten frei drehbar gestützt sind. Das Tragwerk hat 24 statisch unbestimmte Schnittkräfte X_k , deren Abhängigkeit bei unregelmäßiger Gliederung des Stabwerks neungliedrige Elastizitätsgleichungen liefert (Abb. 209).

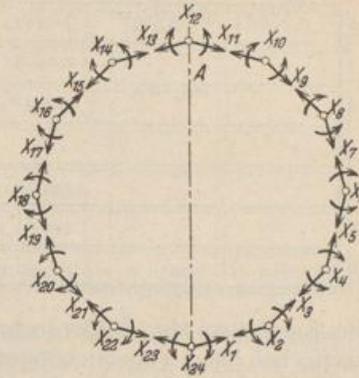


Abb. 209.

Da die Aufgabe hier für ein Tragwerk mit zyklischer Symmetrie gelöst werden soll, können alle Vorzahlen des Ansatzes aus den Biegemomenten M_{24} , M_1 des Hauptsystems Abb. 210 für $-X_{24} = 1$, $-X_1 = 1$ abgeleitet werden. Die Trägheitsmomente des Pfostens für die radial und tangential gerichteten Hauptachsen des Querschnitts sind J_r , J_t , die Trägheitsmomente des Ringstabes J_l .

Um auch ähnliche Tragwerke mit anderen Abmessungen zu vergleichen, werden statt der EJ_c -fachen Verschiebungen δ'_{ik} Vorzahlen $\delta_{ik} = \frac{3}{h^3} \delta'_{ik}$ verwendet. Sie entstehen aus folgendem Ansatz:

$$\delta'_{24,24} = \dots \delta'_{22,22} = \frac{1,932^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_l} + 2 \frac{0,966^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_l} + 2 \frac{0,259^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_r} + 2 \frac{s^3}{3} \frac{J_c}{J_l},$$

$$\delta'_{23,23} = \dots \delta'_{21,21} = 2 \frac{0,259^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_l} + 2 \frac{0,966^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_r}, \quad \frac{3}{h^3} \delta'_{ik} = \delta_{ik}.$$

Geometrische Abmessungen des Tragwerks:

$$J_t = J_l = J_c \quad \text{und} \quad J_r = \frac{1}{4} J_c; \quad h = 12 \text{ m}, \quad s = 6,73 \text{ m}.$$

Vorzahlen der geometrischen Bedingungen $\delta_{24} = 0$ und $\delta_1 = 0$:

$$\delta_{24,24} = \delta_{2,2} = \dots = 1,932^2 + 2 \cdot 0,966^2 + 8 \cdot 0,259^2 + 2 \left(\frac{s}{h}\right)^3 = + 6,489,$$

$$\delta_{23,24} = \delta_{1,24} = 0,259 \cdot 1,932 - 0,259 \cdot 0,966 + 0,966 \cdot 0,259 \cdot 4 = + 1,25097,$$

$$\delta_{22,24} = \delta_{2,24} = -0,966 \cdot 1,932 - 1,932 \cdot 0,966 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{h}\right)^3 = - 3,64434,$$

$$\delta_{21,24} = \delta_{3,24} = -0,259 \cdot 0,966 - 4 \cdot 0,966 \cdot 0,259 = - 1,25097,$$

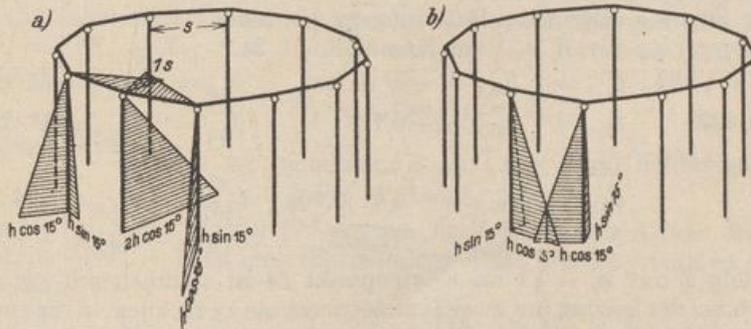
$$\delta_{20,24} = \delta_{4,24} = + 0,966^2 - 4 \cdot 0,259^2 = + 0,66484,$$

$$\delta_{23,23} = \delta_{1,1} = \dots = 2 \cdot 0,259^2 + 8 \cdot 0,966^2 = 7,6,$$

$$\delta_{1,24} = \delta_{1,2} = 1,932 \cdot 0,259 - 0,966 \cdot 0,259 + 4 \cdot 0,259 \cdot 0,966 = + 1,25097,$$

$$\delta_{1,23} = \delta_{1,3} = 0,259^2 - 4 \cdot 0,966^2 = - 3,66562,$$

$$\delta_{1,22} = \delta_{1,4} = -0,259 \cdot 0,966 - 0,259 \cdot 0,966 \cdot 4 = - 1,25097.$$



- $X_{24} = 1$, M_{24} ,
 - $X_1 = 1$, M_1 .
 Abb. 210. Momentenflächen im statisch bestimmten Hauptsystem.

Matrix der Vorzahlen δ_{ik} .

	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_1	X_2	X_3
24	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 6,48900	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097
1			- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562
2			+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 6,48900	+ 1,25097
3					- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000
4					+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097
5							- 1,25097	- 3,66562
6							+ 0,66484	- 1,25097

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung wiederholen sich infolge der zyklischen Symmetrie bei allen Verschiebungen, deren Indizes gleichzeitig um ein Vielfaches von zwei erhöht sind.

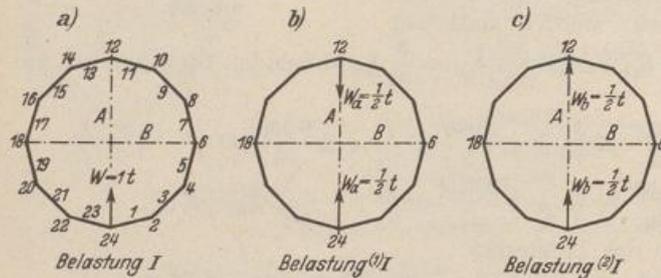


Abb. 211.

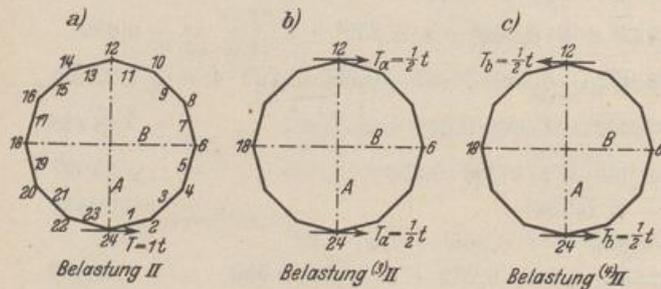


Abb. 212.

führt werden. Beide werden einzeln untersucht, um daraus durch Superposition die Lösung für eine allgemeine Belastung zu gewinnen.

Belastungszahlen für $W = 1$ im Knotenpunkt 24.

$$\delta'_{24,0} = -\frac{1}{3}h^3 \cdot 1,932, \quad \delta'_{1,0} = \delta'_{23,0} = -h^3 \cdot 0,259, \quad \delta'_{2,0} = \delta'_{22,0} = h^3 \cdot 0,966,$$

$$\delta_{24,0} = -1,932, \quad \delta_{1,0} = \delta_{23,0} = -0,777, \quad \delta_{2,0} = \delta_{22,0} = h^3 \cdot 2,898.$$

Belastungszahlen für $T = 1$ t im Knotenpunkt 24.

$$\delta'_{24,0} = 0, \quad \delta'_{1,0} = -\delta'_{23,0} = -4h^3 \cdot 0,966, \quad \delta'_{2,0} = -\delta'_{22,0} = -4h^3 \cdot 0,259,$$

$$\delta_{24,0} = 0, \quad \delta_{1,0} = -\delta_{23,0} = -11,592, \quad \delta_{2,0} = -\delta_{22,0} = -3,108.$$

Die Belastung I mit $W = 1$ t im Knotenpunkt 24 ist symmetrisch zur Achse A . Sie wird, um bei der Lösung mit zwei Symmetrieachsen zu rechnen, in die zur Achse B symmetrische Belastung $^{(1)}I$ mit $W_a = \frac{1}{2} t$ und in die zur Achse B antisymmetrische Belastung $^{(2)}I$ mit $W_b = \frac{1}{2} t$ in den Knoten 12 und 24 aufgespalten (Abb. 211).

X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
+ 0,66484							24
- 1,25097							1
- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484					2
+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097					3
+ 6,48900	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484			4
+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097			5
- 3,64435	+ 1,25097	+ 6,48900	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	6

Die Belastung II mit $T = 1$ t am Knotenpunkt 24 ist antimetrisch zur Achse A . Sie wird, um bei der Lösung mit zwei Symmetrieachsen zu rechnen, in die zur Achse B symmetrische Belastung $^{(3)}II$ mit $T_a = \frac{1}{2}$ t und in die zur Achse B antimetrische Belastung $^{(4)}II$ mit $T_b = \frac{1}{2}$ t in den Knotenpunkten 12 und 24 aufgespalten (Abb. 212).

Darnach ist jede Teilbelastung zu zwei ausgezeichneten Achsen A, B des Tragwerks symmetrisch oder antimetrisch, so daß das Kräftebild nach (367) mit einer vierfachen Umordnung der zu den Achsen A, B zugeordneten Schnittkräfte, also mit den Gruppenlasten U, V, Y, Z beschrieben werden kann. Diese werden nach S. 205 mit der folgenden Tabelle als Funktionen der statisch unbestimmten Schnittkräfte X_k des allgemeinen Ansatzes entwickelt. Der Vordersatz enthält das Bildungsgesetz der Gruppenlasten, Vorzeichen und Belastungszahlen, der Nachsatz die Schnittkräfte X_k jeder Gruppenlast.

λ	μ	ν	τ							
U	V	Y	Z	24	1	2	3	4	5	6
+	+	+	+	X_{24}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
+	-	-	+	X_{12}	X_{11}	X_{10}	X_9	X_8	X_7	X_6
+	+	-	-	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}
+	-	+	-	X_{24}	X_{23}	X_{22}	X_{21}	X_{20}	X_{19}	X_{18}

1. Belastung $^{(1)}I$ mit zwei zu beiden Achsen A, B symmetrisch liegenden Kräften W_a in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 211 b). Die Belastungszahlen $\mu_{k0}, \nu_{k0}, \tau_{k0}$ sind Null. Dasselbe gilt daher auch von den Gruppenlasten V, Y, Z . Dagegen sind die Gruppenlasten $U_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_{11} + X_{13} + X_{23})$ usw. mit $\lambda_{1,0}$ usw. von Null verschieden. Hieraus folgt

$$U_1 = X_1 = X_{11} = X_{13} = X_{23}.$$

$$\text{Belastungszustand } -U_1 = 1 \text{ mit } -X_1 = -X_{11} = -X_{13} = -X_{23} = 1,$$

$$-U_{24} = 1 \text{ mit } -X_{24} = -X_{12} = 1.$$

Die Vorzeichen λ_{k1} der Matrix $^{(1)}I$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräftegruppe $-U_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-U_k = 1$ angeschrieben.

$$\begin{aligned} 1_1 \lambda_{1,1} &= 1 \delta_{(1+11+13+23)(1+11+13+23)} = 4(\delta_{1,1} + \delta_{1,11} + \delta_{1,13} + \delta_{1,23}) \\ &= 4(7,60000 + 0 + 0 - 3,66562) = 4 \cdot 3,93438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1_1 \lambda_{1,24} &= 1 \delta_{(1+11+13+23)(24+12)} = 2(\delta_{24,1} + \delta_{24,11} + \delta_{24,13} + \delta_{24,23}) \\
 &= 2(1,25097 + 0 + 0 + 1,25097) = 4 \cdot 1,25097, \\
 1_{24} \lambda_{24,24} &= 1 \delta_{(24+12)(24+12)} = 2 \delta_{24,24} = 2 \cdot 6,48900 = 4 \cdot 3,24450, \\
 1_1^{(1)} \lambda_{1,0} &= 1^{(1)} \delta_{(1+11+13+23)0} = 4^{(1)} \delta_{10} = 4(-0,3885).
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die Matrix für die Belastung $^{(1)}I$.

	U_{24}	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	
24	+ 3,24450	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	—	—	- 1,449
1	+ 1,25097	+ 3,93438	—	- 3,66562	- 1,25097	—	—	- 0,3885
2	- 3,64435	—	+ 7,15384	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	+ 1,449
3	- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097	
4	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 7,15384	—	- 3,64435	
5	—	—	- 1,25097	- 3,66562	—	+ 3,93438	+ 1,25097	
6	—	—	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 3,24450	

Die Matrix ist zur Nebendiagonale symmetrisch und wird ebenso wie nach S. 192 durch Addition und Subtraktion zugeordneter Gleichungen berechnet. Dabei entstehen mit

$$U_{24} + U_6 = S_1, \quad U_1 + U_5 = S_2, \quad U_2 + U_4 = S_3, \quad 2U_3 = S_4$$

und

$$U_{24} - U_6 = T_1, \quad U_1 - U_5 = T_2, \quad U_2 - U_4 = T_3$$

folgende Ansätze

	S_1	S_2	S_3	S_4	
1	+ 3,24450	+ 1,25097	- 2,97950	- 1,25097	- 1,4490
2	+ 1,25097	+ 3,93438	- 1,25097	- 3,66562	- 0,3885
3	- 2,97950	- 1,25097	+ 3,50950	+ 1,25097	+ 1,4490
4	- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 3,80000	

	T_1	T_2	T_3	
1	+ 3,24450	+ 1,25097	- 4,30918	- 1,4490
2	+ 1,25097	+ 3,93438	+ 1,25097	- 0,3885
3	- 4,30918	+ 1,25097	+ 10,79818	+ 1,4490

2. Belastung $^{(2)}I$ mit zwei zur Achse A symmetrischen und zur Achse B antisymmetrischen Kräften $W_b = \frac{1}{2} t$ in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 211c). Die Belastungszahlen $\lambda_{k0}, \mu_{k0}, \tau_{k0}$ sind Null. Dasselbe gilt daher auch von den Gruppenlasten U, V, Z . Die Gruppenlasten $Y_1 = \frac{1}{4}(X_1 - X_{11} - X_{13} + X_{23})$ usw. sind mit ν_{10} usw. von Null verschieden. Hieraus folgt

$$Y_1 = +X_1 = -X_{11} = -X_{13} = +X_{23}.$$

Belastungszustand $-Y_1 = 1$ mit $-X_1 = 1, +X_{11} = 1, +X_{13} = 1, -X_{23} = 1,$
 $-Y_{24} = 1$ mit $-X_{24} = 1, +X_{12} = 1.$

Die Vorzahlen $v_{k\lambda}$ der Matrix $^{(2)}I$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräftegruppe $-Y_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-Y_\lambda = 1$ angeschrieben. Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
 I_1 v_{1,1} &= 1 \delta_{(1-11-13+23)(1-11-13+23)} = 4 (\delta_{1,1} - \delta_{1,11} - \delta_{1,13} + \delta_{1,23}) \\
 &= 4 (7,60000 - 0 - 0 - 3,66562) = 4 \cdot 3,93438, \\
 I_1 v_{1,24} &= 1 \delta_{(1-11-13+23)(24-12)} = 2 (\delta_{1,24} - \delta_{11,24} - \delta_{13,24} + \delta_{23,24}) \\
 &= 2 (1,25097 - 0 - 0 + 1,25097) = 4 \cdot 1,25097, \\
 I_{24} v_{24,24} &= 1 \delta_{(24-12)(24-12)} = 2 \delta_{24,24} = 2 \cdot 6,48900 = 4 \cdot 3,24450, \\
 I_1^{(2)} v_{1,0} &= 1^{(2)} \delta_{(1-11-13+23)0} = 4^{(2)} \delta_{10} = 4 (-0,3885), \\
 I_{24}^{(2)} v_{24,0} &= 1^{(2)} \delta_{(24-12)0} = 2^{(2)} \delta_{24,0} = 4 (-1,449).
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die folgende Matrix der Gruppenlasten Y_k .

	Y_{24}	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
24	+ 3,24450	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	-	- 1,449
1	+ 1,25097	+ 3,93438	-	- 3,66562	- 1,25097	-	- 0,3885
2	- 3,64435	-	+ 7,15384	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 1,449
3	- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	
4	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 5,82416	+ 2,50194	
5	-	-	- 1,25097	- 3,66562	+ 2,50194	+ 11,26562	

3. Belastung $^{(3)}II$ mit zwei zur Achse A antimetrischen zur Achse B symmetrischen Lasten $T_a = \frac{1}{2} t$ in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 212b)

$$\begin{aligned}
 U = 0, \quad V = 0, \quad Y = 0, \quad Z_1 = \frac{1}{4} (X_1 + X_{11} - X_{13} - X_{23}) = 0, \\
 Z_1 = X_1 = X_{11} = -X_{13} = -X_{23}.
 \end{aligned}$$

Belastungszustand $-Z_1 = 1$ mit $-X_1 = 1, -X_{11} = 1, +X_{13} = 1, +X_{23} = 1,$
 Belastungszustand $-Z_6 = 1$ mit $-X_6 = 1, +X_{18} = 1.$

Die Vorzahlen $\tau_{k\lambda}$ der Matrix $^{(3)}II$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräftegruppe $-Z_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-Z_\lambda = 1$ angeschrieben. Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
 I_1 \tau_{1,1} &= 1 \delta_{(1+11-13-23)(1+11-13-23)} = 4 (\delta_{1,1} + \delta_{1,11} - \delta_{1,13} - \delta_{1,23}) \\
 &= 4 (7,60000 + 0 - 0 + 3,65562) = 4 \cdot 11,26562, \\
 I_1^{(3)} \tau_{1,0} &= 1 \delta_{(1+11-13-23)0} = 4^{(3)} \delta_{10} = 4 (-5,796).
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die Matrix für die Gruppenlasten Z_k der Belastung $^{(3)}II$

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	
1	+ 11,26562	+ 2,50194	- 3,66562	- 1,25097	—	—	- 5,796
2	+ 2,50194	+ 5,82416	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	- 1,554
3	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097	
4	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 7,15384	—	- 3,64435	
5	—	- 1,25097	- 3,66562	—	+ 3,93438	+ 1,25097	
6	—	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 3,24450	

4. Belastung $^{(4)}II$ mit zwei zu beiden Achsen A, B antimetrischen Kräften $T_b = \frac{1}{2} t$ in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 212c)

$$U = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad V_1 = \frac{1}{4}(X_1 - X_{11} + X_{13} - X_{23}) + 0,$$

$$V_1 = + X_1 = - X_{11} = + X_{13} = - X_{23},$$

Belastungszustand $-V_1 = 1$ mit $-X_1 = 1, +X_{11} = 1, -X_{13} = 1, +X_{23} = 1$. Die Vorzeichen μ_{kh} der Matrix $^{(4)}II$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräfte $-V_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-V_h = 1$ angeschrieben. Die Rechnung liefert

$$1_1 \mu_{1,1} = 1 \delta_{(1-11+13-23)(1-11+13-23)} = 4(\delta_{1,1} - \delta_{1,11} + \delta_{1,13} - \delta_{1,23}) \\ = 4(7,60000 - 0 + 0 + 3,66562) = 4 \cdot 11,26562,$$

$$1_1^{(4)} \mu_{1,0} = 1 \delta_{(1-11+13-23)0} = 4^{(4)} \delta_{10} = 4(-5,796).$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die Matrix für die Gruppenlasten V_k der Belastung $^{(4)}II$.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
1	+ 11,26562	+ 2,50194	- 3,66562	- 1,25097	—	- 5,796
2	+ 2,50194	+ 5,82416	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	- 1,554
3	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	
4	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 5,82416	+ 2,50194	
5	—	- 1,25097	- 3,66562	+ 2,50194	+ 11,22562	

Die Ansätze $^{(2)}I, ^{(3)}II$ zur Berechnung der Gruppenlasten Y, Z lassen sich im vorliegenden Falle ineinander überführen, da die Achsen A und B miteinander vertauscht werden können.

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen der vier Gruppen bereitet bei Beachtung der Rechenvorschriften Abschnitt 29 keine Schwierigkeiten. Die Superposition der Teilergebnisse zur Bildung der statisch unbestimmten Schnittkräfte

aus einer vorgeschriebenen Belastung der Rahmenstellung nach Abb. 213 (Windrichtung winkelrecht zu Stab 23) geschieht mit zyklischer Vertauschung der Ergebnisse und liefert folgende Lösung. Sie dient zur Berechnung der übrigen Biegemomente (Abb. 214).

Längskräfte	X_{23}	$X_1 = X_{21}$	$X_3 = X_{19}$	$X_5 = X_{17}$	$X_7 = X_{15}$	$X_9 = X_{13}$	X_{11}
t	+ 32,94	+ 21,40	- 0,72	- 12,92	- 12,20	- 8,48	- 7,10
Momente	$X_{22} = X_{24}$	$X_{20} = X_2$	$X_{18} = X_4$	$X_{16} = X_6$	$X_{14} = X_8$	$X_{12} = X_{10}$	—
mt	+ 40,222	- 6,247	- 40,626	- 27,463	+ 6,247	+ 27,867	—

Die Untersuchung kann als Grundlage für die vollständige Beurteilung des räumlichen Zusammenhangs der Konstruktion bei Einspannung der Pfosten im Stabeck

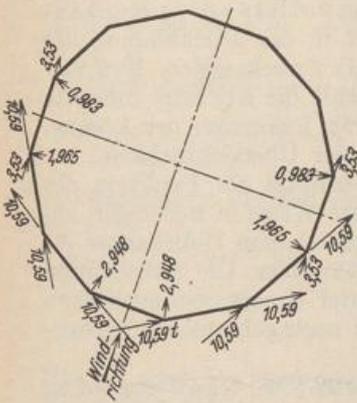


Abb. 213.

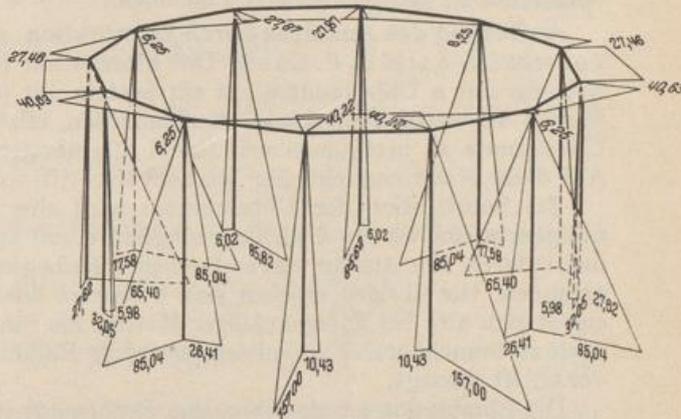


Abb. 214. Biegemomente aus Belastung nach Abb. 213.

mit oder ohne Berücksichtigung des Verdrehungswiderstandes der Pfosten und Riegel verwendet werden.

Andrée, L.: Das B.U.-Verfahren. München 1922. — Hertwig, A.: Zur Berechnung symmetrischer statisch unbestimmter Gebilde. Bauing. 1928 Heft 10 und 11. — Vinzenz, J.: Beitrag zur Berechnung des kontinuierlichen Trägers. Bauing. 1921, S. 695.

29. Algebraische Auflösung der Bedingungsgleichungen.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte eines Stabwerks werden je nach der Art der Aufgabe für eine ausgezeichnete Belastung oder nach zahlreichen äußeren Ursachen getrennt angegeben, um daraus die für die Verwendung ungünstigsten Grenzwerte zu entwickeln. Während die Belastungszahlen δ_{k0} , $\delta_{k0}^{(n-h)}$ oder $\delta_{k\infty}$, $\delta_{k\infty}^{(n-h)}$ in dem einen Falle in die Auflösung einbezogen werden, ist im anderen die Berechnung der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit Hilfe der zu den Vorzahlen δ_{ik} konjugierten Matrix meist einfacher und übersichtlicher. Sie werden dann je nach der Art des Hauptsystems in der folgenden Form angeschrieben:

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki} \delta_{i0}, \quad (k = 1 \dots n); \quad X_k = \sum_{i=1}^{i=h} \beta_{ki} \delta_{i0}^{(n-h)}, \quad (k = 1 \dots h). \quad (369)$$

Jede Aufgabe besteht in der Auflösung von n oder $(n - h)$ linearen Gleichungen mit ebensoviel überzähligen Größen. Sie ist in formaler Beziehung elementar. Schwierig-

keiten entstehen unter Umständen nur durch die Fehlerfortpflanzung der Zahlenrechnung. Diese darf erst dann als beseitigt angesehen werden, wenn die Nennerdeterminante nicht wesentlich kleiner ist als das Produkt der Glieder der Hauptdiagonale.

Die Berechnung mit Determinanten nach S. 166 ist nur bei einer kleinen Anzahl von Wurzeln am Platze, die leicht mit Unterdeterminanten angeschrieben werden können. In allen anderen Fällen wird zunächst eine Wurzel durch Elimination oder Substitution der übrigen gewonnen. Diese selbst folgen dann durch Rekursion. Dabei verdient diejenige Rechenvorschrift den Vorzug, deren Zwischenergebnisse übersichtlich und nachprüfbar angeschrieben und deren Endergebnisse mit der kleinsten Stellenzahl einwandfrei erhalten werden. Die Lösungsfehler treten um so mehr zurück, je größer die Nennerdeterminanten aller Zwischenstufen bleiben. Daher ist die Elimination nach Gauß stets dann am Platze, wenn die Vorzahlen δ_{kk} in der Hauptdiagonale der Matrix groß gegenüber den Nebengliedern sind und diese selbst nach dem Rand zu der Größe nach abnehmen.

Auflösung des Ansatzes durch Elimination. a) Die vollständige Rechenvorschrift nach C. F. Gauß. Die Elimination beruht in der Rückbildung des Systems mit n Unbekannten auf ein System mit $(n - 1)$ Unbekannten. Man verwendet Vorwärts- oder Rückwärtselimination, um zunächst die n te oder die erste Unbekannte zu bestimmen und findet alle übrigen durch Rekursion der Lösung. Auf diese Weise entsteht eine Rechenvorschrift von großer Übersichtlichkeit.

Bei Substitution der Unbekannten wird eine Unbekannte als Funktion der übrigen in eine andere Gleichung eingesetzt und auf diese Weise in beliebiger, zumeist durch den Ansatz vorgeschriebener Reihenfolge zuerst eine Unbekannte X_k gefunden. Die übrigen ergeben sich wiederum durch Rekursion. Die Substitution eignet sich also bei unregelmäßiger Matrix. Sie führt unter Umständen auch dann noch zu brauchbaren Ergebnissen, wenn die Elimination nach gebundener Rechenvorschrift versagt.

Die Elimination ist als gebundene Rechenvorschrift von C. F. Gauß angegeben worden und als Gaußscher Algorithmus in der Geodäsie seit langem zur Lösung der Normalgleichungen bekannt. Hierbei wird bei n Unbekannten in n Eliminationsstufen stets die linksstehende Unbekannte ausgeschlossen, indem die in geeigneter Form erweiterte erste oder letzte Gleichung von den übrigen Gleichungen der Eliminationsstufe abgezogen wird. Zur Nachprüfung der Zahlenrechnung jeder Elimination werden die algebraischen Summen der Vorzahlen δ_{ik} jeder Zeile gebildet und als Zeilen- oder Quersummen ($\delta_{1\Sigma} \dots \delta_{n\Sigma}$) mitgeführt.

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_k \delta_{1k} + \dots + X_n \delta_{1n} = \delta_{10},$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_k \delta_{2k} + \dots + X_n \delta_{2n} = \delta_{20},$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + \dots + X_k \delta_{3k} + \dots + X_n \delta_{3n} = \delta_{30},$$

$$\vdots$$

$$X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_k \delta_{nk} + \dots + X_n \delta_{nn} = \delta_{n0}.$$

$$\delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n} \quad \text{oder} \quad \delta_{1\Sigma'} = \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{10}. \quad (370)$$

Bei Vorwärtselimination wird die erste Gleichung der Reihe nach mit

$$-x_{12} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \quad -x_{13} = -\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}, \quad \dots, \quad -x_{1n} = -\frac{\delta_{n1}}{\delta_{11}} \quad (371)$$

erweitert und zu den folgenden addiert.

$$\left. \begin{aligned} X_2 \left(\delta_{22} - \delta_{12} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} \right) + X_3 \left(\delta_{23} - \delta_{13} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} \right) + \dots + X_k \left(\delta_{2k} - \delta_{1k} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} \right) + \dots + X_n \left(\delta_{2n} - \delta_{1n} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} \right) \\ = \delta_{20} - \delta_{10} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}; \quad \delta_{2\Sigma} - \delta_{1\Sigma} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \quad \text{oder} \quad \delta_{2\Sigma'} - \delta_{1\Sigma'} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \\ X_2 \left(\delta_{32} - \delta_{12} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}} \right) + X_3 \left(\delta_{33} - \delta_{13} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}} \right) + \dots + X_k \left(\delta_{3k} - \delta_{1k} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}} \right) + \dots + X_n \left(\delta_{3n} - \delta_{1n} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}} \right) \\ = \delta_{30} - \delta_{10} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}; \quad \delta_{3\Sigma} - \delta_{1\Sigma} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}, \quad \text{oder} \quad \delta_{3\Sigma'} - \delta_{1\Sigma'} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}. \end{aligned} \right\} (372)$$

Auf diese Weise ist X_1 ausgeschlossen und die erste Eliminationsstufe mit $(n - 1)$ Gleichungen gebildet worden. Sie ist nach dem Ergebnis der Rechnung unter Beachtung des Maxwell'schen Gesetzes ebenfalls zur Hauptdiagonale symmetrisch. Ihre Vorzahlen erhalten im Sinne von C. F. Gauß folgende Bezeichnung:

$$\left. \begin{aligned} X_2 \delta_{22}^{(1)} + X_3 \delta_{23}^{(1)} + \dots + X_k \delta_{2k}^{(1)} + \dots + X_n \delta_{2n}^{(1)} = \delta_{20}^{(1)}; \quad \delta_{2\Sigma}^{(1)}, \quad \delta_{2\Sigma'}^{(1)}, \\ X_2 \delta_{32}^{(1)} + X_3 \delta_{33}^{(1)} + \dots + X_k \delta_{3k}^{(1)} + \dots + X_n \delta_{3n}^{(1)} = \delta_{30}^{(1)}; \quad \delta_{3\Sigma}^{(1)}, \quad \delta_{3\Sigma'}^{(1)}. \end{aligned} \right\} (373)$$

Die Richtigkeit der Zahlenrechnung wird durch die folgende Identität festgestellt:

$$\delta_{2\Sigma}^{(1)} = \delta_{22}^{(1)} + \delta_{23}^{(1)} + \dots + \delta_{2n}^{(1)} = \delta_{2\Sigma} - \delta_{1\Sigma} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \quad (374)$$

$$\delta_{2\Sigma'}^{(1)} = \delta_{2\Sigma}^{(1)} + \delta_{20}^{(1)}. \quad (375)$$

Hierauf wird X_2 ausgeschlossen, indem die erste Gleichung der ersten Stufe der Reihe nach mit $-\kappa_{23} = -\delta_{32}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$; $-\kappa_{24} = -\delta_{42}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$ erweitert und zu den folgenden addiert wird. Auf diese Weise wird die zweite Eliminationsstufe mit $(n - 2)$ Unbekannten $X_3 \dots X_n$ gebildet. Ihre Vorzahlen führen die Bezeichnung $\delta_{33}^{(2)} \dots \delta_{3n}^{(2)}$ usw. Die Richtigkeit der Rechnung folgt aus

$$\delta_{3\Sigma}^{(2)} = \delta_{33}^{(2)} + \delta_{34}^{(2)} + \dots + \delta_{3n}^{(2)} = \delta_{3\Sigma}^{(1)} - \delta_{2\Sigma}^{(1)} \frac{\delta_{32}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad \delta_{3\Sigma'}^{(1)} = \delta_{3\Sigma} - \delta_{1\Sigma} \frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}.$$

Die Elimination ergibt schließlich

$$X_n = \frac{\delta_{n0}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}}. \quad (376)$$

In dem Ansatz (372) ist $1 \delta_{21}/\delta_{11}$ die überzählige Größe X_{12} , welche von $-X_2 = 1$ erzeugt wird. Demnach sind

$$\delta_{22} - \delta_{12} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \delta_{22}^{(1)}, \quad \delta_{2k} - \delta_{1k} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \delta_{k2} - \delta_{k1} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \delta_{2k}^{(1)} \quad (377)$$

die Verschiebungen der Punkte $2 \dots k$, welche aus $-X_2 = 1$ und gleichzeitig durch die $-X_2 = 1$ zugeordnete überzählige Größe X_{12} entstehen. $\delta_{22}^{(1)} \dots \delta_{2k}^{(1)}$ sind also Verschiebungen in einem einfach statisch unbestimmten Hauptsystem, in dem X_1 nicht mehr als überzählige Größe auftritt. Ebenso können $\delta_{33}^{(2)} \dots \delta_{3k}^{(2)}$ als die Verschiebungen der Punkte $3 \dots k$ eines zweifach statisch unbestimmten Hauptsystems angesehen werden, in dem X_1 und X_2 nicht mehr als überzählige Größen enthalten sind.

Vollständige Vorwärtselimination für fünf überzählige Größen (378).

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
I	1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{10}	$\delta_{22}^{(1)} = \delta_{22} - \kappa_{12} \delta_{12},$ $\delta_{33}^{(1)} = \delta_{33} - \kappa_{12} \delta_{13},$ $\delta_{44}^{(1)} = \delta_{44} - \kappa_{12} \delta_{14},$ $\delta_{55}^{(1)} = \delta_{55} - \kappa_{12} \delta_{15},$
			κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	—	
	2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{20}	
	3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{30}	$\kappa_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}};$
	4	δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{40}	$\delta_{33}^{(2)} = \delta_{33}^{(1)} - \kappa_{23} \delta_{23}^{(1)}$ $= \delta_{33} - \kappa_{13} \delta_{13} - \kappa_{23} \delta_{23}^{(1)},$
II	2 ⁽¹⁾		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$	$\delta_{34}^{(2)} = \delta_{34} - \kappa_{13} \delta_{14} - \kappa_{23} \delta_{24}^{(1)},$ $\delta_{55}^{(2)} = \delta_{55} - \kappa_{13} \delta_{15} - \kappa_{23} \delta_{25}^{(1)},$
				κ_{23}	κ_{24}	κ_{25}	—	$\kappa_{13} = \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}};$
	3 ⁽¹⁾		$\delta_{32}^{(1)}$	$\delta_{33}^{(1)}$	$\delta_{34}^{(1)}$	$\delta_{35}^{(1)}$	$\delta_{30}^{(1)}$	$\kappa_{23} = \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};$
	4 ⁽¹⁾		$\delta_{42}^{(1)}$	$\delta_{43}^{(1)}$	$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$	
	5 ⁽¹⁾		$\delta_{52}^{(1)}$	$\delta_{53}^{(1)}$	$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$	$\delta_{44}^{(3)} = \delta_{44}^{(2)} - \kappa_{34} \delta_{34}^{(2)}$ $= \delta_{44}^{(1)} - \kappa_{24} \delta_{24}^{(1)} - \kappa_{34} \delta_{34}^{(2)},$ $= \delta_{44} - \kappa_{14} \delta_{14} - \kappa_{24} \delta_{24}^{(1)} - \kappa_{34} \delta_{34}^{(2)},$
III	3 ⁽²⁾			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$	$\delta_{45}^{(3)} = \delta_{45} - \kappa_{14} \delta_{15} - \kappa_{24} \delta_{25}^{(1)} - \kappa_{34} \delta_{35}^{(2)},$
					κ_{34}	κ_{35}	—	$\kappa_{14} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{11}};$
	4 ⁽²⁾			$\delta_{43}^{(2)}$	$\delta_{44}^{(2)}$	$\delta_{45}^{(2)}$	$\delta_{40}^{(2)}$	$\kappa_{24} = \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};$
IV	4 ⁽³⁾				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$	$\kappa_{34} = \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}};$
						κ_{45}	—	
	5 ⁽³⁾				$\delta_{54}^{(3)}$	$\delta_{55}^{(3)}$	$\delta_{50}^{(3)}$	$\delta_{55}^{(4)} = \delta_{55}^{(3)} - \kappa_{45} \delta_{45}^{(3)}$ $= \delta_{55}^{(2)} - \kappa_{35} \delta_{35}^{(2)} - \kappa_{45} \delta_{45}^{(3)}$ $= \delta_{55}^{(1)} - \kappa_{25} \delta_{25}^{(1)} - \kappa_{35} \delta_{35}^{(2)} - \kappa_{45} \delta_{45}^{(3)}$ $= \delta_{55} - \kappa_{15} \delta_{15} - \kappa_{25} \delta_{25}^{(1)} - \kappa_{35} \delta_{35}^{(2)} - \kappa_{45} \delta_{45}^{(3)},$
V	5 ⁽⁴⁾				$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$	$\kappa_{15} = \frac{\delta_{15}}{\delta_{11}};$ $\kappa_{25} = \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};$ $\kappa_{35} = \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}};$ $\kappa_{45} = \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}};$	

$\delta_{22}^{(1)} = \delta_{22} - \kappa_{12} \delta_{12};$	$\delta_{33}^{(2)} = \delta_{33}^{(1)} - \kappa_{23} \delta_{23}^{(1)} = \delta_{33} - \kappa_{13} \delta_{13} - \kappa_{23} \delta_{23}^{(1)};$	}	(379)
$\delta_{44}^{(3)} = \delta_{44} - \kappa_{14} \delta_{14} - \kappa_{24} \delta_{24}^{(1)} - \kappa_{34} \delta_{34}^{(2)};$	$\delta_{55}^{(4)} = \delta_{55}^{(3)} - \kappa_{45} \delta_{45}^{(3)} = \delta_{55} - \kappa_{15} \delta_{15} - \kappa_{25} \delta_{25}^{(1)} - \kappa_{35} \delta_{35}^{(2)} - \kappa_{45} \delta_{45}^{(3)};$		
$\delta_{k k}^{(k-1)} = \delta_{k k} - \kappa_{1 k} \delta_{1 k} - \kappa_{2 k} \delta_{2 k}^{(1)} - \kappa_{3 k} \delta_{3 k}^{(2)} - \dots - \kappa_{(k-1) k} \delta_{(k-1) k}^{(k-2)};$			
$\delta_{k n}^{(k-1)} = \delta_{k n} - \kappa_{1 k} \delta_{1 n} - \kappa_{2 k} \delta_{2 n}^{(1)} - \kappa_{3 k} \delta_{3 n}^{(2)} - \dots - \kappa_{(k-1) k} \delta_{(k-1) n}^{(k-2)};$			
$\delta_{k 0}^{(k-1)} = \delta_{k 0} - \kappa_{1 k} \delta_{1 0} - \kappa_{2 k} \delta_{2 0}^{(1)} - \kappa_{3 k} \delta_{3 0}^{(2)} - \dots - \kappa_{(k-1) k} \delta_{(k-1) 0}^{(k-2)}.$			

Abgekürzte Rechenvorschrift für die Vorwärtselimination von fünf überzähligen Größen (381)**.

i	k	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Kontrollen [δ _{iΣ} = ∑ _{k=1} ⁵ δ _{ik}]	Belastungsglieder δ _{ik}					
								zur Bestimmung von X _k = ∑ β _{ik}					Be- lastungs- fall ()
		1	2	3	4	5	Σ	β _{5k}	β _{4k}	β _{3k}	β _{2k}	β _{1k}	
1	δ _{1k}	δ ₁₁	δ ₁₂	δ ₁₃	δ ₁₄	δ ₁₅	δ _{1Σ}	0	0	0	0	1	δ ₁₀
	κ _{1k}	.	δ ₁₂ /δ ₁₁	δ ₁₃ /δ ₁₁	δ ₁₄ /δ ₁₁	δ ₁₅ /δ ₁₁	*	.	δ ₁₀ /δ ₁₁
2	δ _{2k}	(δ ₂₁)	δ ₂₂	δ ₂₃	δ ₂₄	δ ₂₅	δ _{2Σ}	0	0	0	1	0	δ ₂₀
	-κ ₁₂ δ _{1k}	.	-κ ₁₂ δ ₁₂	-κ ₁₂ δ ₁₃	-κ ₁₂ δ ₁₄	-κ ₁₂ δ ₁₅	-κ ₁₂ δ _{1Σ}	-κ ₁₂ δ ₁₀
	Σ _{2k} = δ _{2k} ⁽¹⁾	.	δ ₂₂ ⁽¹⁾	δ ₂₃ ⁽¹⁾	δ ₂₄ ⁽¹⁾	δ ₂₅ ⁽¹⁾	δ _{2Σ} ⁽¹⁾	0	0	0	1	.	δ ₂₀ ⁽¹⁾
	κ _{2k}	.	.	δ ₂₃ ⁽¹⁾ /δ ₂₂ ⁽¹⁾	δ ₂₄ ⁽¹⁾ /δ ₂₂ ⁽¹⁾	δ ₂₅ ⁽¹⁾ /δ ₂₂ ⁽¹⁾	.	.	.	*	.	.	δ ₂₀ ⁽¹⁾ /δ ₂₂ ⁽¹⁾
3	δ _{3k}	(δ ₃₁)	(δ ₃₂)	δ ₃₃	δ ₃₄	δ ₃₅	δ _{3Σ}	0	0	1	0	0	δ ₃₀
	-κ ₁₃ δ _{1k}	.	.	-κ ₁₃ δ ₁₃	-κ ₁₃ δ ₁₄	-κ ₁₃ δ ₁₅	-κ ₁₃ δ _{1Σ}	-κ ₁₃ δ ₁₀
	-κ ₂₃ δ _{2k} ⁽¹⁾	.	.	-κ ₂₃ δ ₂₃ ⁽¹⁾	-κ ₂₃ δ ₂₄ ⁽¹⁾	-κ ₂₃ δ ₂₅ ⁽¹⁾	-κ ₂₃ δ _{2Σ} ⁽¹⁾	-κ ₂₃ δ ₂₀ ⁽¹⁾
	Σ _{3k} = δ _{3k} ⁽²⁾	.	.	δ ₃₃ ⁽²⁾	δ ₃₄ ⁽²⁾	δ ₃₅ ⁽²⁾	δ _{3Σ} ⁽²⁾	0	0	1	.	.	δ ₃₀ ⁽²⁾
	κ _{3k}	.	.	.	δ ₃₄ ⁽²⁾ /δ ₃₃ ⁽²⁾	δ ₃₅ ⁽²⁾ /δ ₃₃ ⁽²⁾	.	.	.	*	.	.	δ ₃₀ ⁽²⁾ /δ ₃₃ ⁽²⁾
4	δ _{4k}	(δ ₄₁)	(δ ₄₂)	(δ ₄₃)	δ ₄₄	δ ₄₅	δ _{4Σ}	0	1	0	0	0	δ ₄₀
	-κ ₁₄ δ _{1k}	.	.	.	-κ ₁₄ δ ₁₄	-κ ₁₄ δ ₁₅	-κ ₁₄ δ _{1Σ}	-κ ₁₄ δ ₁₀
	-κ ₂₄ δ _{2k} ⁽¹⁾	.	.	.	-κ ₂₄ δ ₂₄ ⁽¹⁾	-κ ₂₄ δ ₂₅ ⁽¹⁾	-κ ₂₄ δ _{2Σ} ⁽¹⁾	-κ ₂₄ δ ₂₀ ⁽¹⁾
	-κ ₃₄ δ _{3k} ⁽²⁾	.	.	.	-κ ₃₄ δ ₃₄ ⁽²⁾	-κ ₃₄ δ ₃₅ ⁽²⁾	-κ ₃₄ δ _{3Σ} ⁽²⁾	-κ ₃₄ δ ₃₀ ⁽²⁾
	Σ _{4k} = δ _{4k} ⁽³⁾	.	.	.	δ ₄₄ ⁽³⁾	δ ₄₅ ⁽³⁾	δ _{4Σ} ⁽³⁾	0	1	.	.	.	δ ₄₀ ⁽³⁾
	κ _{4k}	δ ₄₅ ⁽³⁾ /δ ₄₄ ⁽³⁾	.	.	*	.	.	.	δ ₄₀ ⁽³⁾ /δ ₄₄ ⁽³⁾
5	δ _{5k}	(δ ₅₁)	(δ ₅₂)	(δ ₅₃)	(δ ₅₄)	δ ₅₅	δ _{5Σ}	1	0	0	0	0	δ ₅₀
	-κ ₁₅ δ _{1k}	-κ ₁₅ δ ₁₅	-κ ₁₅ δ _{1Σ}	-κ ₁₅ δ ₁₀
	-κ ₂₅ δ _{2k} ⁽¹⁾	-κ ₂₅ δ ₂₅ ⁽¹⁾	-κ ₂₅ δ _{2Σ} ⁽¹⁾	-κ ₂₅ δ ₂₀ ⁽¹⁾
	-κ ₃₅ δ _{3k} ⁽²⁾	-κ ₃₅ δ ₃₅ ⁽²⁾	-κ ₃₅ δ _{3Σ} ⁽²⁾	-κ ₃₅ δ ₃₀ ⁽²⁾
	-κ ₄₅ δ _{4k} ⁽³⁾	-κ ₄₅ δ ₄₅ ⁽³⁾	-κ ₄₅ δ _{4Σ} ⁽³⁾	-κ ₄₅ δ ₄₀ ⁽³⁾
	Σ _{5k} = δ _{5k} ⁽⁴⁾	δ ₅₅ ⁽⁴⁾	δ _{5Σ} ⁽⁴⁾	1	δ ₅₀ ⁽⁴⁾
	*	δ ₅₀ ⁽⁴⁾ /δ ₅₅ ⁽⁴⁾

* Die Quotienten 1/δ_{ik}^(k-1) werden unmittelbar in die Rekursionstabelle (385) eingetragen.
 ** Die eingeklammerten Vorzeichen sind nur zur Erleichterung der Summenbildung δ_{kΣ} beigelegt.

Berechnung der Vorzahlen β_{ik} eines Ansatzes mit fünf überzähligen Größen (384).

a)

β_{15}	β_{25}	β_{35}	β_{45}	β_{55}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	o
	κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	o
		κ_{23}	κ_{24}	κ_{25}	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	o
			κ_{34}	κ_{35}	
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	o
				κ_{45}	
				$\delta_{55}^{(4)}$	I

Aus a) folgt $\beta_{55} = \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}}$.

Durch Rekursion sind folgende Vorzahlen bestimmt:

$\beta_{45} = -\kappa_{45} \beta_{55}; \quad \beta_{35} = -\kappa_{34} \beta_{45} - \kappa_{35} \beta_{55};$
 $\beta_{25} = -\kappa_{23} \beta_{35} - \kappa_{24} \beta_{45} - \kappa_{25} \beta_{55};$
 $\beta_{15} = -\kappa_{12} \beta_{25} - \kappa_{13} \beta_{35} - \kappa_{14} \beta_{45} - \kappa_{15} \beta_{55};$
 $\beta_{45} = \beta_{54}$ usw.

Aus a): $\beta_{54} = \beta_{45}$.

b)

β_{14}	β_{24}	β_{34}	β_{44}	β_{54}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	o
	κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	o
		κ_{23}	κ_{24}	κ_{25}	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	o
			κ_{34}	κ_{35}	
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	I
				κ_{45}	

$\beta_{44} = \frac{1}{\delta_{44}^{(3)}} - \kappa_{45} \beta_{54};$
 $\beta_{34} = -\kappa_{34} \beta_{44} - \kappa_{35} \beta_{54};$
 $\beta_{24} = -\kappa_{23} \beta_{34} - \kappa_{24} \beta_{44} - \kappa_{25} \beta_{54};$
 $\beta_{14} = -\kappa_{12} \beta_{24} - \kappa_{13} \beta_{34} - \kappa_{14} \beta_{44} - \kappa_{15} \beta_{54};$
 $\beta_{34} = \beta_{43}$ usw.

Aus a) u. b): $\beta_{53} = \beta_{35}, \beta_{43} = \beta_{34}$.

c)

β_{13}	β_{23}	β_{33}	β_{43}	β_{53}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	o
	κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	o
		κ_{23}	κ_{24}	κ_{25}	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	I
			κ_{34}	κ_{35}	

$\beta_{33} = \frac{1}{\delta_{33}^{(2)}} - \kappa_{34} \beta_{43} - \kappa_{35} \beta_{53},$
 $\beta_{23} = -\kappa_{23} \beta_{33} - \kappa_{24} \beta_{43} - \kappa_{25} \beta_{53},$
 $\beta_{13} = -\kappa_{12} \beta_{23} - \kappa_{13} \beta_{33} - \kappa_{14} \beta_{43} - \kappa_{15} \beta_{53},$
 $\beta_{23} = \beta_{32}$ usw.

Aus a), b) u. c):

$\beta_{52} = \beta_{25}, \beta_{42} = \beta_{24}, \beta_{32} = \beta_{23}$.

d)

β_{12}	β_{22}	β_{32}	β_{42}	β_{52}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	o
	κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	I
		κ_{23}	κ_{24}	κ_{25}	

$\beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(1)}} - \kappa_{23} \beta_{32} - \kappa_{24} \beta_{42} - \kappa_{25} \beta_{52},$
 $\beta_{12} = -\kappa_{12} \beta_{22} - \kappa_{13} \beta_{32} - \kappa_{14} \beta_{42} - \kappa_{15} \beta_{52},$
 $\beta_{12} = \beta_{21}$ usw.

Aus a), b), c) u. d):

$\beta_{51} = \beta_{15}, \beta_{41} = \beta_{14}, \beta_{31} = \beta_{13}, \beta_{21} = \beta_{12}$.

e)

β_{11}	β_{21}	β_{31}	β_{41}	β_{51}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	I
	κ_{12}	κ_{13}	κ_{14}	κ_{15}	

$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} - \kappa_{12} \beta_{21} - \kappa_{13} \beta_{31} - \kappa_{14} \beta_{41} - \kappa_{15} \beta_{51}$.

Rechenvorschrift in Verbindung mit (381) für die Rekursion eines Ansatzes mit fünf überzähligen Größen zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} (385).

		δ_{50}	δ_{40}	δ_{30}	δ_{20}	δ_{10}	
i	k	5	4	3	2	1	i
X_5	5	$-\beta_{52}x_{k2}$.	.	.		$-\beta_{52}x_{12}$
		$-\beta_{53}x_{k3}$.	.	.	$-\beta_{53}x_{23}$	$-\beta_{53}x_{13}$
		$-\beta_{54}x_{k4}$.	.	$-\beta_{54}x_{34}$	$-\beta_{54}x_{24}$	$-\beta_{54}x_{14}$
		$-\beta_{55}x_{k5}$.	$-\beta_{55}x_{45}$	$-\beta_{55}x_{35}$	$-\beta_{55}x_{25}$	$-\beta_{55}x_{15}$
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$1/\delta_{55}^{(4)}$	0	0	0	0
		$X_k = \beta_{5k}$	β_{55}	β_{54}	β_{53}	β_{52}	β_{51}
X_4	4	$-\beta_{42}x_{k2}$.	.	.		$-\beta_{42}x_{12}$
		$-\beta_{43}x_{k3}$.	.	.	$-\beta_{43}x_{23}$	$-\beta_{43}x_{13}$
		$-\beta_{44}x_{k4}$.	.	$-\beta_{44}x_{34}$	$-\beta_{44}x_{24}$	$-\beta_{44}x_{14}$
		$-\beta_{45}x_{k5}$.	$-\beta_{45}x_{45}$	$-\beta_{45}x_{35}$	$-\beta_{45}x_{25}$	$-\beta_{45}x_{15}$
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$.	$1/\delta_{44}^{(3)}$	0	0	0
		$X_k = \beta_{4k}$	β_{45}	β_{44}	β_{43}	β_{42}	β_{41}
X_3	3	$-\beta_{32}x_{k2}$.	.	.		$-\beta_{32}x_{12}$
		$-\beta_{33}x_{k3}$.	.	.	$-\beta_{33}x_{23}$	$-\beta_{33}x_{13}$
		$-\beta_{34}x_{k4}$.	.	$-\beta_{34}x_{34}$	$-\beta_{34}x_{24}$	$-\beta_{34}x_{14}$
		$-\beta_{35}x_{k5}$.	.	$-\beta_{35}x_{35}$	$-\beta_{35}x_{25}$	$-\beta_{35}x_{15}$
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$.	.	$1/\delta_{33}^{(2)}$	0	0
		$X_k = \beta_{3k}$	β_{35}	β_{34}	β_{33}	β_{32}	β_{31}
X_2	2	$-\beta_{22}x_{k2}$.	.	.		$-\beta_{22}x_{12}$
		$-\beta_{23}x_{k3}$.	.	.	$-\beta_{23}x_{23}$	$-\beta_{23}x_{13}$
		$-\beta_{24}x_{k4}$.	.	.	$-\beta_{24}x_{24}$	$-\beta_{24}x_{14}$
		$-\beta_{25}x_{k5}$.	.	.	$-\beta_{25}x_{25}$	$-\beta_{25}x_{15}$
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$.	.	.	$1/\delta_{22}^{(1)}$	0
		$X_k = \beta_{2k}$	β_{25}	β_{24}	β_{23}	β_{22}	β_{21}
X_1	1	$-\beta_{12}x_{k2}$.	.	.		$-\beta_{12}x_{12}$
		$-\beta_{13}x_{k3}$	$-\beta_{13}x_{13}$
		$-\beta_{14}x_{k4}$	$-\beta_{14}x_{14}$
		$-\beta_{15}x_{k5}$	$-\beta_{15}x_{15}$
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$1/\delta_{11}$
		$X_k = \beta_{1k}$	β_{15}	β_{14}	β_{13}	β_{12}	β_{11}

k	1	2	3	4	5
$X_1 \delta_{k1}$	$X_1 \delta_{11}$	$X_1 \delta_{21}$	$X_1 \delta_{31}$	$X_1 \delta_{41}$	$X_1 \delta_{51}$
$X_2 \delta_{k2}$	$X_2 \delta_{12}$	$X_2 \delta_{22}$	$X_2 \delta_{32}$	$X_2 \delta_{42}$	$X_2 \delta_{52}$
$X_3 \delta_{k3}$	$X_3 \delta_{13}$	$X_3 \delta_{23}$	$X_3 \delta_{33}$	$X_3 \delta_{43}$	$X_3 \delta_{53}$
$X_4 \delta_{k4}$	$X_4 \delta_{14}$	$X_4 \delta_{24}$	$X_4 \delta_{34}$	$X_4 \delta_{44}$	$X_4 \delta_{54}$
$X_5 \delta_{k5}$	$X_5 \delta_{15}$	$X_5 \delta_{25}$	$X_5 \delta_{35}$	$X_5 \delta_{45}$	$X_5 \delta_{55}$
$\Sigma_k = \delta_{k0}$	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}

(383)

c) Die Berechnung der konjugierten Matrix. Um die überzähligen Größen für mehrere Belastungsfälle ohne Wiederholung der Elimination anzugeben, wird die konjugierte Matrix zu (319) berechnet. Mit dieser ist nach (326)

$$X_k = \sum_{h=1}^{h=n} \beta_{kh} \delta_{h0} \quad \text{und} \quad \beta_{hk} = \beta_{kh}.$$

Die Vorzahlen β_{hk} sind nach S. 166 die überzähligen Größen X_h ($h=1 \dots n$) für $\delta_{k0} = 1$. Um die $1/2 \cdot n(n+1)$ unabhängigen Glieder der konjugierten Matrix übersichtlich zu berechnen, wird entweder mit der Bestimmung der β_{kn} aus $\delta_{n0} = 1$ durch Vorwärtselimination oder mit der Bestimmung der β_{k1} aus $\delta_{10} = 1$ in Verbindung mit einer Rückwärtselimination begonnen. Die übrigen Vorzahlen ergeben sich auf Grund der Symmetrie der konjugierten Matrix zur Hauptdiagonale durch Rekursion. Zunächst sind mit β_{nn} die Vorzahlen $\beta_{kn} \dots \beta_{1n}$ bestimmt. Alle übrigen β_{hk} ($h=k \dots 1$) werden stets aus den ersten k Gleichungen bestimmt, da die übrigen Vorzahlen $\beta_{(k+1)k} = \beta_{k(k+1)} \dots$ bekannt sind. Die Berechnung schließt mit dem Werte von β_{11} . Er wird bei allen unsymmetrischen Systemen, die keine zur Nebendiagonale symmetrische Matrix besitzen, durch Rückwärtselimination mit $\delta_{10} = 1$ geprüft.

Die Untersuchung wird auf S. 221 an einem System mit fünf überzähligen Größen bei Vorwärtselimination nach (381) gezeigt [Rechenvorschrift in Verbindung mit (381): S. 222].

Die Elastizitätsgleichungen (319) müssen nach S. 167 durch die Vorzahlen der konjugierten Matrix erfüllt werden. Sie gelten als Rechenprobe; z. B. ist

Kontrollen:

k	1	2	3	4	5
$\beta_{1k} \delta_{k1}$	$\beta_{11} \delta_{11}$	$\beta_{12} \delta_{21}$	$\beta_{13} \delta_{31}$	$\beta_{14} \delta_{41}$	$\beta_{15} \delta_{51}$
$\beta_{2k} \delta_{k2}$	$\beta_{21} \delta_{12}$	$\beta_{22} \delta_{22}$	$\beta_{23} \delta_{32}$	$\beta_{24} \delta_{42}$	$\beta_{25} \delta_{52}$
$\beta_{3k} \delta_{k3}$	$\beta_{31} \delta_{13}$	$\beta_{32} \delta_{23}$	$\beta_{33} \delta_{33}$	$\beta_{34} \delta_{43}$	$\beta_{35} \delta_{53}$
$\beta_{4k} \delta_{k4}$	$\beta_{41} \delta_{14}$	$\beta_{42} \delta_{24}$	$\beta_{43} \delta_{34}$	$\beta_{44} \delta_{44}$	$\beta_{45} \delta_{54}$
$\beta_{5k} \delta_{k5}$	$\beta_{51} \delta_{15}$	$\beta_{52} \delta_{25}$	$\beta_{53} \delta_{35}$	$\beta_{54} \delta_{45}$	$\beta_{55} \delta_{55}$
$\Sigma_k = 1$	1	1	1	1	1

(386)

Die Bedingungen $\sum_h \beta_{hi} \delta_{kh} = 0$ für $\delta_{i0} = 1$ werden in der Regel nur dann geprüft, wenn nur ein Teil der Nebenglieder der Matrix vorhanden ist.

Anwendung des Gaußschen Algorithmus zur Untersuchung des Sagedachrahmens, Abb. 215. 1. Geometrische Grundlagen.

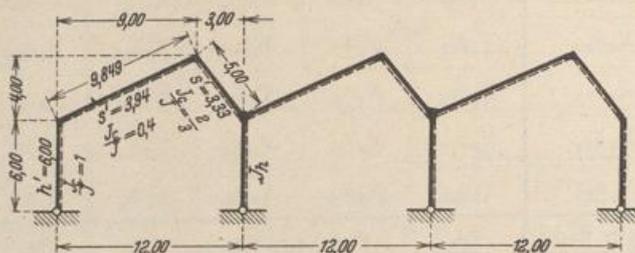


Abb. 215.

Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J_b , reduzierte Stablängen s' , h' Abb. 215.

$$J_c = J_b; \quad \zeta_b = 1, \quad E_b = 210 \text{ t/cm}^2, \quad \alpha_1 = 0,00001.$$

2. Gleichförmig verteilte Belastung der Riegel a, b, c mit $p = 1 \text{ t/m}$.

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist fünffach statisch unbestimmt. Hauptsystem und statisch unbestimmte Schnittkräfte sind in Abb. 216 angegeben. Als überzählige Größen X_2 und X_4 werden die $1/h$ fachen Beträge der waagerechten Komponenten Y_2, Y_4 der Schnittkräfte verwendet. Biegemomente des Hauptsystems in Abb. 216.

4. Die Vorzahlen δ_{ik} werden ohne die Mitwirkung der Quer- und Längskräfte angeschrieben und zur Abkürzung der Rechnung dabei in die Anteile zerlegt, die auf die Riegel (a, b, c) und auf die Pfosten d entfallen.

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{33} = \delta_{11,a} + \delta_{11,b} &= 3,306 + 1,793 = 5,1 \\ \delta_{12} = \delta_{34} = \delta_{12,a} + \delta_{11,b} &= -2,668 + 1,793 = -0,875 \\ \delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{13,b} &= +1,086 \\ \delta_{14} &= \delta_{14,b} = -2,635 \\ \delta_{22} = \delta_{44} = \delta_{22,a} + \delta_{11,b} + 2\delta_{22,d} &= 4,556 + 1,793 + 4,0 = 10,349 \\ \delta_{24} &= \delta_{14,b} - \delta_{22,d} = -2,635 - 2,0 = -4,635 \\ \delta_{35} &= \delta_{35,c} = +3,72 \\ \delta_{45} &= \delta_{35,c} + \delta_{22,d} = +3,72 + 2,0 = +5,72 \\ \delta_{55} &= \delta_{55,c} + 2\delta_{22,d} = +13,19 + 4,0 = +17,19 \end{aligned}$$

$$\delta_{11,a} = 3,94 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,75^2 + 3,33 \cdot \frac{1}{3} \cdot (0,75^2 + 0,75 \cdot 1,0 + 1,0^2) = 3,306$$

$$\delta_{11,b} = 3,94 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1,0^2 + 1,0 \cdot 0,25 + 0,25^2) + 3,33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,25^2 = 1,793$$

$$\delta_{12,a} = -3,94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,75 (2 \cdot 0,917 + 1) - 3,33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,917 (2 \cdot 0,75 + 1) = -2,668$$

$$\delta_{13,b} = 3,94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,75 (2 \cdot 0,25 + 1) + 3,33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,25 (2 \cdot 0,75 + 1) = 1,086$$

$$\delta_{14,b} = -3,94 \cdot \frac{1}{6} \cdot [1,0 (2 \cdot 1,0 + 0,917) + 0,25 (2 \cdot 0,917 + 1,0)] - \frac{3,33}{3} \cdot 0,25 \cdot 0,917 = -2,635$$

$$\delta_{22,a} = 3,94 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1,0^2 + 1,0 \cdot 0,917 + 0,917^2) + 3,33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,917^2 = 4,556,$$

$$\delta_{22,d} = 6,0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,0^2 = 2,00; \quad \delta_{55,c} = (3,94 + 3,33) \cdot \frac{1}{3} \cdot [1,0^2 + 1,0 \cdot 1,667 + 1,667^2] = 13,19,$$

$$\delta_{35,c} = \frac{3,94}{6} \cdot [1,0 (2 \cdot 1,0 + 1,667) + 0,25 (2 \cdot 1,667 + 1,0)] + \frac{3,33}{6} \cdot 0,25 \cdot (2 \cdot 1,667 + 1,0) = 3,72.$$

(Fortsetzung des Textes auf S. 228.)

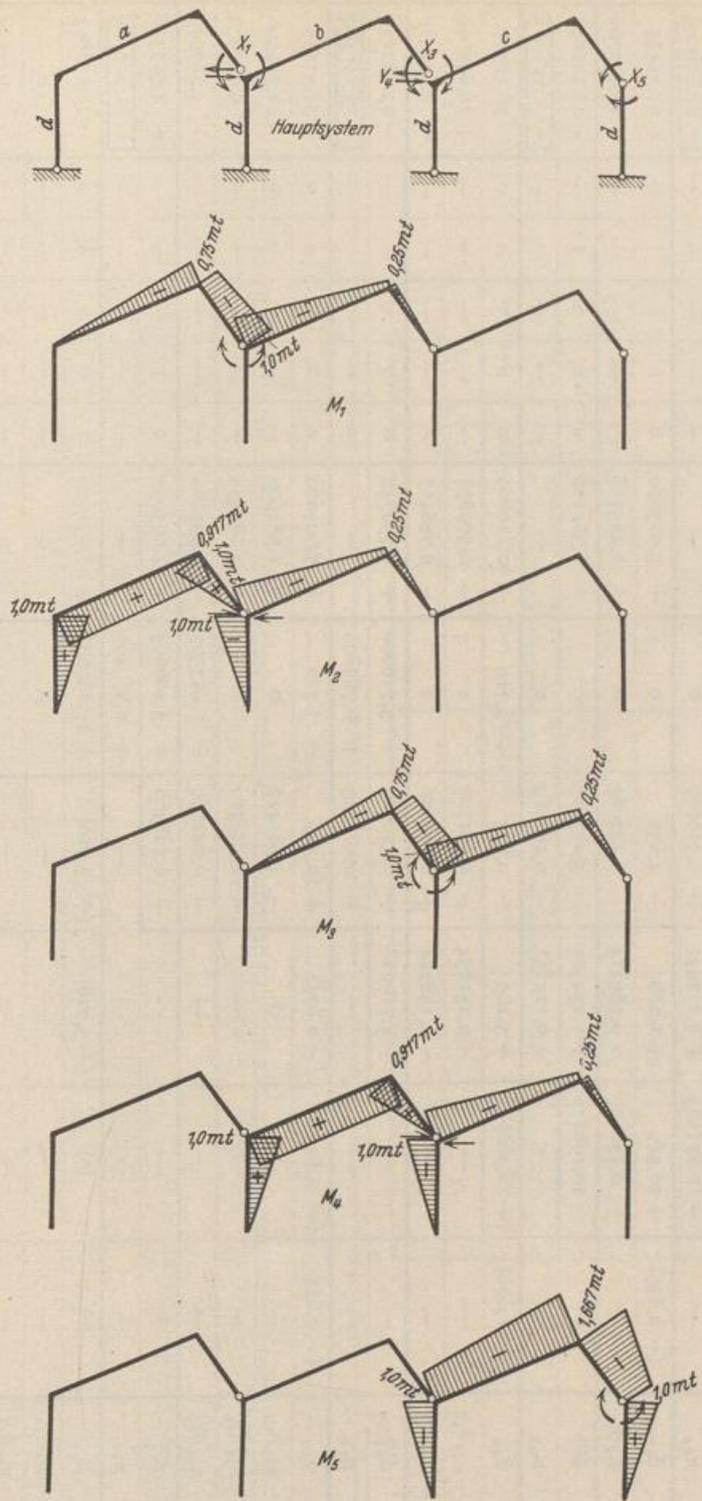


Abb. 216.

Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus (381).

i	X_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\Sigma \delta_{i,2}$	Belastungsglieder δ_{i0}					
								zur Bestimmung von $X_5 =$			aus 4. für Belastungsfall 2.		
								β_{k5}	β_{k4}	β_{k3}	β_{k2}	β_{k1}	
1	k	I	2	3	4	5		0	0	0	0	I	-78,16527
	δ_{1k}	+ 5,100	- 0,875	+ 1,086	- 2,635	0	+ 2,676000	0	0	0	0	0	-15,326523
	κ_{1k}	-	- 0,171569	+ 0,212941	- 0,516667	0	-	-	-	-	-	-	+ 31,32335
2	δ_{2k}	(- 0,875)	+ 10,349	+ 1,086	- 4,635	0	+ 5,925000	0	0	0	I	0	-13,410708
	$\delta_{12}^{(1)}$	-	- 0,150123	+ 0,186324	- 0,452083	0	+ 0,459118	-	-	-	-	-	+ 18,112643
	$\delta_{2k}^{(1)}$	-	10,198878	+ 1,272324	- 5,087083	0	+ 6,384118	0	0	0	I	-	+ 1,775945
	κ_{2k}	-	-	+ 0,124751	- 0,498789	0	-	-	-	-	-	-	-78,16527
3	δ_{3k}	(+ 1,086)	(+ 1,086)	+ 5,100	- 0,875	+ 3,720	+ 10,117000	0	0	I	0	0	+ 16,644604
	$\kappa_{13} \delta_{1k}$	-	-	- 0,231254	+ 0,561100	0	- 0,569831	-	-	-	-	-	- 2,259570
	$\kappa_{23} \delta_{2k}^{(1)}$	-	-	- 0,158724	+ 0,634620	0	- 0,796427	-	-	-	-	-	- 63,780242
	$\delta_{3k}^{(2)}$	-	-	+ 4,710028	+ 0,320720	+ 3,720000	+ 8,759742	0	0	I	-	-	-13,541389
	κ_{3k}	-	-	-	+ 0,068093	+ 0,789805	-	-	-	-	-	-	+ 31,52335
4	δ_{4k}	(- 2,635)	(- 4,635)	(- 0,875)	+ 10,349	+ 5,720	+ 7,924000	0	I	0	0	0	- 40,385390
	$\kappa_{14} \delta_{1k}$	-	-	-	- 1,361417	0	+ 1,382600	-	-	-	-	-	+ 9,034379
	$\kappa_{24} \delta_{2k}^{(1)}$	-	-	-	- 2,537379	0	+ 3,184325	-	-	-	-	-	+ 4,342999
	$\kappa_{34} \delta_{3k}^{(2)}$	-	-	-	- 0,021839	- 0,253307	- 0,595866	-	-	-	-	-	+ 4,515338
	$\delta_{4k}^{(3)}$	-	-	-	+ 6,428366	+ 5,466693	+ 11,895059	0	I	-	-	-	+ 0,702408
	κ_{4k}	-	-	-	-	+ 0,850402	-	-	-	-	-	-	- 109,68863
5	δ_{5k}	(0)	(0)	(+ 3,720)	(+ 5,720)	+ 17,19000	+ 26,630000	I	0	0	0	0	0
	$\kappa_{15} \delta_{1k}$	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	-	0
	$\kappa_{25} \delta_{2k}^{(1)}$	-	-	-	-	0	0	-	-	-	-	-	0
	$\kappa_{35} \delta_{3k}^{(2)}$	-	-	-	-	- 2,938076	- 6,911382	-	-	-	-	-	+ 50,373970
	$\kappa_{45} \delta_{4k}^{(3)}$	-	-	-	-	- 4,648886	- 10,115579	-	-	-	-	-	- 3,839851
	$\delta_{5k}^{(4)}$	-	-	-	-	+ 9,603039	+ 9,603039	I	-	-	-	-	- 63,154511
	κ_{5k}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	- 6,576513

Belastungszahlen (Abb. 217):

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \delta_{30} = \delta_{10,a} + \delta_{10,b} &= -44,18730 - 33,97797 &= -78,16527; \\ \delta_{20} &= \delta_{40} = \delta_{20,a} + \delta_{20,b} &= 65,50132 - 33,97797 &= +31,52335; \\ \delta_{50} & & &= -109,68863; \\ \delta_{10,a} &= -\{3,94 \cdot \frac{1}{8} [0,75 \cdot (13,5 + 2 \cdot 16,875)] + 3,33 \cdot \frac{1}{8} [0,75(13,5 + 2 \cdot 7,875) + 1,0 \cdot 2 \cdot 7,875]\} \\ &= -44,18730; \\ \delta_{10,b} &= -\{3,94 \cdot \frac{1}{8} [0,25 \cdot 47,25 + 1,0 \cdot 2 \cdot 16,875] + 3,33 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,25 \cdot 29,25\} &= -33,97797; \\ \delta_{20,a} &= 3,94 \cdot \frac{1}{8} [0,917 \cdot 47,25 + 1,0 \cdot 33,75] + 3,33 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,917 \cdot 29,25 &= +65,50132; \\ \delta_{20,b} &= \delta_{10,b}; \\ \delta_{50} &= -\{3,94 \cdot \frac{1}{8} [1,667 \cdot 47,25 + 1,0 \cdot 33,750] + 3,33 \cdot \frac{1}{8} [1,667 \cdot 29,25 + 1,0 \cdot 15,75]\} \\ &= -109,68863. \end{aligned}$$

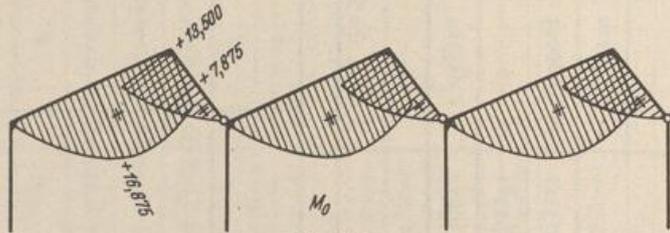


Abb. 217.

5. Matrix der geometrischen Bedingungen mit den Belastungszahlen für die in 2. vorgeschriebene Belastung.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	(δ_{k0})
(1)	5,100	- 0,875	+ 1,086	- 2,635	0	- 78,16527
(2)	- 0,875	+ 10,349	+ 1,086	- 4,635	0	+ 31,52335
(3)	+ 1,086	+ 1,086	+ 5,100	- 0,875	+ 3,720	- 78,16527
(4)	- 2,635	- 4,635	- 0,875	+ 10,349	+ 5,720	+ 31,52335
(5)	0	0	+ 3,720	+ 5,720	+ 17,190	- 109,68863

6. Auflösung des Ansatzes. Die statisch überzähligen Größen werden entweder mit den Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix nach (324) berechnet oder mit Einbeziehung der Belastungszahlen δ_{i0} in den Gaußschen Algorithmus unmittelbar gewonnen. Beide Lösungen sind durch die Vorwärtselimination S. 226 vorbereitet. Rekursion zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} auf S. 227.

Kontrolle (386):

k	1	2	3	4	5
$\beta_{1k} \cdot \delta_{1k}$	+ 1,439006	- 0,073168	- 0,032948	- 0,332890	0
$\beta_{2k} \cdot \delta_{2k}$	- 0,073168	+ 1,582610	- 0,007047	- 0,502397	0
$\beta_{3k} \cdot \delta_{3k}$	- 0,032948	- 0,007047	+ 1,370941	- 0,047446	- 0,283505
$\beta_{4k} \cdot \delta_{4k}$	- 0,332890	- 0,502397	- 0,047446	+ 2,389294	- 0,506557
$\beta_{5k} \cdot \delta_{5k}$	0	0	- 0,283505	- 0,506557	+ 1,790063
I	1,000000	0,999998	0,999995	1,000004	1,000001

Mit $p = 0,01$ und $\varphi = \pm p \sum_i \sum_k |\beta_{ik} \delta_{ik}| = \pm p 12,1$ wird nach (331) der mögliche Fehler von X_k aus der Nennerdeterminante der Bedingungsgleichungen ca. $\pm 0,12 X_k$.

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ik} :

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	+ 0,282158	+ 0,083621	- 0,030339	+ 0,126334	- 0,035474
X_2	+ 0,083621	+ 0,152924	- 0,006489	+ 0,108392	- 0,034665
X_3	- 0,030339	- 0,006489	+ 0,268812	+ 0,054224	- 0,076211
X_4	+ 0,126334	+ 0,108392	+ 0,054224	+ 0,230872	- 0,088559
X_5	- 0,035474	- 0,034665	- 0,076211	- 0,088559	+ 0,104134

Anwendung der Matrix zur Berechnung der überzähligen Größen X_k .

$$X_1 = +0,282158 \delta_{10} + 0,083621 \delta_{20} - 0,030339 \delta_{30} + 0,126334 \delta_{40} - 0,035474 \delta_{50}.$$

$$X_2 = +0,083621 \delta_{10} + 0,152924 \delta_{20} - 0,006489 \delta_{30} + 0,108392 \delta_{40} - 0,034665 \delta_{50}.$$

$$X_3 = -0,030339 \delta_{10} - 0,006489 \delta_{20} + 0,268812 \delta_{30} + 0,054224 \delta_{40} - 0,076211 \delta_{50}.$$

$$X_4 = +0,126334 \delta_{10} + 0,108392 \delta_{20} + 0,054224 \delta_{30} + 0,230872 \delta_{40} - 0,088559 \delta_{50}.$$

$$X_5 = -0,035474 \delta_{10} - 0,034665 \delta_{20} - 0,076211 \delta_{30} - 0,088559 \delta_{40} + 0,104134 \delta_{50}.$$

Mit den Belastungszahlen nach 4. aus der Belastung 2. ergeben sich folgende statisch überzählige Größen:

$$X_1 = -9,174075 \text{ mt}; \quad X_2 = +6,010664 \text{ t}; \quad X_3 = -8,775876 \text{ mt};$$

$$X_4 = +6,295086 \text{ t}; \quad X_5 = -6,576513 \text{ mt}.$$

Die Vorwärtselemination nach Gauß, S. 226, liefert unter Einbeziehung der Belastungszahlen $X_5 = -6,576513 \text{ mt}$. Die anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion gewonnen.

Rekursion mit Rechenprobe (382).

k	5	4	3	2	1
$-X_2 \cdot \delta_{k2}$					+ 1,031241
$-X_3 \cdot \delta_{k3}$				+ 1,094802	+ 1,868746
$-X_4 \cdot \delta_{k4}$			- 0,428652	+ 3,139917	+ 3,252461
$-X_5 \cdot \delta_{k5}$		+ 5,592678	+ 5,194165	0	0
$X_k^{(k)} = \frac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}}$	- 6,576513	+ 0,702408	- 13,541389	+ 1,775945	- 15,326523
$\Sigma_{k0} = X_k$	- 6,576513	+ 6,295086	- 8,775876	+ 6,010664	- 9,174075
$X_k \cdot \delta_{k0}$	+ 721,368701	+ 198,442199	+ 685,968717	+ 189,476265	+ 717,094049
$X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$	+ 415,336463	+ 3,171610	+ 863,673067	+ 32,167058	+ 1198,001808
k	5	4	3	2	1

Kontrolle: $\Sigma X_k \cdot \delta_{k0} = \Sigma X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$ [vgl. (486) S. 295 mit X_k statt Y_k]

$$2512,3499 \approx 2512,3500.$$

Kontrolle durch Einsetzen in die Bedingungsgleichungen (383):

k	1	2	3	4	5
$X_1 \cdot \delta_{1k}$	- 46,787781	+ 8,027315	- 9,963045	+ 24,173687	0
+ $X_2 \cdot \delta_{2k}$	- 5,259331	+ 62,204361	+ 6,527581	- 27,859428	0
+ $X_3 \cdot \delta_{3k}$	- 9,530602	- 9,530602	- 44,756972	+ 7,678892	- 32,646262
+ $X_4 \cdot \delta_{4k}$	- 16,587553	- 29,177726	- 5,508201	+ 65,147851	+ 36,007895
+ $X_5 \cdot \delta_{5k}$	0	0	- 24,464629	- 37,617655	- 113,050260
δ_{k0}	- 78,165267	+ 31,523348	- 78,165266	+ 31,523347	- 109,688627

7. Stütz- und Schnittkräfte des Stabwerks für die Belastung 2. Berechnung der Biegemomente in den Querschnitten 5, 6 und 9 durch Superposition des statisch bestimmten und statisch unbestimmten Anteils nach (288) (Abb. 218).

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3 - X_4 M_4 - X_5 M_5 \\
 M_{(5)} &= 0 \quad 0 \quad -6,0107 \cdot 1,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = -6,0107 \text{ mt} \\
 M_{(9)} &= 13,5 - 9,1741 \cdot 0,75 - 6,0107 \cdot 0,917 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = +1,1076 \text{ mt} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 M_{(6)(9)} &= 0 - 9,1741 \cdot 1,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = -9,1741 \text{ mt} \\
 M_{(6)(2)} &= 0 \quad 0 \quad +6,0107 \cdot 1,0 \quad 0 \quad -6,2951 \cdot 1,0 \quad 0 = -0,2844 \text{ mt} \\
 M_{(6)(10)} &= 0 - 9,1741 \cdot 1,0 \quad +6,0107 \cdot 1,0 \quad 0 \quad -6,2951 \cdot 1,0 \quad 0 = -9,4585 \text{ mt}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

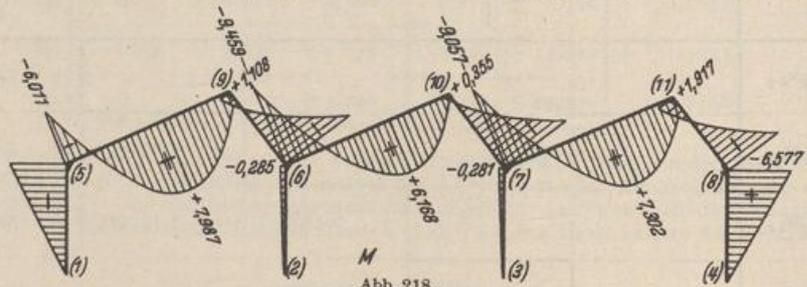


Abb. 218.

Auflösung dreigliedriger Ansätze. Ansätze in der allgemeinen Form (319) sind selten. Die Bedingungen für die Verträglichkeit der Formänderungen der Hauptsysteme hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke liefern meist regelmäßige Ansätze von Gleichungen mit drei, fünf oder sieben Unbekannten, deren Anzahl am Anfang und Ende des Ansatzes abnimmt. Am einfachsten ist der dreigliedrige Ansatz. Er bildet mit der Matrix auf S. 231 die Grundlage für die Berechnung der wichtigsten hochgradig statisch unbestimmten Tragwerke.

Die Vorzahlen δ_{ik} , δ_{i0} bezeichnen einzelne Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems. Während die Hauptglieder δ_{kk} der Matrix stets positiv sind, können beide Nebenglieder $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{k(k+1)}$ einer Gleichung (k) positiv oder negativ sein oder auch das Vorzeichen wechseln. Die Tragwerke mit dreigliedrigen Elastizitätsgleichungen können hiernach in drei Gruppen mit besonderen, von der Vorzeichenfolge abhängigen Eigenschaften des Kräftebildes zusammengefaßt werden.

Die Lösung wird in jedem Falle nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus

Matrix dreigliedriger Gleichungen.

X_1	X_2	X_3	X_{k-2}	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n
δ_{11}	δ_{12}								δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}							δ_{20}
									$\delta_{(k-1)0}$
			$\delta_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}$	$\delta_{(k-1)k}$				δ_{k0}
			$\delta_{k(k-1)}$	δ_{kk}	$\delta_{k(k+1)}$				$\delta_{(n-1)0}$
							$\delta_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}$	$\delta_{(n-1)n}$
								δ_{nn}	δ_{n0}

(387)

Reduzierte Matrix bei Vorwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2	X_3	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	X_{n-1}	X_n
δ_{11}	δ_{12}						δ_{10}
	$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}					$\delta_{20}^{(1)}$
			$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}$	$\delta_{(k-1)k}$			$\delta_{(k-1)0}^{(k-2)}$
				$\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\delta_{k(k+1)}$		$\delta_{k0}^{(k-1)}$
						$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}$	$\delta_{(n-1)n}^{(n-2)}$
						$\delta_{nn}^{(n-1)}$	$\delta_{n0}^{(n-1)}$

(388)

(381) entweder für eine ausgezeichnete Belastung angegeben oder nach (385) zur konjugierten Matrix entwickelt.

a) Rechenvorschrift bei Vorwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 231).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = 2 \dots n$ aus

$$\left. \begin{aligned} \delta_{kk}^{(k-1)} &= \delta_{kk} - \frac{\delta_{(k-1)k}^2}{\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}}, \dots \text{ und } \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{nn} - \frac{\delta_{(n-1)n}^2}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}}, \\ \text{die Belastungsglieder aus} \\ \delta_{k0}^{(k-1)} &= \delta_{k0} - \delta_{(k-1)0} \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (389)$$

Damit wird

$$X_n = \frac{\delta_{n0}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}}. \quad (390)$$

Die überzähligen Größen $X_{n-1} \dots X_k \dots X_1$ werden aus den Gleichungen der reduzierten Matrix durch Rekursion gefunden.

Die konjugierte Matrix.

Die Vorzahl $X_n = \beta_{nn}$ der konjugierten Matrix entsteht bei $\delta_{10} = 0, \dots, \delta_{(n-1)0} = 0, \delta_{n0} = 1$. Sie ist nach (390)

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn}^{(n-1)}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \kappa_{(n-1)n}}. \quad (391)$$

Die Eliminationskoeffizienten $\kappa_{12} \dots \kappa_{(k-1)k} \dots \kappa_{(n-1)n}$ sind allein durch die elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und nach der reduzierten Matrix Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen absteigender Richtung X_k, X_{k-1} des homogenen Ansatzes mit $\delta_{n0} = 1$.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{X_1}{X_2} &= \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \kappa_{12}; & -\frac{X_2}{X_3} &= \frac{\delta_{23}}{\delta_{22}^{(1)}} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{22} - \delta_{21} \kappa_{12}} = \kappa_{23} \\ &\dots & &\dots \\ -\frac{X_{k-1}}{X_k} &= \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)} \kappa_{(k-2)(k-1)}} = \kappa_{(k-1)k} \\ &\dots & &\dots \\ -\frac{X_{n-1}}{X_n} &= \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)} \kappa_{(n-2)(n-1)}} = \kappa_{(n-1)n}. \end{aligned} \right\} \quad (392)$$

Die Vorzahl β_{nn} des dreigliedrigen Gleichungssatzes wird demnach durch die allmähliche Entwicklung der Kennbeziehungen in der Form eines Kettenbruches unmittelbar aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen angeschrieben. Hierbei entstehen gleichzeitig auch die Formänderungen $\delta_{kk}^{(k-1)}$ und die Kennbeziehungen $\kappa_{12} \dots \kappa_{(k-1)k} \dots \kappa_{(n-1)n}$.

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \kappa_{(n-1)n}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)} \kappa_{(n-2)(n-1)}}} \quad (393)$$

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)} \frac{\delta_{(n-2)n}}{\delta_{(n-2)(n-2)} - \dots - \delta_{32} \frac{\delta_{23}}{\delta_{22} - \delta_{21} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}}} \quad (394)$$

Die Vorzahlen $\beta_{(n-1)n} \dots \beta_{(k-1)n} \dots \beta_{1n}$ werden daraus durch wiederholte Multiplikation mit den negativen Kennziffern berechnet.

Die Spalte $\beta_{k(n-1)}$ der konjugierten Matrix besteht aus den Unbekannten X_k für die Belastungszahlen $\delta_{k0} = 0$ ($k = 1, \dots, (n-2), n$); $\delta_{(n-1)0} = 1$. Daher ist auch das Belastungsglied der reduzierten Matrix $\delta_{(n-1)0}^{(n-2)} = \delta_{(n-1)0} = 1$, so daß die Gleichung mit der Ordnungsnummer $(n-1)$ folgende Form annimmt:

$$\beta_{(n-1)(n-1)} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + \beta_{n(n-1)} \delta_{(n-1)n} = 1. \quad (395)$$

Nach Seite 166 ist $\beta_{n(n-1)} = \beta_{(n-1)n}$ und damit bereits bekannt.

$$\beta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1 - \beta_{(n-1)n} \delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} = \frac{1}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} - \beta_{(n-1)n} \kappa_{(n-1)n}. \quad (396)$$

Hieraus werden wiederum die Vorzahlen $\beta_{k(n-1)}$ ($k = (n-2) \dots 1$) durch Multiplikation mit den negativen Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}$ gefunden. Ebenso wird mit $\delta_{(n-2)0} = 1$

$$\beta_{(n-2)(n-2)} = \frac{1 - \beta_{(n-2)(n-1)} \delta_{(n-2)(n-1)}}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} = \frac{1}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} - \beta_{(n-2)(n-1)} \kappa_{(n-2)(n-1)}. \quad (397)$$

Damit sind dann die Vorzahlen $\beta_{k(n-2)}$ ($k = (n-3) \dots 1$) durch Rekursion bestimmt. Schließlich wird

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12} \delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12} \kappa_{12}. \quad (398)$$

Die Entwicklung der konjugierten Matrix durch Rekursion verlangt Zwischenwerte mit einer größeren Anzahl von Stellen, um Fehler in der Zahlenrechnung auszuschließen. Das einwandfreie Ergebnis der Lösung kann durch die Berechnung der Vorzahl β_{11} mit Rückwärtselimination geprüft werden, wenn die Matrix nicht zur Nebendiagonale symmetrisch ist. Dies wird bei Symmetrie des Hauptsystems durch die Verwendung von Gruppen symmetrisch liegender Schnittkräfte nach (359) als überzählige Größen vermieden.

b) Rechenvorschrift bei Rückwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 234).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = (n-1) \dots 1$ aus

$$\delta_{kk}^{(n-k)} = \delta_{kk} - \frac{\delta_k^2(k+1)}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}, \dots \text{ und } \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}^{(n-2)}}, \quad (400)$$

die Belastungsglieder aus

$$\delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)} \frac{\delta_{(k+1)k}}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}.$$

Damit wird

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}. \quad (401)$$

Alle anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus der reduzierten Matrix bestimmt.

Die konjugierte Matrix.

Die Belastungszahlen werden der Reihe nach $\delta_{10}^{(n-1)} = \delta_{10} = 1, \delta_{20}^{(n-2)} = \delta_{20} = 1$ usw., während alle übrigen Null sind. Die Eliminationskoeffizienten

$$\kappa_{21} \dots \kappa_{32} \dots \kappa_{k(k-1)} \dots \kappa_{n(n-1)}$$

sind nach der reduzierten Matrix wiederum Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen aufsteigender Richtung X_{k-1}, X_k des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_n}{X_{n-1}} &= \frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}} = \kappa_{n(n-1)}; & \frac{X_{n-1}}{X_{n-2}} &= \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}} = \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n} \cdot \kappa_{n(n-1)}} = \kappa_{(n-1)(n-2)} \\ &\dots & &\dots \\ \frac{X_k}{X_{k-1}} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk}^{(n-k)}} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk} - \delta_{(k+1)k} \kappa_{(k+1)k}} = \kappa_{k(k-1)} \\ &\dots & &\dots \\ \frac{X_2}{X_1} &= \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23} \kappa_{32}} = \kappa_{21}. \end{aligned} \right\} (402)$$

Reduzierte Matrix bei Rückwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2	X_{k-3}	X_{k-1}	X_k	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n
$\delta_{11}^{(n-1)}$							$\delta_{10}^{(n-1)}$
$\delta_{21}^{(n-2)}$	$\delta_{22}^{(n-2)}$						$\delta_{20}^{(n-2)}$
		$\delta_{(k-1)(k-2)}^{(n-k+1)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(n-k)}$	$\delta_{kk}^{(n-k)}$			$\delta_{(k-1)(k-2)}^{(n-k+1)}$
							$\delta_{k0}^{(n-k)}$
					$\delta_{(n-1)(n-2)}^{(1)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}$	$\delta_{(n-1)(n-2)}^{(1)}$
						δ_{nn}	δ_{n0}

(399)

Rechenvorschrift zur Bildung der konjugierten Matrix (S. 235).

β_{11}	β_{12}	β_{13}	$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$	$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}
	β_{22}	β_{23}	$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$	$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}
		β_{33}	$\beta_{3(k-1)}$	β_{3k}	$\beta_{3(k+1)}$	$\beta_{3(n-1)}$	β_{3n}
			$\beta_{(k-1)(k-1)}$	$\beta_{(k-1)k}$	$\beta_{(k-1)(k+1)}$	$\beta_{(k-1)(n-1)}$	$\beta_{(k-1)n}$
				β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$	$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}
					$\beta_{(k+1)(k+1)}$	$\beta_{(k+1)(n-1)}$	$\beta_{(k+1)n}$
						$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$

(408)

Daher kann auch β_{11} aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen als Kettenbruch an- geschrieben werden. Er enthält die Formänderungen $\delta_{kk}^{(n-k)}$ und die Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \varkappa_{21}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \frac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23} \varkappa_{32}}}. \quad (403)$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \left\{ \frac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23} \left\{ \frac{\delta_{32}}{\delta_{33} - \dots - \delta_{(n-2)(n-1)} \left\{ \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n} \frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}^{(0)}} \right\}} \right\}} \right\}} \varkappa_{21} \varkappa_{32} \dots \varkappa_{(n-1)(n-2)} \varkappa_{n(n-1)} \left. \right\} \quad (404)$$

Die Vorzahlen $\beta_{21} \dots \beta_{k1} \dots \beta_{n1}$ werden durch Rekursion mit den Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt. Die Vorzahl β_{22} entsteht aus $\delta_{20} = 1$ mit $\beta_{12} = \beta_{21}$ und der Gl. (402)

$$\beta_{12} \delta_{21} + \beta_{22} \delta_{22}^{(n-2)} = 1; \quad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(n-2)}} - \beta_{21} \varkappa_{21}. \quad (405)$$

Die Vorzahlen $\beta_{32} \dots \beta_{k2} \dots \beta_{n2}$ sind dann wieder durch Rekursion bestimmt. Zu- letzt wird β_{nn} erhalten.

c) Gleichzeitige Verwendung der Kennbeziehungen aus Vorwärts- und Rückwärtselimination. Die Zwischenwerte der Rückwärtselimination zur Bildung der Vorzahl β_{11} , mit der zunächst nur die aus der Vorwärtselimination (394) gewonnene konjugierte Matrix nachgeprüft wird, dienen zu einer einfachen Berech- nung der Hauptglieder der konjugierten Matrix. Sind β_{nn} , $\beta_{(n-1)n}$ usw. durch Vorwärtselimination bekannt, so wird aus Gleichung n der reduzierten Matrix der Rückwärtselimination und mit $\delta_{(n-1)0} = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \beta_{(n-1)(n-1)} \delta_{n(n-1)} + \beta_{n(n-1)} \delta_{nn} &= 0. \\ \beta_{(n-1)(n-1)} &= - \frac{\delta_{nn}}{\delta_{n(n-1)}} \beta_{n(n-1)} = - \frac{1}{\varkappa_{n(n-1)}} \beta_{(n-1)n}. \end{aligned} \right\} \quad (406)$$

In ähnlicher Weise wird β_{kk} für $\delta_{k0} = 1$ aus der Gleichung $(k+1)$ der reduzierten Matrix gefunden.

$$\left. \begin{aligned} \beta_{kk} \delta_{(k+1)k} + \beta_{(k+1)k} \delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)} &= 0. \\ \beta_{kk} &= - \beta_{(k+1)k} \frac{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}{\delta_{(k+1)k}} = - \frac{1}{\varkappa_{(k+1)k}} \beta_{k(k+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (407)$$

Diese Beziehungen können an Stelle von (397) oder zu deren Nachprüfung als Zwischen- kontrollen verwendet werden.

Die konjugierte Matrix eines dreigliedrigen Ansatzes wird hiernach am einfach- sten mit der Entwicklung von β_{nn} und β_{11} in Gestalt zweier Kettenbrüche begonnen. Damit sind die Kennzahlen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt, mit denen die übrigen Vor- zahlen nach (392 u. 402) durch einfache Rekursion gefunden werden. Die Ansätze (397) dienen als Zwischenprüfung.

Die Rechenvorschrift wird in einer Tabelle S. 234 zusammengefaßt. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die Vorzahlen der konjugierten Matrix durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer dazwischenstehenden negativen Kennzahl $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ entstehen. Daher kann das Hauptglied β_{kk} , verglichen mit der Rekursion nach S. 233, durch Multiplikation von $\beta_{k(k+1)}$ mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$ berechnet werden.

Eine mittlere Vorzahl β_{kk} der Hauptdiagonale kann auch aus der Gleichung (k) des Ansatzes (399) mit $\delta_{k0} = 1$ in Verbindung mit den beiden Kennbeziehungen

$$-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \kappa_{(k-1)k} \quad \text{und} \quad -\frac{X_{k+1}}{X_k} = \kappa_{(k+1)k} \quad (409)$$

unmittelbar berechnet werden:

$$\beta_{kk} = \frac{1}{-\kappa_{(k-1)k} \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \kappa_{(k+1)k} \delta_{k(k+1)}}. \quad (410)$$

Anwendung auf die Lösung eines Ansatzes mit sechs Gleichungen.

1. Elastizitätsgleichungen:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	δ_{11}	δ_{12}					δ_{10}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}				δ_{20}
3		δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}			δ_{30}
4			δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}		δ_{40}
5				δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{50}
6					δ_{65}	δ_{66}	δ_{60}

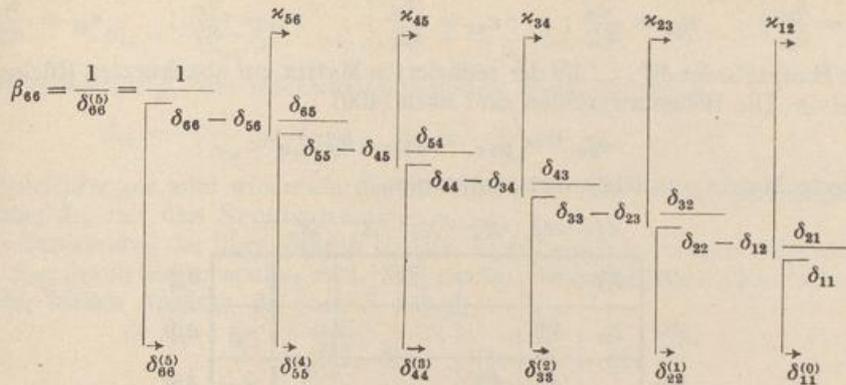
2. Vorwärtselimination nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus (381):

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6			
1	δ_{11}	δ_{12}					κ_{12}	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22}	δ_{23}					$\delta_{2\Sigma}$	δ_{20}
		$-\kappa_{12} \delta_{12}$						$-\kappa_{12} \delta_{1\Sigma}$	$-\kappa_{12} \delta_{10}$
2 ⁽¹⁾		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				κ_{23}	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
		(δ_{32})	δ_{33}	δ_{34}				$\delta_{3\Sigma}$	δ_{30}
			$-\kappa_{23} \delta_{23}$					$-\kappa_{23} \delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\kappa_{23} \delta_{20}^{(1)}$
3 ⁽²⁾			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			κ_{34}	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
			(δ_{43})	δ_{44}	δ_{45}			$\delta_{4\Sigma}$	δ_{40}
				$-\kappa_{34} \delta_{34}$				$-\kappa_{34} \delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\kappa_{34} \delta_{30}^{(2)}$
4 ⁽³⁾				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		κ_{45}	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
				(δ_{54})	δ_{55}	δ_{56}		$\delta_{5\Sigma}$	δ_{50}
					$-\kappa_{45} \delta_{45}$			$-\kappa_{45} \delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\kappa_{45} \delta_{40}^{(3)}$
5 ⁽⁴⁾					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	κ_{56}	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
					(δ_{65})	δ_{66}		$\delta_{6\Sigma}$	δ_{60}
						$-\kappa_{56} \delta_{56}$		$-\kappa_{56} \delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\kappa_{56} \delta_{50}^{(4)}$
6 ⁽⁵⁾						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$

$$X_6 = \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}; \quad \delta_{60} = \delta_{60}^{(5)} = 1; \quad X_6 = \beta_{66}.$$

Die anderen überzähligen Größen X_k oder β_{kh} entstehen durch Rekursion.

3. Vorwärts- und Rückwärtselimination als Kettenbruch. a) Kettenbruch zur Vorwärtselimination.



Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\kappa_{12} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}; \quad \kappa_{23} = \frac{\delta_{32}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad \kappa_{34} = \frac{\delta_{43}}{\delta_{33}^{(2)}}; \quad \kappa_{45} = \frac{\delta_{54}}{\delta_{44}^{(3)}}; \quad \kappa_{56} = \frac{\delta_{65}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{22}^{(1)} \dots \delta_{66}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur Vorwärtselimination. Die Belastungszahlen werden für jeden Belastungsfall nach (389) berechnet.

$$\delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \delta_{(k-1)0}^{(k-2)} \kappa_{(k-1)k}$$

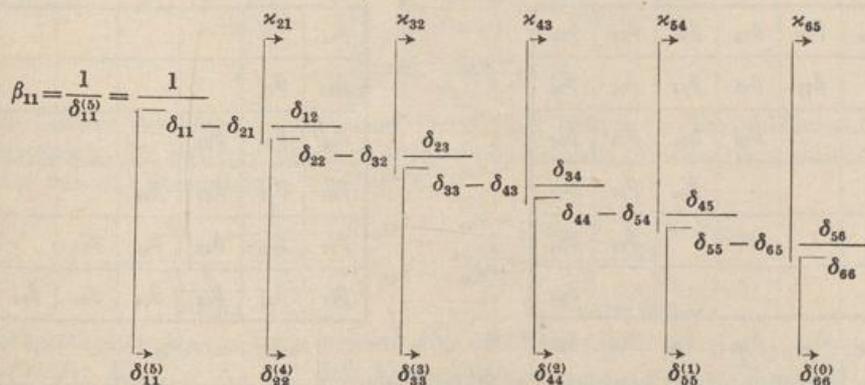
Reduzierte Matrix zur Vorwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
I	δ_{11}	δ_{12}					κ_{12} δ_{10}
2 ⁽¹⁾		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				κ_{23} $\delta_{20}^{(1)}$
3 ⁽²⁾			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			κ_{34} $\delta_{30}^{(2)}$
4 ⁽³⁾				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		κ_{45} $\delta_{40}^{(3)}$
5 ⁽⁴⁾					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	κ_{56} $\delta_{50}^{(4)}$
6 ⁽⁵⁾						$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$

(411)

Darnach wird für jeden Belastungsfall zuerst X_6 bestimmt. Die anderen überzähligen Größen $X_5 \dots X_1$ ergeben sich durch Rekursion.

b) Kettenbruch zur Rückwärtselimination.



Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\kappa_{65} = \frac{\delta_{55}}{\delta_{66}}; \quad \kappa_{54} = \frac{\delta_{45}}{\delta_{55}^{(1)}}; \quad \kappa_{43} = \frac{\delta_{34}}{\delta_{44}^{(2)}}; \quad \kappa_{32} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{33}^{(3)}}; \quad \kappa_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{55}^{(1)} \dots \delta_{11}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur abgekürzten Rückwärtselimination. Die Belastungszahlen sind nach (400)

$$\delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \kappa_{(k+1)k} \delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}.$$

Reduzierte Matrix zur Rückwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1 ⁽⁵⁾	$\delta_{11}^{(5)}$						$\delta_{10}^{(5)}$
2 ⁽⁴⁾	δ_{21}	$\delta_{22}^{(4)}$				κ_{21}	$\delta_{20}^{(4)}$
3 ⁽³⁾		δ_{32}	$\delta_{33}^{(3)}$			κ_{32}	$\delta_{30}^{(3)}$
4 ⁽²⁾			δ_{43}	$\delta_{44}^{(2)}$		κ_{43}	$\delta_{40}^{(2)}$
5 ⁽¹⁾				δ_{54}	$\delta_{55}^{(1)}$	κ_{54}	$\delta_{50}^{(1)}$
6					δ_{65}	δ_{66}	δ_{60}

Der Ansatz liefert für jede Belastung zuerst X_1 . Damit sind die anderen statisch überzähligen Größen $X_2 \dots X_6$ durch Rekursion bestimmt.

4. Konjugierte Matrix. Die konjugierte Matrix kann aus einem der beiden Kettenbrüche entwickelt werden. Bei Vorwärtselimination entsteht β_{66} und $\kappa_{56} \dots \kappa_{12}$. Die Gleichung 5⁽⁴⁾ der reduzierten Matrix (411) liefert mit $\beta_{65} = \beta_{56}$

$$\beta_{55} \delta_{55}^{(4)} + \beta_{65} \delta_{66} = 1; \quad \beta_{55} = \frac{1 - \beta_{56} \delta_{66}}{\delta_{55}^{(4)}} = \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}} - \beta_{56} \kappa_{65}.$$

Die Vorzahlen $\beta_{45} \dots \beta_{15}$ ergeben sich wieder durch Multiplikation mit $-\kappa_{45}$ usw., die übrigen Vorzahlen in ähnlicher Weise.

$$\beta_{44} = \frac{1 - \beta_{45} \delta_{45}}{\delta_{44}^{(3)}} = \frac{1}{\delta_{44}^{(3)}} - \beta_{45} \kappa_{45}, \quad \beta_{34}, \quad \beta_{24}, \quad \beta_{14},$$

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12} \delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12} \kappa_{12}.$$

Konjugierte Matrix aus

Vorwärtselimination und Rekursion.						Rückwärtselimination und Rekursion.						
$\rightarrow -\kappa_{21} - \kappa_{32} - \kappa_{43} - \kappa_{54} - \kappa_{65} \rightarrow$						$\delta_{10} \quad \delta_{20} \quad \delta_{30} \quad \delta_{40} \quad \delta_{50} \quad \delta_{60}$						
X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}						X_1
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}	$-\kappa_{12}$	$-\kappa_{21}$				X_2
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}	$-\kappa_{23}$	$-\kappa_{32}$				X_3
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}	$-\kappa_{34}$	$-\kappa_{43}$				X_4
X_5					β_{55}	β_{56}	$-\kappa_{45}$	$-\kappa_{54}$				X_5
X_6						β_{66}	$-\kappa_{56}$	$-\kappa_{65}$				X_6
	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}			$\leftarrow -\kappa_{12} - \kappa_{23} - \kappa_{34} - \kappa_{45} - \kappa_{56} \rightarrow$			

Die Berechnung der konjugierten Matrix ist bei Verwendung der Zwischenwerte

$\varkappa_{(k-1)k}$ und $\varkappa_{k(k-1)}$ beider Kettenbrüche kürzer. Die Rekursion mit β_{66} der Vorwärtselimination verwendet die Beziehungen

$$\beta_{55} = -\frac{1}{\varkappa_{66}} \beta_{56}, \dots, \beta_{11} = -\frac{1}{\varkappa_{21}} \beta_{12},$$

die Rekursion mit β_{11} der Rückwärtselimination die Beziehungen

$$\beta_{22} = -\frac{1}{\varkappa_{12}} \beta_{21}, \dots, \beta_{66} = -\frac{1}{\varkappa_{56}} \beta_{65}.$$

Die Pfeilrichtungen sind wiederum die Anweisung (S. 235) für die Berechnung der Vorzahlen β_{ik} mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$.

Zur Berechnung der überzähligen Größen X_k für einen beliebigen Belastungsfall $\delta_{1\otimes} \dots \delta_{6\otimes}$ durch Superposition nach (369) genügt ebenso wie für die Einflußlinie X_k einer der beiden Ansätze, da nach S. 166 $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=6} \beta_{ki} \delta_{i\otimes}, \quad (k = 1 \dots 6). \quad (412)$$

d) Ausgezeichnete Belastung mit ein oder zwei Belastungszahlen. Der Sonderfall $\delta_{k0} \neq 0, \delta_{i0} = 0$ ($i = 1 \dots k-1, k+1 \dots n$) gestattet folgende Umformung der Gleichung (k) der Matrix:

$$X_k (-\varkappa_{(k-1)k} \delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k} \delta_{(k+1)k}) = \delta_{k0},$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{-\varkappa_{(k-1)k} \delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k} \delta_{(k+1)k}}, \quad (413)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{k-1} &= -\varkappa_{(k-1)k} X_k, \dots, X_1 = -\varkappa_{12} X_2, \\ X_{k+1} &= -\varkappa_{(k+1)k} X_k, \dots, X_n = -\varkappa_{n(n-1)} X_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (414)$$

Sind bei der Belastung des Hauptsystems nur zwei Belastungszahlen $\delta_{(k-1)0}, \delta_{k0}$ von Null verschieden, so können die zugeordneten Verträglichkeitsbedingungen des Ansatzes

$$\left. \begin{aligned} (k-1): & X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0}, \\ (k): & \quad + X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}, \end{aligned} \right\} \quad (415)$$

mit

$$X_{k-2} = -X_{k-1} \varkappa_{(k-2)(k-1)}; \quad X_{k+1} = -X_k \varkappa_{(k+1)k}$$

in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angeschrieben werden.

$$X_{k-1} (\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)} \varkappa_{(k-2)(k-1)}) + X_k \delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0},$$

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k (\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)} \varkappa_{(k+1)k}) = \delta_{k0}.$$

Hieraus wird nach Division mit $\delta_{(k-1)k}$ in Verbindung mit (392) und (402)

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_{k-1}}{\varkappa_{(k-1)k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = R_{(k-1)k}, \\ X_{k-1} + \frac{X_k}{\varkappa_{k(k-1)}} &= \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = R_{kk}. \end{aligned} \right\} \quad (416)$$

Die Glieder der rechten Seite sind Quotienten bekannter Verschiebungen des Hauptsystems. Sie besitzen durch das Gleichheitszeichen dieselbe mechanische Bedeutung wie die überzähligen Größen X_k .

$$X_{k-1} = \frac{R_{(k-1)k} \frac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - R_{kk}}{1 - \frac{1}{\varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}}; \quad X_k = \frac{R_{kk} \frac{1}{\varkappa_{(k-1)k}} - R_{(k-1)k}}{1 - \frac{1}{\varkappa_{(k-1)k} \varkappa_{k(k-1)}}}. \quad (417)$$

Die Schnittkräfte $X_{k-2} \dots X_1$ werden mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k-2)(k-1)} \dots \varkappa_{12}$, die Schnittkräfte $X_{k+1} \dots X_n$ mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k+1)k} \dots \varkappa_{n(n-1)}$ bestimmt.

Die Lösung des Ansatzes kann auch bei einer beliebigen Anzahl von Belastungs-gliedern nach deren Aufteilung in Gruppen zu zweien verwendet werden. Das end-gültige Ergebnis entsteht durch Superposition der Teilergebnisse.

Durchgehender Träger zur Abstützung eines Ausziehgleises:

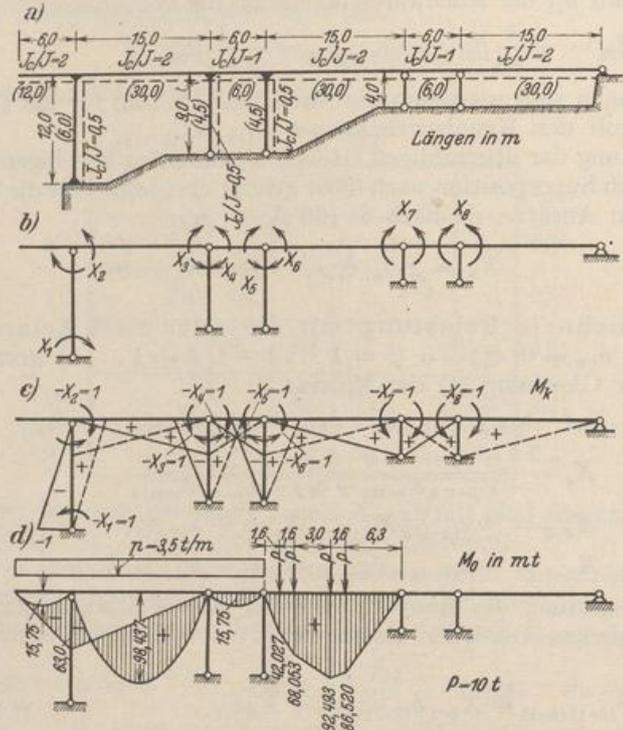


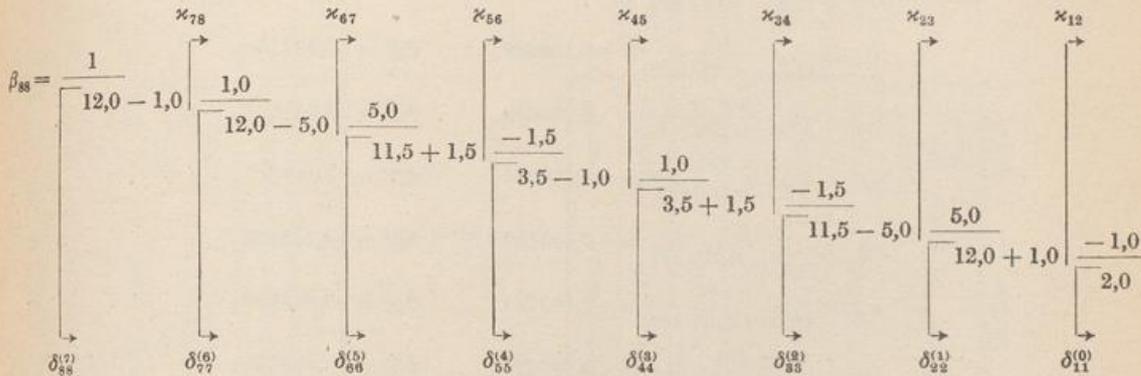
Abb. 219.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J , reduzierte Längen l_i (Abb. 219a).
2. Belastung. Lastenzug nach Abb. 219d.
3. Hauptsystem. Die Reihe der Balkenträger nach Abb. 219b, Momente M_k aus $-X_k = 1$ (Abb. 219c); Momente M_0 aus der Belastung (Abb. 219d).
4. Matrix der Bedingungs-gleichungen.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(δ_{k0})
(1)	2,0	- 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	- 1,0	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	+ 5,0	11,5	- 1,5	—	—	—	—	669,37
(4)	—	—	- 1,5	3,5	+ 1,0	—	—	—	31,50
(5)	—	—	—	+ 1,0	3,5	- 1,5	—	—	31,50
(6)	—	—	—	—	- 1,5	11,5	+ 5,0	—	905,06
(7)	—	—	—	—	—	+ 5,0	12,0	+ 1,0	800,72
(8)	—	—	—	—	—	—	+ 1,0	12,0	0,00

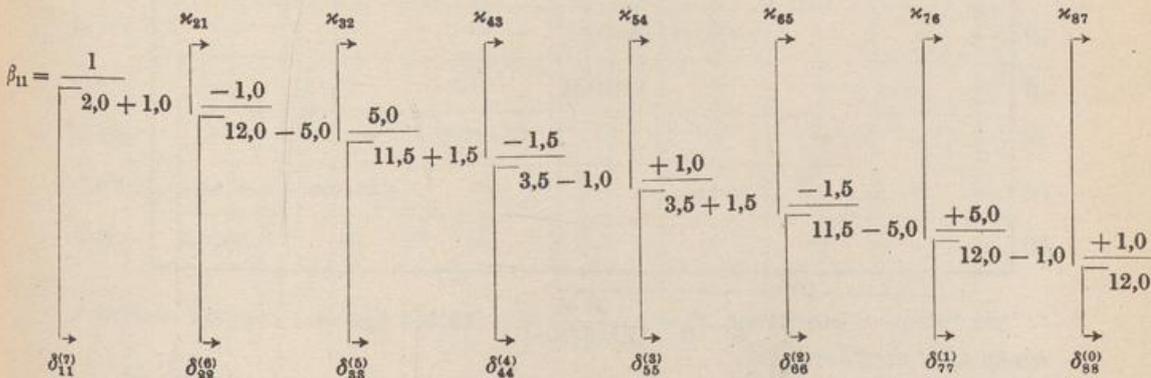
5a) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung von Kettenbrüchen.

α) Vorwärtselemination mit Kettenbruch:



$$\begin{aligned} \kappa_{12} &= -\frac{1}{2} = -0,5, & \delta_{11}^{(0)} &= 2,0, \\ \kappa_{23} &= \frac{5,0}{12,0 - 0,5} = 0,434783, & \delta_{22}^{(1)} &= 11,5, \\ \kappa_{34} &= \frac{-1,5}{11,5 - 2,173915} = -0,160839, & \delta_{33}^{(2)} &= 9,326085, \\ \kappa_{45} &= \frac{1,0}{3,5 - 0,241259} = 0,306867, & \delta_{44}^{(3)} &= 3,258741, \\ \kappa_{56} &= \frac{-1,5}{3,5 - 0,306867} = -0,469758, & \delta_{55}^{(4)} &= 3,193133, \\ \kappa_{67} &= \frac{5,0}{11,5 - 0,704637} = 0,463162, & \delta_{66}^{(5)} &= 10,795363, \\ \kappa_{78} &= \frac{1,0}{12,0 - 2,315810} = 0,103261, & \delta_{77}^{(6)} &= 9,684190, \\ \beta_{88} &= \frac{1,0}{12,0 - 0,103261} = 0,084057, & \delta_{88}^{(7)} &= 11,896739. \end{aligned}$$

β) Rückwärtselemination mit Kettenbruch:



$$\begin{aligned} \varkappa_{87} &= \frac{1,0}{12,0} = 0,083333, & \delta_{88}^{(0)} &= 12,00, \\ \varkappa_{76} &= \frac{5,0}{12,0 - 0,083333} = 0,419580, & \delta_{77}^{(1)} &= 11,916667, \\ \varkappa_{65} &= \frac{-1,5}{11,5 - 2,097900} = -0,159539, & \delta_{66}^{(2)} &= 9,402100, \\ \varkappa_{54} &= \frac{1,0}{3,5 - 0,239309} = 0,306683, & \delta_{55}^{(3)} &= 3,260691, \\ \varkappa_{43} &= \frac{-1,5}{3,5 - 0,306683} = -0,469731, & \delta_{44}^{(4)} &= 3,193317, \\ \varkappa_{32} &= \frac{5,0}{11,5 - 0,704597} = 0,463160, & \delta_{33}^{(5)} &= 10,795403, \\ \varkappa_{21} &= \frac{-1,0}{12,0 - 2,315800} = -0,103261, & \delta_{22}^{(6)} &= 9,684200, \\ \beta_{11} &= \frac{1,0}{2,0 - 0,103261} = 0,527221, & \delta_{11}^{(7)} &= 1,896739. \end{aligned}$$

γ) Berechnung der Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix (S. 243). Entwicklung von $\beta_{k(k+1)}$ aus $\beta_{(k+1)(k+1)}$ durch Rekursion mit den Kennbeziehungen $-\varkappa_{k(k+1)}$; Entwicklung von β_{kk} aus $\beta_{(k+1)k}$ durch Rekursion mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$. Nachprüfung von β_{kk} wegen der Fehlerempfindlichkeit mit dem Ansatz (396)

$$\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)} \quad (\text{S. 243}).$$

δ)

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=8} \beta_{ki} \delta_{i0}.$$

$$\begin{aligned} X_1 &= + 2,48520; & X_2 &= + 4,97039; & X_3 &= + 59,44205; & X_4 &= + 26,04114; \\ X_5 &= + 29,51865 & X_6 &= + 65,23799; & X_7 &= + 39,82042; & X_8 &= - 3,31856. \end{aligned}$$

ε) Die Anzahl der Multiplikationen ist durch die Einbeziehung der Belastung in die Elimination kleiner. In diesem Falle wird X_8 nach (390) mit der reduzierten Matrix der Vorwärtselimination bestimmt, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, α) enthalten sind. Die überzähligen Größen X_7 bis X_1 ergeben sich dann durch Rekursion desselben Ansatzes. Das Ergebnis für X_1 kann mit der reduzierten Matrix der Rückwärtselimination nachgeprüft werden, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, β) enthalten sind. Die Belastungsglieder werden in die reduzierte Matrix nach (389) oder (400) eingetragen.

Reduzierte Matrix aus der Vorwärtselimination:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
(1)	2,0	- 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	—	11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	—	9,326085	- 1,5	—	—	—	—	515,30
(4)	—	—	—	3,258741	+ 1,0	—	—	—	114,38
(5)	—	—	—	—	3,193133	- 1,5	—	—	- 3,00
(6)	—	—	—	—	—	10,795363	+ 5,0	—	903,37
(7)	—	—	—	—	—	—	9,684190	+ 1,0	382,31
(8)	—	—	—	—	—	—	—	11,896739	- 39,48

Die Rekursion beginnt mit $X_8 = \frac{-39,48}{11,896739} = -3,31856$ und wird nach der Rechenvorschrift unter 5b, β entwickelt.

Zahlenrechnung: $\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)} \cdot \alpha_{k(k+1)}$.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$1/\delta_{kk}^{(k-1)}$	0,500000	0,086957	0,107226	0,306864	0,313172	0,092632	0,103261	0,084057
$-\beta_{k(k+1)} \cdot \alpha_{k(k+1)}$	0,027221	0,021926	0,008763	0,031880	0,025372	0,022344	0,000896	—
β_{kk}	0,527221	0,108883	0,115989	0,338744	0,338544	0,114976	0,104157	0,084057

Konjugierte Matrix.

(1)	0,527221	+ 0,054442	- 0,025215	- 0,011844	+ 0,003633	+ 0,000580	- 0,000243	+ 0,000020	- 0,500000
(2)		0,108883	- 0,050430	- 0,023688	+ 0,007265	+ 0,001159	- 0,000486	+ 0,000040	+ 0,434783
(3)			0,115989	+ 0,054483	- 0,016709	- 0,002666	+ 0,001118	- 0,000093	- 0,160839
(4)				0,338744	- 0,103888	- 0,016574	+ 0,006954	- 0,000579	+ 0,306867
(5)					0,338544	+ 0,054011	- 0,022662	+ 0,001888	- 0,469758
(6)						0,114976	- 0,048242	+ 0,004020	+ 0,463162
(7)							0,104157	- 0,008680	+ 0,103261
(8)								0,084057	
$(\delta_{k0} =)$	0,00	354,37	669,37	31,5	31,5	905,06	800,72	0,00	

Vorwärtselimination nach C. F. Gauß (5b, a):

i	k	X_j								Σ	0		
		1	2	3	4	5	6	7	8				
1	δ_{1k}	2,0	-1,0	-	-	-	-	-	-	-	-	+ 1,0	+ 0,00
2	δ_{2k}	(-1,0)	12,0	+5,0	-	-	-	-	-	-	-	+ 16,0	354,37
	$-\kappa_{12} \delta_{1k}$		-0,5	-	-	-	-	-	-	-	-	- 0,5	0,00
	$\delta_{2k}^{(1)}$		11,5	+5,0	-	-	-	-	-	-	-	+ 16,5	354,37
3	δ_{3k}		(+5,0)	11,5	-1,5	-	-	-	-	-	-	+ 15,0	669,37
	$-\kappa_{31} \delta_{2k}^{(1)}$			-2,173915	-	-	-	-	-	-	-	- 7,17392	- 154,07
	$\delta_{3k}^{(2)}$			9,326085	-1,5	-	-	-	-	-	-	7,82608	515,30
4	δ_{4k}			(-1,5)	3,5	+1,0	-	-	-	-	-	3,0	31,50
	$-\kappa_{34} \delta_{3k}^{(2)}$				-0,241259	-	-	-	-	-	-	1,25874	82,88
	$\delta_{4k}^{(3)}$				3,258741	+1,0	-	-	-	-	-	4,25874	114,38
5	δ_{5k}				(+1,0)	3,5	-1,5	-	-	-	-	3,0	31,50
	$-\kappa_{45} \delta_{4k}^{(3)}$					-0,306867	-	-	-	-	-	- 1,30687	- 35,10
	$\delta_{5k}^{(4)}$					3,193133	-1,5	-	-	-	-	1,69313	- 3,60
6	δ_{6k}					(-1,5)	11,5	+5,0	-	-	-	+ 15,0	905,06
	$-\kappa_{56} \delta_{5k}^{(4)}$						-0,704637	-	-	-	-	0,79536	- 1,69
	$\delta_{6k}^{(5)}$						10,795363	+5,0	-	-	-	15,79536	903,37
7	δ_{7k}						(+5,0)	12,0	+1,0	-	-	18,0	800,72
	$-\kappa_{67} \delta_{6k}^{(5)}$							-2,315810	-	-	-	- 7,31581	- 418,41
	$\delta_{7k}^{(6)}$							9,684190	+1,0	-	-	10,68419	382,31
8	δ_{8k}							(+1,0)	12,0	-	-	13,0	0,00
	$-\kappa_{78} \delta_{7k}^{(6)}$								-0,103261	-	-	- 1,10326	- 39,48
	$\delta_{8k}^{(7)}$								11,896739	-	-	11,89674	- 39,48

Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus (419)*.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7				
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}					κ_{12}	κ_{13}	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}						$\delta_{2\Sigma}$	δ_{20}
		$-\kappa_{12} \delta_{12}$	$-\kappa_{13} \delta_{13}$	—						$-\kappa_{12} \delta_{1\Sigma}$	$-\kappa_{13} \delta_{10}$
2 ⁽¹⁾		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	δ_{24}				κ_{23}	κ_{24}	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
	(δ_{31})	(δ_{32})	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}					$\delta_{3\Sigma}$	δ_{30}
			$-\kappa_{13} \delta_{13}$	—	—					$-\kappa_{13} \delta_{1\Sigma}$	$-\kappa_{13} \delta_{10}$
			$-\kappa_{23} \delta_{23}^{(1)}$	$-\kappa_{23} \delta_{24}$	—					$-\kappa_{23} \delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\kappa_{23} \delta_{20}^{(1)}$
3 ⁽²⁾			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	δ_{35}			κ_{34}	κ_{35}	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
		(δ_{42})	(δ_{43})	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}				$\delta_{4\Sigma}$	δ_{40}
				$-\kappa_{24} \delta_{24}$	—	—				$-\kappa_{24} \delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\kappa_{24} \delta_{20}^{(1)}$
				$-\kappa_{34} \delta_{34}^{(2)}$	$-\kappa_{34} \delta_{35}$	—				$-\kappa_{34} \delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\kappa_{34} \delta_{30}^{(2)}$
4 ⁽³⁾				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	δ_{46}		κ_{45}	κ_{46}	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
			(δ_{53})	(δ_{54})	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}			$\delta_{5\Sigma}$	δ_{50}
					$-\kappa_{35} \delta_{35}$	—	—			$-\kappa_{35} \delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\kappa_{35} \delta_{30}^{(2)}$
					$-\kappa_{45} \delta_{45}^{(3)}$	$-\kappa_{45} \delta_{46}$	—			$-\kappa_{45} \delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\kappa_{45} \delta_{40}^{(3)}$
5 ⁽⁴⁾					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{56}^{(4)}$	δ_{57}	κ_{56}	κ_{57}	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
				(δ_{64})	(δ_{65})	δ_{66}	δ_{67}			$\delta_{6\Sigma}$	δ_{60}
						$-\kappa_{46} \delta_{46}$	—			$-\kappa_{46} \delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\kappa_{46} \delta_{40}^{(3)}$
						$-\kappa_{56} \delta_{56}^{(4)}$	$-\kappa_{56} \delta_{57}$			$-\kappa_{56} \delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\kappa_{56} \delta_{50}^{(4)}$
6 ⁽⁵⁾						$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{67}^{(5)}$	κ_{67}		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$
					(δ_{76})	(δ_{76})	δ_{77}			$\delta_{7\Sigma}$	δ_{70}
							$-\kappa_{57} \delta_{57}$			$-\kappa_{57} \delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\kappa_{57} \delta_{50}^{(4)}$
							$-\kappa_{67} \delta_{67}^{(5)}$			$-\kappa_{67} \delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$-\kappa_{67} \delta_{60}^{(5)}$
7 ⁽⁶⁾							$\delta_{77}^{(6)}$			$\delta_{7\Sigma}^{(6)}$	$\delta_{70}^{(6)}$

Die Zeilen 1, 2⁽¹⁾, 3⁽²⁾ . . . 7⁽⁶⁾ bilden zusammen die reduzierte Matrix.

$$\left. \begin{aligned} X_7 &= \frac{\delta_{70}^{(6)}}{\delta_{77}^{(6)}}, \\ X_6 \delta_{66}^{(5)} &= \delta_{60}^{(5)} - X_7 \delta_{67}^{(5)}, \quad X_5 \delta_{55}^{(4)} = \delta_{50}^{(4)} - X_7 \delta_{57} - X_6 \delta_{56}^{(4)} \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (420)$$

Der Sonderfall $\delta_{10} = \dots = \delta_{60} = 0, \delta_{70} = 1$ liefert $X_7 = \beta_{77} = \frac{1}{\delta_{77}^{(6)}}$. Für die Rekursion

* Die Klammerwerte sind nur zur Erleichterung der Summenbildung $\delta_{k\Sigma}$ beigelegt.

ist eine Kennbeziehung mit je zwei Kennziffern $\kappa_{k(k+1)}, \kappa_{k(k+2)}$ zwischen drei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen $k, (k+1), (k+2)$ charakteristisch.

$$\left. \begin{aligned} \beta_{67} &= -\kappa_{67} \beta_{77}, & \beta_{57} &= -\kappa_{56} \beta_{67} - \kappa_{57} \beta_{77}, \dots, & \beta_{17} &= -\kappa_{12} \beta_{27} - \kappa_{13} \beta_{37}, \\ \beta_{66} &= \frac{1}{\delta_{66}^{(5)}} - \kappa_{67} \beta_{67}, & \beta_{56} &= -\kappa_{56} \beta_{66} - \kappa_{57} \beta_{67}, \dots, & \beta_{16} &= -\kappa_{12} \beta_{26} - \kappa_{13} \beta_{36}, \\ \beta_{55} &= \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}} - \kappa_{56} \beta_{56} - \kappa_{57} \beta_{57}, \dots & & & \beta_{11} &= \frac{1}{\delta_{11}} - \kappa_{12} \beta_{12} - \kappa_{13} \beta_{13}. \end{aligned} \right\} (421)$$

Das Ergebnis kann durch Rückwärtselimination nachgeprüft werden. Damit ist die konjugierte Matrix durch folgende Rechenvorschrift bestimmt.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	δ_{70}		
X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{17}		
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}	β_{27}	$-\kappa_{12}$	$-\kappa_{13}$
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}	β_{37}	$-\kappa_{23}$	$-\kappa_{24}$
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}	β_{47}	$-\kappa_{34}$	$-\kappa_{35}$
X_5					β_{55}	β_{56}	β_{57}	$-\kappa_{45}$	$-\kappa_{46}$
X_6						β_{66}	β_{67}	$-\kappa_{56}$	$-\kappa_{57}$
X_7							β_{77}	$-\kappa_{67}$	

(422)

Die Lösung eines siebengliedrigen Ansatzes erfährt keine grundsätzliche Änderung. Die folgenden Bemerkungen genügen zur Anwendung.

Matrix und reduzierte Matrix bei Vorwärtselimination (423).

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7								
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}				δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}			
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}			δ_{20}		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	δ_{25}		
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}		δ_{30}			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	δ_{36}	
δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}	δ_{47}	δ_{40}				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{46}^{(3)}$	δ_{47}
	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}	δ_{50}					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{56}^{(4)}$	$\delta_{57}^{(4)}$
		δ_{63}	δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}	δ_{67}	δ_{60}						$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{67}^{(5)}$
			δ_{74}	δ_{75}	δ_{76}	δ_{77}	δ_{70}							$\delta_{77}^{(6)}$

Die Berechnung von X_7 und die Rekursion sind daher für eine ausgezeichnete Belastung ebenso wie bei dem fünfgliedrigen Ansatz (419ff.) zu behandeln. Dasselbe gilt für die konjugierte Matrix. Rückwärtselimination führt zu einem ähnlichen Ergebnis.

Helmert, R.: Die Ausgleichsrechnung, 2. Aufl. Leipzig 1907. — Hertwig, A.: Die Auflösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Müller-Breslau-Festschrift 1912 S. 37. — Ostfeld, A.: Rechnerische Auflösung von fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1913

S. 120. — Frandsen, P.: Rechnerische Auflösung von Clapeyronschen Gleichungen. Eisenbau 1913 S. 440. — Lewe, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach dem Verfahren des Zahlenrechtecks. Borna 1915. — Pirlet, J.: Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1916 S. 139. — Lewe, V.: Die mathematisch-rechnerische Auflösung der allgemeinen sowie der drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 175. — Hertwig, A.: Einige besondere Klassen linearer Gleichungen und ihre Auflösung in der Statik der durchlaufenden Träger und der Rahmengebilde. Eisenbau 1917 S. 69. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 111 u. 299. — Derselbe: Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Derselbe: Statik der Baukonstr. Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922; II. Abt. 2. Aufl. Leipzig 1925. — Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1, 7. Aufl. Stuttgart 1920. — Domke, O.: Dachbauten, Handbuch für Eisenbetonbau Bd. 10, 2. Aufl. Berlin 1923. — Bornemann: Rechenvorschrift zur Auflösung symmetrischer Elastizitätsgleichungen. Bautechn. 1926 S. 455. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegegesteiften Stab- und Flächentragwerke. I. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Mehmke, R.: Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1930 S. 508. — Worch, G.: Über die zweckmäßigste Art lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 175.

30. Auflösung der Gleichungen durch Iteration.

Die Brauchbarkeit der Wurzeln X_h, β_{hk} einer größeren Anzahl von linearen Gleichungen scheidet nicht selten an der Fehlerempfindlichkeit der Zahlenrechnung. Der Ansatz wird durch die Wurzeln nicht mehr identisch erfüllt. Um nun die Auflösung nicht mit einer größeren Anzahl von Stellen von Anfang an zu wiederholen, kann das Ergebnis als Näherung angesehen und durch Iteration verbessert werden. Dieselbe Rechnung ist unter Umständen auch bei nachträglichen Änderungen der Vorzahlen δ_{ik} nützlich. Diese können von Änderungen der Form und der Querschnittsverhältnisse des Stabzugs herrühren. Sie können sich auch durch die nachträgliche Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente und aus der Verschiebung einzelner Stabknoten ergeben haben, wenn zur Vereinfachung der Rechnung zunächst geometrische Bindungen angenommen worden sind (S. 301). Das Ergebnis der Elimination mit den angenäherten Vorzahlen wird dann als erste Näherung für den verbesserten Ansatz δ_{ik}, δ_{i0} verwendet. Auf diese Weise lassen sich unter Umständen auch Systeme mit verschiedenen Abmessungen trotz hochgradiger statischer Unbestimmtheit leicht in bezug auf ihre wirtschaftlichen Eigenschaften vergleichen.

Die Näherungsfolgen können naturgemäß auch aus beliebigen Annahmen $X_{k,0}$ für die überzähligen Schnittkräfte entwickelt werden, wenn die Konvergenz einer Iteration feststeht. Hierbei spielt die Fehlerempfindlichkeit für die endgültige Lösung keine Rolle, da selbst Rechenfehler ausgeglichen werden. Die vorgeschriebene Genauigkeit der Lösung läßt sich jedoch in diesem Falle nur durch unnötig viele Näherungsfolgen erkaufen.

Die Rechenvorschrift. In der Regel wird die schrittweise Auflösung eines linearen Ansatzes (293) von der Form

$$\sum \delta_{kh} X_h - \delta_{k0} = 0, \quad k, h = 1 \dots n; \quad \delta_{kh} = \delta_{hk} \quad (424)$$

durch eine Näherungsfolge eingeleitet, bei der die unbekannte Schnittkraft X_k in der Hauptdiagonale der Matrix als Funktion der übrigen Glieder angegeben wird. Diese werden zunächst mit $X_{h,0}$ geschätzt.

$$X_{k,1} = -\frac{1}{\delta_{kk}} \left(\sum_h \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{k0} \right); \quad \left. \begin{array}{l} h = 1 \dots (k-1), (k+1) \dots n \\ k = 1 \dots n \end{array} \right\} \quad (425)$$

Die \sum_h enthält dabei nur diejenigen Glieder der Zeile k , deren Indizes h von k verschieden sind ($h \neq k$). Der Ansatz konvergiert, wenn die Diagonalglieder in der Matrix der Vorzahlen groß gegenüber den Nebengliedern sind oder genauer, wenn

jede der n Summen aus den Beträgen der $(n-1)$ Nebenglieder δ_{ki} einer Zeile der Matrix dividiert durch die Vorzahl δ_{kk} in der Diagonale < 1 ist. In der zweiten Näherungsfolge treten die Werte $X_{h,1}$ an die Stelle von $X_{h,0}$. Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis $X_{k,v} \approx X_{k,(v+1)} = X_k$.

Um jedoch in jedem Falle eine Konvergenz der Iteration zu erreichen und außerdem die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen zu vermindern, wird die Iteration in Einzelschritten durchgeführt. Hierbei werden die Ergebnisse $X_{1,v}, \dots, X_{m,v}$ einer Näherungsfolge v bereits im Ansatz für $X_{(m+1),v}$ derselben Näherungsfolge verwendet. Die unbekanntenen Schnittkräfte $X_{2,0} \dots X_{n,0}$ der ersten Näherungsfolge werden angenommen. Dabei wird dann

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_{1,1} &= \delta_{10} - \sum_{h=2}^n \delta_{1h} X_{h,0}, & \delta_{22} X_{2,1} &= \delta_{20} - \delta_{21} X_{1,1} - \sum_{h=3}^n \delta_{2h} X_{h,0}, \\ \delta_{kk} X_{k,1} &= \delta_{k0} - \left(\sum_{h=1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} + \sum_{h=k+1}^n \delta_{kh} X_{h,0} \right), \\ \delta_{nn} X_{n,1} &= \delta_{n0} - \sum_{h=1}^{n-1} \delta_{nh} X_{h,1}. \end{aligned} \right\} (426)$$

Die zweite Näherungsfolge beginnt mit $\delta_{11} X_{1,2} = \delta_{10} - \sum_{h=2}^n \delta_{1h} X_{h,1}$ usw. Die Rechnung wird fortgesetzt, bis $X_{k,v} \approx X_{k,(v+1)}$ erhalten wird.

Konvergenzbeweis. Jede Gleichung (424) ist nach (314) eine partielle Ableitung der Formänderungsarbeit A_i oder einer der ihr verwandten Funktionen A_i^* oder A_i^{**} , die allgemein mit \bar{A}_i bezeichnet werden. Die Formänderungsarbeit setzt sich aus dem statisch bestimmten Anteil $\bar{A}_{i,0}$ und dem Anteil aus den überzähligen Kräften X_k zusammen:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i,0} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_h \delta_{kh} X_h X_k - \sum \delta_{k0} X_k. \quad (427)$$

Sie wird zum Minimum, wenn die Spannungen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind. Diese Minimalbedingung begründet die Konvergenz der Iteration, da z. B. $X_{k,1}$ so bestimmt wird, daß die Minimalbedingung

$$-\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial X_k} = \delta_{k0} - \sum_{h=1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} - \sum_{h=k+1}^n \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{kk} X_{k,1} = 0 \quad (428)$$

mit dem verbesserten Werte $X_{k,1}$ erfüllt ist. $X_{k,1}$ ist daher ein besserer Wert im Vergleich zu $X_{k,0}$, so daß die Näherungsfolge in jedem Falle konvergiert. Die Rechnung wird um so schneller abgeschlossen, je größer die Vorzahlen in der Diagonale der Matrix gegenüber den Nebengliedern sind, d. h. je schneller jede Zeile k nach beiden Seiten abklingt.

Die Annahmen für die $X_{k,0}$ der ersten Näherungsfolge stützen sich am besten auf Ergebnisse aus der Untersuchung geeigneter Teilsysteme. Dabei liegt es am nächsten, die Nebenglieder jeder Gleichung in der ersten Näherungsfolge Null zu setzen und damit die $X_{k,1}$ aus einfach statisch unbestimmten Systemen veränderlicher Gliederung zu berechnen. In anderen Fällen sind oft Gruppen von zwei und drei statisch unbestimmten Schnittkräften vorhanden, deren gegenseitige Abhängigkeit im Vergleich zu anderen statisch unbestimmten Schnittkräften größer ist. Das vorgelegte Stabwerk wird dann zunächst in Teilsysteme zerlegt, deren überzählige Schnittkräfte leicht berechnet werden und für die erste Näherungsfolge als Grundlage dienen. Oft kann auch bei der Iteration von den Ergebnissen mit drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen ausgegangen werden. Diese Annahmen sind für die Genauigkeit des Ergebnisses unwesentlich, dagegen für den Umfang der Rechnung, also durch die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen von Bedeutung.

Umformung des Ansatzes. Ist die konjugierte Matrix einer Näherungsrechnung mit den Zahlen $\beta_{1k} \dots \beta_{nk}$ ($k = 1 \dots n$) bekannt, so kann jede Gleichung eines in bezug auf Systemgestaltung oder Rechengenauigkeit endgültigen Ansatzes mit diesen Vorzahlen erweitert werden, so daß durch Addition n Gleichungen von der folgenden Form entstehen:

$$k: \quad X_1 \sum_{h=1}^n (\delta_{h1} \beta_{hk}) + X_2 \sum_{h=1}^n (\delta_{h2} \beta_{hk}) + \dots + X_k \sum_{h=1}^n (\delta_{hk} \beta_{hk}) + \dots + X_n \sum_{h=1}^n (\delta_{hn} \beta_{hk}) \\ = \sum_{h=1}^n (\delta_{h0} \beta_{hk}); \quad k = 1 \dots n. \quad (429)$$

Abgekürzte Schreibweise:

$$\lambda_{1,k} X_1 + \lambda_{2,k} X_2 + \dots + \lambda_{k,k} X_k + \dots + \lambda_{n,k} X_n = \lambda_{k,0}.$$

Da die Vorzahlen β_{hk} die Gleichungen des endgültigen Ansatzes nahezu erfüllen, so ist nach S. 223

$$\lambda_{1,k} = \sum_{h=1}^n \delta_{h1} \beta_{hk} \approx 0; \quad \lambda_{k,k} = \sum_{h=1}^n \delta_{hk} \beta_{hk} \approx 1; \quad \lambda_{n,k} = \sum_{h=1}^n \delta_{hn} \beta_{hk} \approx 0 \quad (430)$$

und damit diejenige Form eines linearen Ansatzes vorhanden, die bei der Iteration bereits mit zwei oder drei Näherungsfolgen ein genaues Ergebnis verbürgt. Die Matrix der Vorzahlen $\lambda_{i,k}$ ist jedoch, wie leicht einzusehen ist, nicht mehr zur Hauptdiagonale symmetrisch ($\lambda_{i,k} \neq \lambda_{k,i}$). Dies ist nur der Fall, wenn die Matrix der Vorzahlen δ_{ik} zur Nebendiagonale symmetrisch ist.

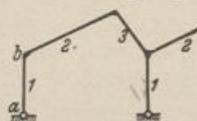


Abb. 221.

$$J_e J_{1,a} = 3,44, \quad J_e J_{1,b} = 0,6762, \\ J_e J_1 = 1, \text{ vgl. Tabelle 11,} \\ J_e J_2 = 0,6762, \quad \zeta_2 = 1, \\ J_e J_3 = 0,8784, \quad \zeta_3 = 1.$$

festgestellt worden sind. Auf diese Weise entsteht die folgende neue Matrix der Elastizitätsgleichungen für Eigengewicht:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	δ_{k0}
+ 7,6396	- 1,0321	+ 1,7063	- 4,3599	0	- 122,8500
- 1,0321	+ 14,3589	+ 1,7063	- 6,3599	0	+ 49,2637
+ 1,7063	+ 1,7063	+ 7,6396	- 1,0321	+ 6,0662	- 122,8500
- 4,3599	- 6,3599	- 1,0321	+ 14,3589	+ 8,0662	+ 49,2637
0	0	+ 6,0662	+ 8,0662	+ 24,0627	- 172,1137

Die Ausgangswerte $X_{k,0}$ der Iteration sind die Ergebnisse auf S. 229. Nach der ersten Gleichung ergibt sich mit $X_{2,0}$, $X_{3,0}$, $X_{4,0}$ und $X_{5,0}$ der Wert $X_{1,1} = -9,716$. Ebenso wird $X_{2,1} = +6,564$ aus der zweiten Gleichung mit $X_{1,1}$, $X_{3,0}$, $X_{4,0}$ und $X_{5,0}$, $X_{3,1} = -9,304$ aus der dritten Gleichung mit $X_{1,1}$, $X_{2,1}$, $X_{4,0}$ und $X_{5,0}$ gefunden.

Die Produktsummen werden bei Verwendung der Rechenmaschine ohne Zwischenablesung gebildet und durch δ_{kk} dividiert, so daß nur die Teilergebnisse der Näherungsfolgen aufgeschrieben werden. Um die wiederholte Division zu vermeiden, empfiehlt es sich, die Gleichungen (424) vor Beginn der Rechnung auf $\delta_{kk} = 1$ umzuformen.

Die Konvergenz der Iteration ist nach den Ergebnissen der 7. und 8. Zeile schlecht. Sie zeigt jedoch gewisse Gesetzmäßigkeiten, mit denen sich zugeordnete Glieder der Näherungsfolgen dem Endwert nähern. Diese dienen dazu, um einzelne Zeilen zu überspringen und damit die Iteration abzukürzen.

Da die konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ik} des Beispiels für das ursprüngliche Gleichungs-

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Ausgangswerte .	- 9,174	+ 6,011	- 8,776	+ 6,295	- 6,577
1. Iteration . .	- 9,716	+ 6,564	- 9,304	+ 6,414	- 6,957
2. " . .	- 9,455	+ 6,698	- 9,074	+ 6,783	- 7,139
3. " . .	- 9,278	+ 6,847	- 8,953	+ 7,013	- 7,247
7. " . .	- 8,988	+ 7,070	- 8,806	+ 7,346	- 7,395
8. " . .	- 8,966	+ 7,087	- 8,797	+ 7,369	- 7,405
12. " . .	- 8,932	+ 7,113	- 8,786	+ 7,402	- 7,419
13. " . .	- 8,933	+ 7,111	- 8,783	+ 7,404	- 7,420
14. " . .	- 8,933	+ 7,112	- 8,782	+ 7,406	- 7,421

system bekannt ist, empfiehlt sich die Umformung der Gleichungen nach (429). Man erhält aus der endgültigen δ_{ik} -Matrix von S. 250 und der genäherten β_{ik} -Matrix von S. 229 die Beiwerte $\lambda_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n} \delta_{hk} \beta_{hi}$ und damit das Gleichungssystem

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\lambda_{k,0}$
+ 1,46665	+ 0,05433	+ 0,04677	- 0,20281	- 0,01861	- 14,48724
- 0,00265	+ 1,40908	+ 0,03189	- 0,05369	+ 0,00081	+ 9,36405
- 0,00282	+ 0,05195	+ 1,47250	+ 0,05997	+ 0,23421	- 13,82785
- 0,06079	+ 0,05020	+ 0,03926	+ 1,30460	+ 0,06022	+ 9,77407
+ 0,02084	- 0,02795	+ 0,02120	+ 0,02214	+ 1,32910	- 10,27286

Die Iteration wird für diesen Ansatz mit den gleichen Näherungswerten $X_{k,0}$ (S. 229) begonnen und in Einzelschritten durchgeführt. Sie konvergiert schnell:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Ausgangswerte.	- 9,174	+ 6,011	- 8,776	+ 6,295	- 6,577
1. Iteration . .	- 9,033	+ 7,070	- 8,868	+ 7,170	- 7,417
2. " . .	- 8,960	+ 7,107	- 8,771	+ 7,407	- 7,423
3. " . .	- 8,931	+ 7,114	- 8,780	+ 7,409	- 7,423
4. " . .	- 8,931	+ 7,114	- 8,780	+ 7,409	- 7,423

Runge, C.: Praxis der Gleichungen. Leipzig 1921. — Mises, R. v., u. H. Pollaczek-Geiringer: Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Z. angew. Math. Mech. 1929 S. 58, 152. — Domke, O.: Dachbauten. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 10. 2. Aufl. Berlin 1923.

31. Allgemeine Rechenvorschrift zur Untersuchung statisch unbestimmter Stabwerke.

1. Beschreibung der geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks. Das Tragwerk wird in einzelne gerade oder gekrümmte Stäbe und Stabzüge zerlegt, deren Achsen durch Lage, Länge und Form, deren Querschnitte durch Umriß, Fläche und durch die Hauptträgheitsmomente beschrieben werden. Unter Umständen sind auch Angaben über die Abstände w_a, w_i der Kernpunkte a', i' notwendig. Der Spurpunkt der Stabachse ist der Schwerpunkt des Querschnitts. Die Bezugsachsen y und z fallen mit den Hauptträgheitsachsen, die Spur s der Kraftebene in der Regel auch mit einer Symmetrieachse zusammen (S. 25 ff.). Die Trägheitsmomente werden zur Berechnung der Formänderung von Bauteilen aus Eisenbeton auf den vollen Querschnitt mit oder ohne Beachtung des zehnfachen Stahlquerschnitts bezogen. Für die mittragende Plattenbreite einer Trägerrippe gelten die Bemerkungen auf S. 94.

Die Materialkonstanten werden in der Regel nach den Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton festgesetzt. In diesen ist für die Berechnung von Formänderungen $E_s = 2100 \text{ t/cm}^2$, $E_b = 210 \text{ t/cm}^2$ und $\alpha_t = 0,00001$ vorgesehen.

2. Belastung und Stützung des Tragwerks. Der Festigkeitsnachweis verlangt genaue Angaben über das Eigengewicht des Tragwerks mit seiner Ausrüstung und über die Nutzlast aus stetig verteilter Belastung und Einzellasten. Hierzu treten Vorschriften über die Zerlegung der Lastenzüge zur Bildung der Grenzwerte in Verbindung mit Einflußlinien und Angaben über die Belastung durch Schnee, Wind und Nebenkraften, über deren Eintragung und die Verteilung der Einzellasten. Die elastischen Eigenschaften der Stützung und die möglichen Stützenverschiebungen werden in jedem Falle geschätzt und die Temperaturänderung und das Schwinden des Baustoffes durch Annahmen abgegrenzt.

3. Das Hauptsystem. Die ausgezeichneten Stützenwiderstände und Schnittkräfte X_k werden nach den Bemerkungen auf S. 170 ausgewählt. Damit sind Hauptsystem und Verträglichkeitsbedingungen $1_k \cdot \delta_k = 0$ bekannt. Diese werden nach Abschn. 24 oder für Gruppenlasten nach Abschn. 36 entwickelt. Die Stütz- und Schnittkräfte C_k, N_k, M_k, Q_k aus $-X_k = 1$ und C_0, N_0, M_0, Q_0 aus der vorgeschriebenen Belastung werden in einem statisch bestimmten Hauptsystem nach Abschn. 13 ff., in einem statisch unbestimmten Hauptsystem in der Regel mit Hilfe von Tabellen berechnet und voneinander getrennt in einzelne Stabnetze derart eingetragen, daß die Ordinaten der Schaulinien bei jeder Aufgabe einheitlich, z. B. stets an der Zugseite des Stabes erscheinen.

4. Die Vorzahlen δ_{ik} . Die Vorzahlen δ_{ik} sind unabhängig von der Belastung des Tragwerks. Sie können als Verschiebungen unmittelbar aus den Tabellen 17 bis 19 entnommen oder durch Integration nach (300) mit Hilfe der Tabellen 12 bis 16 berechnet werden. Die Funktionen $\zeta = J_h/J$ oder $J_h/J \cos \alpha$ zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften des Stabes l_h sind in der Regel konstant oder werden zur Berechnung eines angenähert richtigen, geschlossenen Ausdrucks durch geeignete Funktionen nach (188) ersetzt.

Die Freiwerte n und r der Ansätze (188) dienen zur Angleichung der Funktion an die bauliche Ausgestaltung der Stäbe. Ist die Berechnung in dieser Form ungenügend, so werden die Vorzahlen graphisch oder numerisch mit Hilfe der Simpsonschen Reihe nach (181) integriert. Hierbei kann der Integrationsbereich auch in Stufen konstanter elastischer Wirkung eingeteilt werden. Die Zahlenrechnung läßt sich nach S. 165 durch die Arbeitsausdrücke $1_k \delta_{k\Sigma} \dots$ und $1_\Sigma \delta_{\Sigma\Sigma}$ nachprüfen.

5. Die konjugierte Matrix. Die Vorzahlen β_{hk} werden bei der Untersuchung einer größeren Anzahl von Belastungsfällen nach den allgemeinen Angaben in

Abschn. 25, für Stabwerke mit wenig überzähligen Größen nach Abschn. 26 berechnet. Die Ergebnisse müssen die geometrischen Bedingungen $\delta_k = 0$ identisch erfüllen.

6. Die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}$. Die Belastungszahlen sind Formänderungen des Hauptsystems aus den in 2. angegebenen äußeren Ursachen. Sie werden abgekürzt nach (300) berechnet. Hierzu dienen die Tabellen 12 bis 16. Unter Umständen können die Formänderungen $\delta_{k\otimes}$ auch unmittelbar aus den Tabellen 17 bis 19 entnommen werden. In besonderen Fällen ist die numerische Integration nach Simpson oder die Berechnung mit Stufen konstanter elastischer Wirkung nach (183) notwendig. Die Beträge aus Temperaturänderung werden für jedes Element des Stabzugs konstant angenommen (173), die Verschiebungen δ_{k_s} aus der Stützenbewegung nach (174) berechnet. Die Biegelinien $\delta_{m,k}$ ($k = 1 \dots n$) des Laststabzugs des Hauptsystems zur Bildung der Einflußlinien lassen sich für die Belastungszustände $-X_k = 1$ nach Abschn. 20 und 21, in einfachen Fällen nach den Tabellen 12 bis 16 aufzeichnen.

7. Die überzähligen Stütz- und Schnittkräfte. Die überzähligen Größen X_k werden bei einzelnen Belastungsfällen unmittelbar aus den Belastungsgliedern, bei zahlreichen Belastungsfällen nach (326) berechnet. Dasselbe gilt für die Ableitung der Einflußlinien aus den Biegelinien des Laststabzugs des Hauptsystems nach (328).

8. Stütz- und Schnittkräfte C, N, M, Q des Tragwerks. Die Stütz- und Schnittkräfte des Stabwerks werden aus der vorgeschriebenen Belastung und den ihr zugeordneten überzähligen Stütz- und Schnittkräften X_k mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen graphisch oder numerisch nach Abschn. 13 und 14 berechnet. Die Aufgabe ist nunmehr statisch bestimmt und die Superposition nach (288) der allgemeine Ausdruck für die Lösung. Die Schnittkräfte C_0, N_0, M_0, Q_0 und C_k, N_k, M_k, Q_k des Ansatzes sind aus dem Absatz 3. bekannt.

Die Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte werden nach derselben Rechenvorschrift durch Überlagerung der Ordinaten der Einflußlinien C_0, N_0, M_0, Q_0 des Hauptsystems mit den durch C_k, N_k, M_k, Q_k erweiterten Ordinaten der Einflußlinien X_k gefunden. Sie muß unter Umständen mit großer Stellenzahl durchgeführt werden, um Lösungsfehler aus Differenzen zu vermeiden (vgl. auch S. 168).

9. Die Nachprüfung des Ergebnisses. Die Randbedingungen der Formänderung des Stabzugs sind durch die Stützung offener Stabzüge oder durch den Zusammenhang geschlossener Stabzüge vorgeschrieben. Sie müssen für das berechnete Spannungsbild erfüllt werden. Dies wird nach S. 168 durch Nachrechnung der gegenseitigen Verschiebung geeigneter Querschnitte geprüft.

32. Zeichnerische Auflösung der Bedingungsgleichungen.

Die umfangreichen Zahlenrechnungen zur Bestimmung der Wurzeln linearer Gleichungen lassen sich zum Teil, in einzelnen Fällen auch vollständig durch graphische Methoden ersetzen. Sie sind stets nützlich, wenn die Lösung mit dem Kräftebild des Tragwerks verbunden werden kann. Dies ist bei den durchgehenden Trägern mit starren und frei oder elastisch drehbaren Stützen, bei durchgehenden Trägern mit elastisch senkbaren Stützen und bei Rahmenträgern der Fall.

Die graphische Auflösung stützt sich entweder auf die geometrischen Beziehungen der Gleichungen oder auf deren mechanische Auslegung. Die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ jeder Zeile k werden dabei als die n Komponenten einer im Ursprung angreifenden Kraft \mathfrak{P}_k angesehen, die nach n Achsen zerlegt worden ist. Sie bilden, nach dem Ansatz (319) mit den unbekanntenen Zahlen $X_1 \dots X_k \dots X_n$ multipliziert, die Komponenten $\delta_{10} \dots \delta_{k0} \dots \delta_{n0}$ der Resultierenden $\sum \mathfrak{P}_k X_k$ nach denselben n Achsen.

Die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ einer jeden Zeile k sind unveränderlich und besitzen damit die wesentliche Eigenschaft der Masse, so daß den n Gleichungen des Ansatzes auch massengeometrische Bedeutung beigelegt werden kann. Darnach werden nach P. Pasternak die Vorzahlen jeder Zeile k als die fiktiven Gewichte einer räumlichen Gruppe von n Punkten A'_k behandelt, deren Abstand von einer Grundrißebene durch die zunächst unbekanntes Strecken X_k vorgeschrieben ist. Die Gleichung k

$$\sum_{h=1}^n \delta_{kh} X_h = \delta_{k0} = T_k \sum_{h=1}^n \delta_{kh} = T_k s_k, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{s_k} \tag{431}$$

bestimmt daher den Abstand T_k des Schwerpunktes E'_k der fiktiven Gewichte δ_{kh} von der Grundrißebene. Die Koordinaten der Grundrißprojektion E_k werden nach bekannten Regeln berechnet, indem die Massen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ der Projektion A_k der Punkte beigelegt werden. Damit ist jeder Bedingungsgleichung k ein ausgezeichneter Punkt E'_k zugeordnet, dessen Lage durch die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kn}$ und die Belastungszahl δ_{k0} bekannt ist. Dieses massengeometrische Bild des Ansatzes enthält, zum Teil ergänzt durch die analytische Auflösung der Gleichungen nach C. F. Gauß, geometrische Beziehungen zwischen den Endpunkten der Ordinaten X_k , die in zwei Ebenen, in einfachen Fällen aber auch in einer Ebene verfolgt werden.

Anwendung auf dreigliedrige Elastizitätsgleichungen.

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= \delta_{10} \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= \delta_{20} \\ \dots &\dots \\ X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} &= \delta_{(k-1)0} \\ X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= \delta_{k0} \\ \dots &\dots \\ X_{n-2} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)} + X_n \delta_{(n-1)n} &= \delta_{(n-1)0} \\ X_{n-1} \delta_{nn} + X_n \delta_{nn} &= \delta_{n0} \end{aligned} \right\} \tag{432}$$

Der Gaußsche Algorithmus liefert nach (388 und 399) bei

<p>Vorwärtselimination (433)</p> $\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= \delta_{10}, \\ X_2 \delta_{22}^{(1)} + X_3 \delta_{23} &= \delta_{20}^{(1)}, \\ \dots &\dots \\ X_k \delta_{kk}^{(k-1)} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= \delta_{k0}^{(k-1)}, \\ \dots &\dots \\ X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + X_n \delta_{(n-1)n} &= \delta_{(n-1)0}^{(n-2)}, \\ X_n \delta_{nn}^{(n-1)} &= \delta_{n0}^{(n-1)}, \end{aligned}$	<p>Rückwärtselimination (434)</p> $\begin{aligned} X_1 \delta_{11}^{(n-1)} &= \delta_{10}^{(n-1)}, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}^{(n-2)} &= \delta_{20}^{(n-2)}, \\ \dots &\dots \\ X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk}^{(n-k)} &= \delta_{k0}^{(n-k)}, \\ \dots &\dots \\ X_{n-2} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)} &= \delta_{(n-1)0}^{(1)}, \\ X_{n-1} \delta_{nn} + X_n \delta_{nn} &= \delta_{n0}. \end{aligned}$
--	---

Die zeichnerische Darstellung wird hier auf eine Ebene beschränkt. Sie enthält die räumliche Punktgruppe A'_1 bis A'_n , deren Grundriß $A_1 \dots A_n$ auf einer Achse abgebildet ist (Abb. 222). Die Abstände Δ_k zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten A_{k-1}, A_k sind beliebig. Sie können gleichgroß gewählt werden oder zum Teil auch Null sein.

Die Belastungsspalte der Ansätze (433), (434) ist entweder voll oder teilweise besetzt. Die allgemeine Aufgabe kann mit dem Superpositionsgesetz stets auf die Lösung für wenige Belastungszahlen zurückgeführt werden. Der Ansatz zerfällt in diesem

Fälle in drei Abschnitte, von denen der erste und dritte homogen sind. Diese werden daher für $\delta_{n0} = 1$ (Lösung a) und für $\delta_{10} = 1$ (Lösung b) berechnet.

Lösung für den homogenen Ansatz. Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0, \Delta_{k+1} \neq 0$.

Die Lösung a bedient sich der Kennbeziehungen der Vorwärtselimination, indem das Verhältnis $-\kappa_{(k-1)k} = X_{k-1}/X_k$ zweier nach links aufeinanderfolgender Ordinaten als Verhältnis der Strecken $a_{(k-1)k}, b_{(k-1)k}$ dargestellt wird. Der Abstand $\Delta_k = A_{k-1}A_k$ wird dabei durch den Punkt $F_{(k-1)k}$ geteilt. Er fällt nach (433) in die Schwerlinie der den Endpunkten A'_{k-1}, A'_k zugeordneten Massen $\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}$ und $\delta_{(k-1)k}$.

$$\frac{X_{k-1}}{X_k} = -\kappa_{(k-1)k} = -\frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}}; \quad a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k}}{1 + \kappa_{(k-1)k}} \Delta_k, \quad b_{(k-1)k} = \frac{1}{1 + \kappa_{(k-1)k}} \Delta_k. \quad (435)$$

Dasselbe gilt für die Lösung b, bei welcher die Kennbeziehungen der Rückwärtselimination verwendet werden. Das Verhältnis $-\kappa_{k(k-1)} = X_k/X_{k-1}$ zweier nach rechts aufeinanderfolgender Ordinaten wird geometrisch durch die Strecken $a_{k(k-1)}, b_{k(k-1)}$ und den Punkt $F_{k(k-1)}$ ausgedrückt. Dieser liegt nach (434) auf der Schwer-

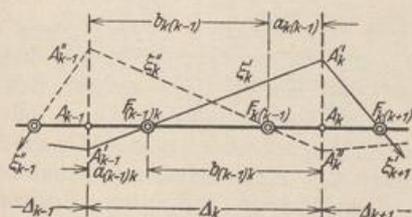


Abb. 222.

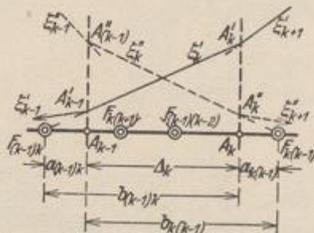


Abb. 223.

linie der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und $\delta_{k(k-1)}^{(n-k)}$, welche den Endpunkten A''_{k-1} und A''_k zugeordnet sind (Abb. 222).

$$\frac{X_k}{X_{k-1}} = -\kappa_{k(k-1)} = -\frac{a_{k(k-1)}}{b_{k(k-1)}}; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)}}{1 + \kappa_{k(k-1)}} \Delta_k, \quad b_{k(k-1)} = \frac{1}{1 + \kappa_{k(k-1)}} \Delta_k. \quad (436)$$

Die Punkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ sind unabhängig von den Belastungsgliedern und allein durch die elastische Struktur des Systems bestimmt. Sie werden daher als Festpunkte bezeichnet.

Sind die Verhältniszahlen X_{k-1}/X_k und X_k/X_{k-1} positiv, die Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}$ und $\kappa_{k(k-1)}$ also negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ außerhalb des Intervalls Δ_k (Abb. 223). Die Strecken $a_{(k-1)k}, b_{(k-1)k}$ werden daher im Sinne A_{k-1}, A_k und A_k, A_{k-1} positiv gerechnet. Negative Verhältniszahlen $X_{k-1}/X_k, X_k/X_{k-1}$, also positive Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}, \kappa_{k(k-1)}$ ergeben Festpunkte zwischen A_{k-1} und A_k (Abb. 222). Da der Nenner der Kennbeziehungen

$$\kappa_{(k-1)k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}}, \quad \kappa_{k(k-1)} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)}^{(n-k)}} \quad (437)$$

in jedem Falle positiv ist, wird die Lage der beiden Festpunkte zu den Grenzen des Intervalls durch das Vorzeichen der Nebenglieder $\delta_{(k-1)k}$ der Matrix entschieden.

Die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ der Achse werden entweder mit den Strecken $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ eingetragen oder durch geometrische Teilung der Abschnitte Δ_k im Verhältnis

$$\kappa_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)k} / \delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}, \quad \kappa_{k(k-1)} = \delta_{k(k-1)} / \delta_{k(k-1)}^{(n-k)} \quad (438)$$

erhalten, wenn die Kennbeziehungen mit den Kettenbrüchen (394) und (404) bestimmt worden sind.

Der Festpunkt $F_{k(k-1)}$ kann jedoch auch mit Hilfe des Festpunktes $F_{(k-1)k}$ und der Gleichung k des Ansatzes geometrisch gefunden werden, wenn die bei jeder zeichnerischen Lösung unvermeidliche Fehlerfortpflanzung in Kauf genommen wird.

Nach Abb. 224a ist die Gerade ξ'_k im homogenen Bereich a durch den Festpunkt $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Sie schneidet sich mit ξ'_{k+1} im Punkte A'_k der Geraden k . Nach der Gleichung k

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = 0 \quad (439)$$

ist der Schwerpunkt E_k der fiktiven Massen $\delta_{k(k-1)}$, δ_{kk} , $\delta_{k(k+1)}$ ein Punkt der Achse ($T_k = 0$). Er liegt auf der Geraden w_k im Abstand e_k vom Punkte A_k .

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} \Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}. \quad (440)$$

Die Gleichung k kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = 0. \quad (441)$$

Hierbei ist $Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) = X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk}$ und daher $Y_{(k-1)k} = \frac{D_k D'_k}{D'_k}$ diejenige Ordinate der Geraden ξ'_k , welche den Abschnitt Δ_k im Verhältnis $\delta_{kk} : \delta_{k(k-1)}$ teilt. Die Gerade $D'_k A'_{k+1}$ schneidet nach (441) die Achse im Punkte E_k . Eine beliebige Annahme $\xi_{k,1}$ liefert das Dreieit mit den Eckpunkten $D'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $A'_{(k+1),1}$ auf drei zueinander parallelen Geraden k , $(k+1)$, w'_k . Da zwei Seiten durch die festen Punkte $F_{(k-1)k}$ und E_k bestimmt sind, ist auch $F_{k(k+1)}$ ein Festpunkt.

Die geometrische Auslegung der Gleichung k wird durch deren Umformung nach

$$Z_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) + Z_{k(k+1)} (\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}) = 0 \quad (442)$$

wesentlich günstiger. Dabei ist die Aufteilung der Vorzahl $\delta_{kk} = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}$ beliebig und richtet sich nach den besonderen Eigenschaften des Ansatzes. Die Ordinate $Z_{(k-1)k} = \overline{B_k B'_k}$ liegt auf der Schwerlinie $w'_{k,1}$ der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{kk,1}$, die Ordinate $Z_{k(k+1)} = \overline{C_k C'_k}$ auf der Schwerlinie $w'_{k,2}$ von $\delta_{kk,2}$ und $\delta_{k(k+1)}$. Die Punkte $B'_{k,1}$, E_k , $C'_{k,1}$ bilden nach (442) wieder eine gerade Linie, so daß ein Dreieit $B'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $C'_{k,1}$ mit den vorgeschriebenen Festpunkten $F_{(k-1)k}$ und E_k entsteht. In derselben Weise kann auch die geometrische Konstruktion des Festpunktes $F_{k(k-1)}$ aus $F_{(k+1)k}$ nach Abb. 224b begründet werden. Die Schwerlinien $w'_{k,1}$, $w'_{k,2}$ sind durch die Strecken c_{kk} , $c_{(k+1)k}$ bestimmt (Abb. 224).

$$c_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k, \quad c_{(k+1)k} = \frac{\delta_{k(k+1)}}{\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}} \Delta_{k+1}. \quad (443)$$

Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0, \Delta_{k+1} = 0$.

In einzelnen Fällen werden die Punkte A_k, A_{k+1} zusammgelegt ($\Delta_{k+1} = 0$), um das Bild der geometrischen Lösung in einfacher Weise mit dem Kräftebild des Tragwerks zu verbinden. Die Kennbeziehungen $\varkappa_{k(k+1)}$, $\varkappa_{(k+1)k}$ sind in diesem Falle stets negativ. Dem Punkte (A_k, A_{k+1}) der Achse sind daher zwei Punkte A'_k, A'_{k+1} des Linienzuges ξ'_k, ξ'_{k+2} zugeordnet.

Die beiden Geraden ξ'_k, ξ'_{k+2} schneiden sich im Abstand $u_{k(k+1)}$ von der Ordinate k . Dieser ist im homogenen Bereich der Lösung a durch die Kennbeziehung

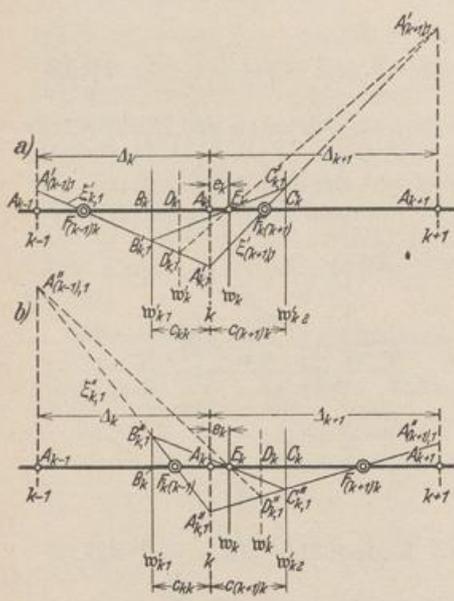


Abb. 224.

$X_k/X_{k+1} = -\kappa_{k(k+1)}$ vorgeschrieben und geometrisch durch $X_{k+1} = 1$, $X_k = -\kappa_{k(k+1)}$ und die als bekannt anzusehenden Festpunkte $F_{(k+1)(k+2)}$, $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Der Abstand $u_{k(k+1)}$ ist im homogenen Bereich a für alle X_{k+1} konstant, der geometrische Ort der Punkte $U_{k(k+1)}$ daher eine zu k parallele Gerade, die Übergangslinie $u_{k(k+1)}$. Ähnliche geometrische Beziehungen gelten für die Lösung b mit $X_{k+1} = -\kappa_{(k+1)k} X_k$. Der Linienzug ξ''_{k-1} , ξ''_{k+1} schneidet sich jetzt auf der Übergangslinie $u_{(k+1)k}$ im Abstand $u_{(k+1)k}$ von k (Abb. 225).

Die Übergangslinien $u_{k(k+1)}$ und die Festpunkte $F_{(k+1)(k+2)}$ lassen sich aus dem Festpunkt $F_{(k-1)k}$ auch geometrisch ableiten, ohne die Kennbeziehungen $\kappa_{k(k+1)}$ usw. zu verwenden. Um dies einzusehen, werden die beiden Gleichungen k und $(k+1)$ umgeformt und addiert.

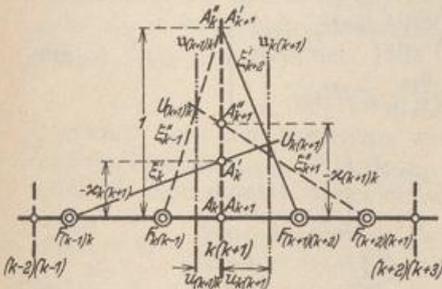


Abb. 225.

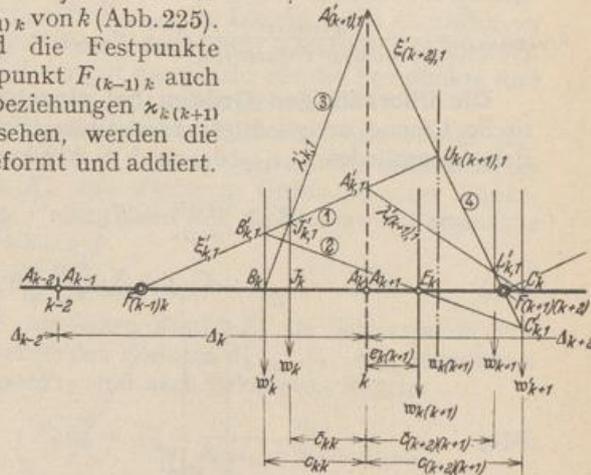


Abb. 226.

$$\begin{aligned}
 X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= 0, \\
 -X_k \delta_{(k+1)k} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} &= 0, \\
 \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)} = \delta_{kk,1}, \quad \delta_{(k+1)(k+1)} - \delta_{k(k+1)} &= \delta_{(k+1)(k+1),1}, \\
 Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} &= 0, \\
 (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) &= 0, \\
 Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{444}$$

Hiernach sind $Y_{k(k-1)} = \overline{B_k B'_k}$ und $Y_{(k+1)(k+2)} = \overline{C_k C'_k}$ Ordinaten der Geraden ξ'_k und ξ'_{k+2} der homogenen Lösung (a), die mit den Schwerlinien w'_k, w'_{k+1} der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k-1)}, \delta_{kk,1}$ und $\delta_{(k+1)(k+2)}, \delta_{(k+1)(k+1),1}$ zusammenfallen. Nach (444) schneiden sich die beiden Geraden ξ'_k, λ'_k der Abb. 226 auf der Schwerlinie w_k der fiktiven Gewichte $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1})$ und $\delta_{k(k+1)}$. Der Punkt E_k ist nach (439) mit $T_k = 0$ ein Punkt der Achse und der Schwerlinie $w_{k(k+1)}$ der fiktiven Gewichte $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1})$ und $(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)})$. Mit einer Annahme $\xi'_{k,1}$ werden die geometrisch voneinander abhängigen Punkte $B'_{k,1}, J'_{k,1}, A'_{k,1}, A'_{(k+1),1}, C'_{k,1}, U_{k(k+1),1}$ gefunden. Sie bestimmen ein Viereck, dessen Ecken auf vier vorgeschriebenen Geraden w'_k, w_k, k, w'_{k+1} liegen, von dem außerdem drei Seiten durch je einen Festpunkt $F_{(k-1)k}, B_k, E_k$ gehen. Daher ist auch $F_{(k+1)(k+2)}$ ein Festpunkt und der geometrische Ort des Schnittpunktes $U_{k(k+1)}$ eine zu k parallele Gerade, die Übergangslinie $u_{k(k+1)}$.

Der Ansatz (444) enthält außerdem die Beziehung

$$(X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+2),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = 0, \tag{445}$$

nach der sich die Geraden ξ'_{k+2} und λ'_{k+1} auf der Schwerlinie w_{k+1} der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k+1)}$ und $(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)})$ schneiden. Dies dient zur Nachprüfung der geometrischen Konstruktion. Die Festpunkte $F_{k(k-1)}$ und die Übergangs-

linien $u_{(k+1)k}$ werden aus den Festpunkten $F_{(k+2)(k+1)}$ ebenso bestimmt. Die Schwerlinien $w'_k, w_k, w'_{k+1}, w_{k+1}$ und $w_{k(k+1)}$ werden mit den Strecken $c_{kk}, \bar{c}_{kk}, c_{(k+2)(k+1)}, \bar{c}_{(k+2)(k+1)}$ und $e_{k(k+1)}$ eingerechnet (Abb. 226).

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k, \bar{c}_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}} \Delta_k, c_{(k+2)(k+1)} = \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k-1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \Delta_{k+2}, \\ \bar{c}_{(k+2)(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \Delta_{k+2}, e_{k(k+1)} = \frac{\delta_{(k+1)(k+2)} \Delta_{k+2} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \end{aligned} \right\} (446)$$

Die überzähligen Größen bei einzelnen Belastungsgliedern. Die analytische Lösung dreigliedriger Elastizitätsgleichungen für zwei aufeinanderfolgende Belastungsglieder $\delta_{(k-1)0}, \delta_{k0}$ nach S. 239 kann durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} X_{k-1} \frac{b_{(k-1)k}}{a_{(k-1)k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = R_{(k-1)k}, \\ X_{k-1} + X_k \frac{b_{k(k-1)}}{a_{k(k-1)}} &= \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = R_{kk} \end{aligned} \right\} (447)$$

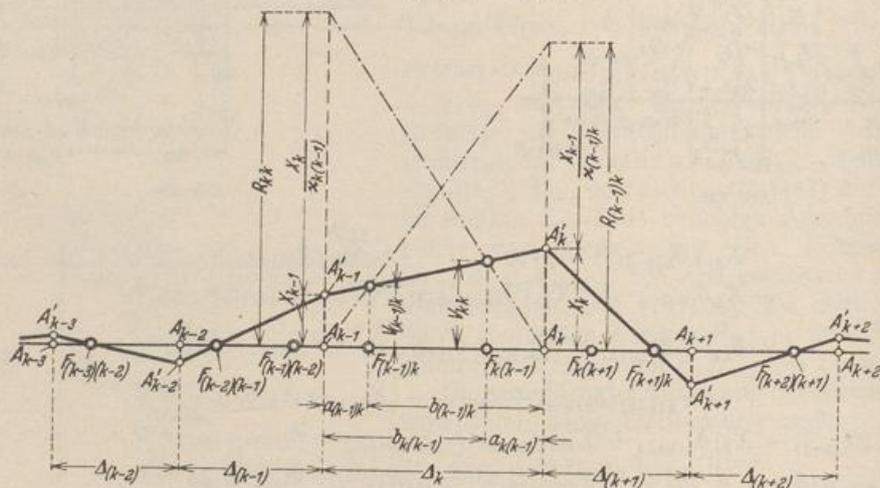


Abb. 227.

ersetzt werden. Er gilt allgemein für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und beweist die geometrische Lösung nach Abb. 227. Die Belastungsglieder erhalten die Dimension der überzähligen Größen X_{k-1}, X_k und sind von diesen unabhängig. Sie

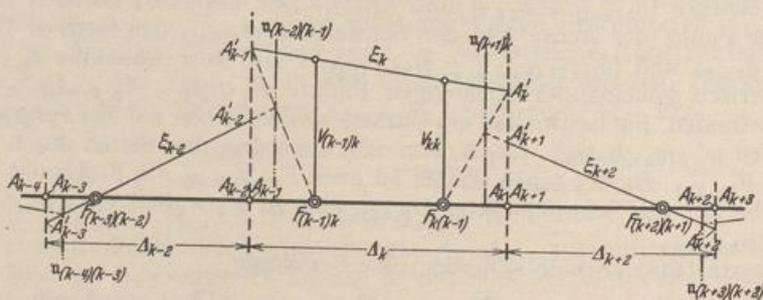


Abb. 228.

werden nach der Art ihrer geometrischen Verwendung als Kreuzlinienabschnitte bezeichnet, jedoch hierfür besser durch die Ordinaten $V_{(k-1)k}, V_{kk}$ in den Festpunkten ersetzt.

$$\left. \begin{aligned} V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{\Delta_k} R_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1 + \varkappa_{(k-1)k}} \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k} + \delta_{(k-1)k}^{(k-1)}} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{s_{(k-1)}^{(k-1)}}, \\ V_{kk} &= \frac{a_{kk}}{\Delta_k} R_{kk} = \frac{\varkappa_{kk}}{1 + \varkappa_{kk}} \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk}} = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk} + \delta_{kk}^{(k)}} = \frac{\delta_{k0}}{s_k^{(k)}}. \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

Die überzähligen Größen $X_1 \dots X_{k-2}$ sind bei gleichen Vorzeichen der Nebenglieder einer Gleichung durch die Festpunkte $F_{(h-1)h}$ der Lösung a, die überzähligen Größen $X_{k+1} \dots X_h$ durch die Festpunkte $F_{r(r-1)}$ der Lösung b bestimmt (Abb. 227). Bei ungleichen Vorzeichen der Nebenglieder gilt das gleiche für die Festpunkte und Übergangslinien $F_{(h-1)h}, u_{(h-1)h}$ und $F_{r(r-1)}, u_{r(r-1)}$ (Abb. 228).

Allgemeiner Belastungsfall. Die geometrischen Hilfsmittel des letzten Abschnitts lassen sich auch bei der zeichnerischen Lösung des vollständigen Ansatzes verwenden. Die überzähligen Größen X_k sind wiederum Ordinaten einer Punktreihe A_k in beliebigen Abständen Δ_k . Jedem Intervall Δ_k sind zwei Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k+1)}$ zugeordnet. Jede Gleichung k

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0} \quad (449)$$

bestimmt nach der Auslegung auf S. 256 einen Punkt E'_k als Schwerpunkt von fiktiven Massen $\delta_{k(k-1)}, \delta_{kk}, \delta_{k(k+1)}$, welche den Punkten A'_{k-1}, A'_k, A'_{k+1} zugeordnet sind. Die Koordinaten dieses Schwerpunkts sind nach bekannten Regeln

$$\overline{A_k E'_k} = e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} \Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}, \quad \overline{E'_k E'_k} = T_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}. \quad (450)$$

Ebenso darf in (449)

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} = Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) \quad (451)$$

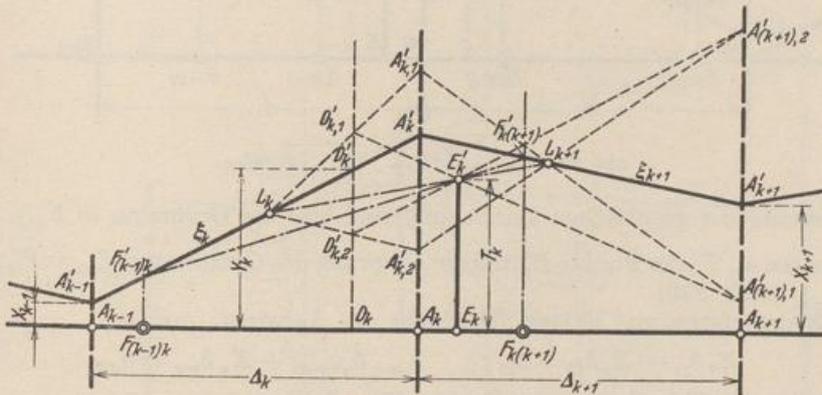


Abb. 229. Zur Ableitung für positive $\varkappa_{k(k+1)}$.

gesetzt und $Y_{k(k-1)}$ als Ordinate des Schwerpunkts der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und δ_{kk} in A'_{k-1}, A'_k angesehen werden. Sie unterteilt den Abschnitt Δ_k in D_k nach dem Verhältnis $\delta_{k(k-1)} : \delta_{kk}$. Aus (449) wird dann

$$Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0} = T_k (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}). \quad (452)$$

Demnach ist T_k auch Ordinate des Schwerpunkts der fiktiven Massen $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk})$ und $\delta_{k(k+1)}$, so daß die Punkte D'_k, E'_k und A'_{k+1} eine gerade Linie bilden (Abb. 229).

Auf diese Weise entsteht das Dreieit A'_{k-1}, D'_k, A'_{k+1} , dessen Eckpunkte auf einer Schar paralleler Geraden liegen. Ihre Ordinaten sind unbekannt. Allen möglichen Dreiseiten ist jedoch der Punkt E'_k der Seite $D'_k A'_{k+1}$ gemeinsam. Ist außerdem noch ein Punkt L_k der Seite $\xi_k \equiv A'_{k-1} A'_k$ gegeben, so besitzen auch die Seiten $A'_k A'_{k+1}$ dieser Dreiseite einen gemeinsamen Punkt L_{k+1} , da die Punktreihe D'_k

Algorithmus von der reduzierten Gleichung $(k-1)^{(k-2)}$ abgezogen wird, um die reduzierte Gleichung $(k)^{(k-1)}$ zu erhalten, kann der ihr zugeordnete Punkt $F'_{k(k+1)}$ als Schwerpunkt der Massen $(\delta_{(k-1)k}^{(k-2)} + \delta_{(k-1)k})$ in $F'_{(k-1)k}$ und δ_{k0} in E'_k angesehen werden. Die drei Punkte liegen daher, wie bereits geometrisch bewiesen, auf einer Geraden.

Um diese geometrischen Beziehungen bei der Lösung einer Aufgabe zu verwenden, werden n Punkte $A_1 \dots A_n$ auf einer Achse in beliebigen, also auch gleichgroßen Abständen $\Delta_2 \dots \Delta_n$ aufgetragen. Dabei ist die Struktur des Hauptsystems maßgebend. Die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ werden mit Hilfe der Vorzahlen der Bedingungsgleichungen nach S. 256 geometrisch bestimmt oder nach (435), (436) mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$ eingerechnet. Dasselbe geschieht mit den Koordinaten e_k, T_k der Punkte E'_k , so daß sich die Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit die Geraden ξ_k eintragen lassen. Sie schneiden sich in den Punkten A'_k der Ordinaten A_k . Damit ist die Richtigkeit der Lösung nachgeprüft. $A_k A'_k = X_k$.

Die Kennbeziehungen eines Ansatzes nach (387) mit negativen Nebengliedern, also mit Gleichungen von der Form

$$-X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}$$

sind negativ. Dasselbe gilt nach S. 255 auch für die Abszissen $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ der Festpunkte. Diese liegen daher außerhalb des Abschnitts Δ_k . Die Koordinaten von E'_k sind:

$$\overline{A_k E_k} = e_k = -\frac{\delta_{k(k+1)} \Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{-\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}}, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{-\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}}. \quad (454)$$

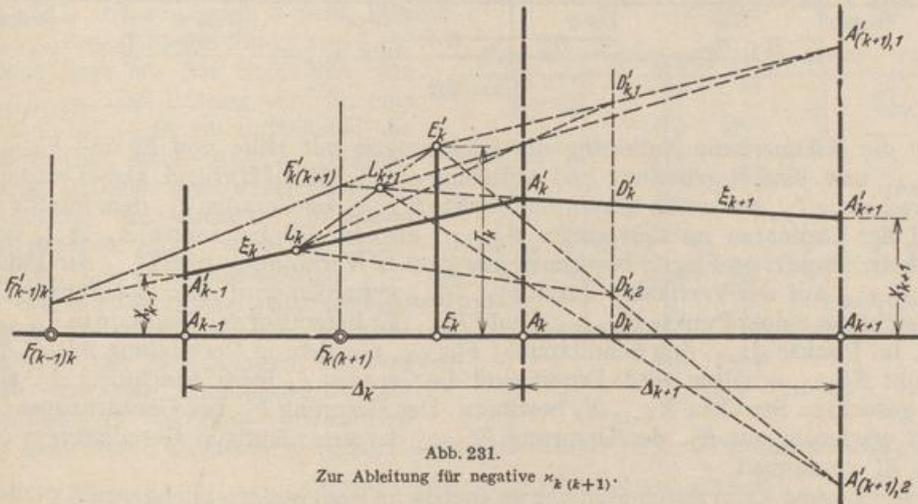


Abb. 231.
Zur Ableitung für negative $\varkappa_{k(k+1)}$.

Die geometrischen Beziehungen bleiben unverändert. Dasselbe gilt daher auch von der zeichnerischen Lösung (Abb. 231).

Wechseln die Vorzeichen der Nebenglieder des dreigliedrigen Ansatzes, ist also z. B. in der Gleichung k die Vorzahl $\delta_{k(k-1)}$ positiv und daher $a_{(k-1)k}$ positiv, die Vorzahl $\delta_{k(k+1)}$ negativ und daher $a_{k(k+1)}$ negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ zum Bereich Δ_k zwischen den Intervallgrenzen A_{k-1}, A_k , dagegen die Festpunkte $F_{k(k+1)}, F_{(k+1)k}$ zum Bereich Δ_{k+1} außerhalb. Werden dessen Intervallgrenzen mit $\Delta_{k+1} = 0$ in einem Punkte zusammengefaßt, so ist auch $a_{k(k+1)} = a_{(k+1)k} = 0$, d. h. die dem Bereich Δ_{k+1} zugeordneten Festpunkte $F_{k(k+1)}, F_{(k+1)k}$ fallen ebenfalls nach A_k, A_{k+1} .

Den Endpunkten A_{k-1}, A_k des Abschnittes Δ_k sind die Gleichungen $(k-1), k$ zugeordnet, die Gleichung $(k-1)$

$$-X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0}$$

geometrisch beschrieben durch den Punkt E'_{k-1} (Abb. 232) mit den Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} c_{k-1} &= \frac{\delta_{(k-1)k} \Delta_k}{-\delta_{(k-1)(k-2)} + \delta_{(k-1)(k-1)} + \delta_{(k-1)k}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1),1} + \delta_{(k-1)k}} \Delta_k = c_{k(k-1)}, \\ \overline{E_{k-1} E'_{k-1}} &= T_{k-1} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)(k-1),1} + \delta_{(k-1)k}}; \end{aligned} \right\} \quad (455)$$

die Gleichung k

$$X_{(k-1)} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}$$

geometrisch beschrieben durch den Punkt E'_k mit den Koordinaten

$$c_k = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k = c_{kk}, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}}. \quad (456)$$

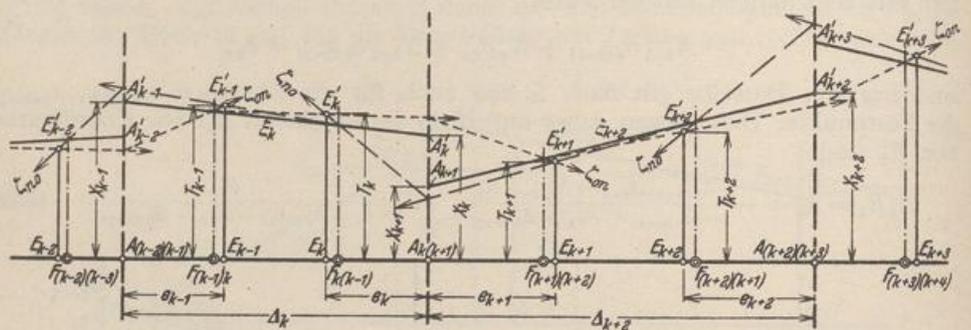


Abb. 232.

Für die zeichnerische Auflösung der Gleichungen mit Hilfe von E'_k und $F'_{k(k+1)}$, $F'_{k(k+1)}$ usw. sind Begründung und Ableitung auf S. 260 maßgebend. Dabei wird der Geradenzug ζ_{0n} aus einem bekannten Punkte $F'_{(k-1)k}$ der Geraden ξ_k , dem Punkte E'_k und der Ordinaten im Festpunkte $F_{k(k+1)}$, also im Doppelpunkte A_k, A_{k+1} entwickelt. Damit ist $F'_{k(k+1)}$ bestimmt, aus dem in Verbindung mit E'_{k+1} der Punkt $F'_{(k+1)(k+2)}$ auf der Vertikalen durch $F_{(k+1)(k+2)}$ gefunden wird. Der Geradenzug ξ_{n0} entsteht aus einem Punkte $F'_{(k+2)(k+1)}$ und E'_{k+1} . Er liefert auf der Ordinate in $F_{(k+1)k}$, d. i. im Punkte A_{k+1} , den Schnittpunkt $F'_{(k+1)k}$, aus dem in Verbindung mit E'_k der Punkt $F'_{k(k-1)}$ erhalten wird. Damit sind die Geraden ξ_k jedes Abschnittes Δ_k , also die gesuchten Strecken X_{k-1}, X_k bestimmt. Der Ursprung F'_{12} des Geradenzuges ζ_{0n} fällt wiederum mit E'_1 , der Ursprung $F'_{n(n+1)}$ des gegenläufigen Geradenzuges ζ_{n0} mit E'_n zusammen.

Die Lösung kann durch ähnliche geometrische Beziehungen nachgeprüft werden. Durch Addition der Gleichungen k und $(k+1)$ entsteht nach (444)

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk,1} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1),1} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} = \delta_{k0} + \delta_{(k+1)0} \quad (457)$$

und damit eine geometrische Beziehung zwischen vier fiktiven Massen in $A'_{k-1} \dots A'_{k+1}$, oder deren Zusammenfassung in zwei Punkten B'_k, C'_k mit den Ordinaten $Y_{(k-1)k}$, $Y_{(k+1)(k+2)}$ mit dem Schwerpunkt $E'_{k(k+1)}$ (Abb. 233).

$$\left. \begin{aligned} \overline{A'_k B'_k} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k = c_{kk}, \\ \overline{A'_{k+1} C'_k} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \Delta_{k+2} = c_{(k+2)(k+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_{k(k+1)} E_{k(k+1)}} = e_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)} \Delta_{k+2} - \delta_{(k-1)k} \Delta_{k-1}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \\ T_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{k0} + \delta_{(k+1)0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Die Punkte $B'_k, E'_{k(k+1)}, C'_k$ liegen daher auf einer Geraden, für die E'_k Festpunkt ist. In ähnlicher Weise werden die Gleichungen k und $(k+1)$ geometrisch ausgelegt.

$$\begin{aligned} X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk,1} - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} \\ = Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}, \\ (X_{k+1} - X_k) \delta_{(k+1)k} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1,1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} \\ = (X_{k+1} - X_k) \delta_{(k+1)k} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = \delta_{(k+1)0}, \end{aligned}$$

d. h. die Geraden $B'_k A'_k$ und $B_k A'_{k+1}$ schneiden auf der Schwerlinie w_k eine Strecke von der vorgeschriebenen Länge

$$\frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} - \delta_{k(k+1)}} = S_k \quad (460)$$

ab. Ähnliches gilt für die zweite Gleichung.

Wird daher eine Gerade g_1 mit dem vorgegebenen Punkt $F'_{(k-1)k}$ angenommen, so ist g_2 mit B'_k und $E'_{k(k+1)}$, also auch C'_k bestimmt. Dasselbe gilt für die Gerade g_3 mit B_k und der Strecke S_k auf w_k . Daher besitzt auch die Gerade A'_{k+1}, C'_k einen festen, dem Punkte $F'_{(k-1)k}$ zugeordneten Punkt von ξ_{k+2} .

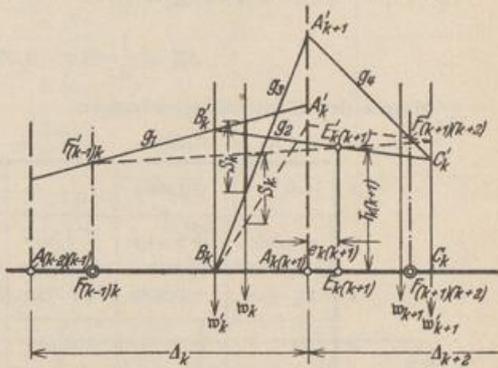


Abb. 233.

Dieser liegt auf der Ordinaten von $F_{(k+1)(k+2)}$. Die Lösung wird für eine Gerade $F'_{(k-1)k} B'_k$ am einfachsten, die gleichzeitig durch $E'_{k(k+1)}$ verläuft. Damit ist eine zweite zeichnerische Auflösung des Ansatzes mit den Festpunkten $E'_{k(k+1)}$ und den Strecken S_k, S_{k+1} gefunden worden.

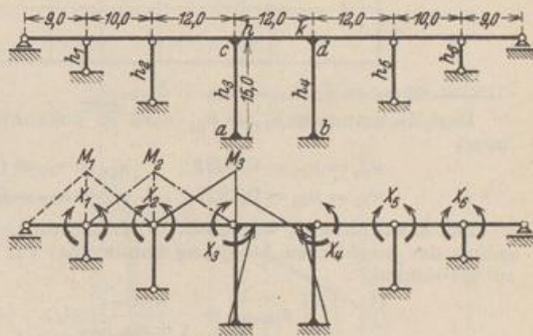


Abb. 234.

Um die Genauigkeit der zeichnerischen Lösung festzustellen, wird die Identität der Gleichungen des Ansatzes mit den Ergebnissen für die überzähligen Größen untersucht.

Sie kann durch Iteration verbessert oder auch durch die Berechnung der ΔX_k aus

$$\Delta T_k = T_k - \frac{X_{(k-1),1} \delta_{k(k-1)} + X_{k,1} \delta_{kk} + X_{(k+1),1} \delta_{k(k+1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}} \quad (461)$$

nach $X_{k,2} = X_{k,1} + \Delta X_k$ berichtigt werden.

Die Lösung wird an der Berechnung eines symmetrischen Brückenträgers gezeigt (Abb. 234), dessen mittlerer Teil als steif eingespannter Rahmen ausgebildet ist. Hierzu dient ein dreifach statisch unbestimmtes Hauptsystem, an dem außer der Belastung die Stützmomente $X_1 \dots X_6$ als überzählige Größen angreifen. Die Formänderungen des statisch bestimmten Abschnitts des Hauptsystems sind bei Annahme eines für alle Stäbe gleich großen Trägheitsmomentes

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{66} &= \frac{1}{3} (9,0 + 10,0) = 6,333; & \delta_{12} = \delta_{56} &= \frac{10}{6} = 1,667; \\ \delta_{22} = \delta_{55} &= \frac{1}{3} (10,0 + 12,0) = 7,333; & \delta_{27} = \delta_{45} &= \frac{12}{6} = 2,000. \end{aligned}$$

Die Formänderungen des statisch unbestimmten Abschnitts aus $-X_3 = 1$ werden mit Hilfe der Tabellen Abschn. 61 bestimmt. Für diesen Belastungsfall ist:

$$M_{h,k} = -\frac{1}{2} \cdot 1,25 \left(\frac{1}{3,25} \pm \frac{6}{8,5} \right) = -0,192 \mp 0,442 \text{ mt};$$

$$H = -\frac{3}{2} \frac{1}{15,0} \frac{1}{3,25} = -0,0308 \text{ t} = N_3^{(9)}.$$

Biegemomente am

Riegel h_k : $M_h = -0,634 \text{ mt}$; $M_k = +0,250 \text{ mt}$.

Stütze h_3 : $M_c = +0,366 \text{ mt}$; $M_d = 0,366 - 0,0308 \cdot 15,0 = -0,096 \text{ mt}$,

Stütze h_4 : $M_d = +0,250 \text{ mt}$; $M_b = 0,250 - 0,0308 \cdot 15,0 = -0,212 \text{ mt}$.

$$\delta_{33}^{(9)} = \delta_{44}^{(9)} = \frac{1}{3} 12 + \frac{1}{3} 12 \left(0,634 - \frac{0,250}{2} \right) = 6,036;$$

$$\delta_{34}^{(9)} = \frac{1}{3} 12 \left(-0,250 + \frac{0,634}{2} \right) = 0,268.$$

Matrix der Elastizitätsgleichungen

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	s_k
1	+6,333	+1,667					8,000
2	+1,667	+7,333	+2,000				11,000
3		+2,000	+6,036	+0,268			8,304
4			+0,268	+6,036	+2,000		8,304
5				+2,000	+7,333	+1,667	11,000
6					+1,667	+6,333	8,000

Hierbei ist $s_k = \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}$.

Der Kettenbruch $\beta_{11} = \beta_{66}$ wird in bekannter Weise nach (404) und (394) gebildet und liefert

$$\kappa_{65} = \kappa_{12} = 0,2632; \quad \kappa_{54} = \kappa_{23} = 0,2901; \quad \kappa_{43} = \kappa_{34} = 0,04912;$$

$$\kappa_{32} = \kappa_{45} = 0,3321; \quad \kappa_{21} = \kappa_{56} = 0,2500; \quad \beta_{11} = \beta_{66} = 0,1690.$$

Die Abschnitte Δ_k werden in Übereinstimmung mit den Feldweiten festgesetzt, um das Ergebnis der graphischen Auflösung unmittelbar zur Bestimmung der Schnittkräfte des Stabwerks zu verwenden.

$$a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k}}{1 + \kappa_{(k-1)k}} l_k; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)}}{1 + \kappa_{k(k-1)}} l_k.$$

Riegelstab l_k	2	3	4	5	6
$a_{(k-1)k}$	2,084	2,698	0,562	2,992	2,000
$a_{k(k-1)}$	2,000	2,992	0,562	2,698	2,084

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} l_{k+1} - \delta_{k(k-1)} l_k}{s_k}.$$

Bedingung h	1	2	3	4	5	6
e_k	+2,084	+0,666	-2,503	+2,503	-0,666	-2,084

Vorgeschriebene Belastungsannahmen.

Die überzähligen Größen sollen für Eigengewicht $g = 1 \text{ t/m}$, Belastung des Feldes l_2 mit Nutzlast $p = 1 \text{ t/m}$, ferner für gleichförmige Temperaturerniedrigung des Riegels um 15° und für eine gemessene Verdrehung des linken Rahmenstützpunktes um $19'$ angegeben werden. $Ej_c = 60000 \text{ tm}^2$.

Soweit sich die Formänderungen auf den statisch bestimmten Teil des Hauptsystems beziehen, ist eine nähere Erklärung unnötig.

Die statisch unbestimmten Formänderungen $\delta_{30}^{(3)}$, $\delta_{40}^{(3)}$ werden aus

$$\delta_{k0}^{(3)} = \int M_0^{(0)} M_k^{(3)} \frac{J_e}{J} ds$$

berechnet. Die Momente $M_3^{(3)}$, $M_4^{(3)}$ sind mit Hilfe der Tabelle Abschn. 61 in Abb. 234 aufgetragen worden. Hieraus folgt die

Übersicht der $T_k = \frac{\delta_{k0}^{(3)}}{s_k}$ in mt.

k	1	2	3	4	5	6
Eigengewicht 1 t/m	+ $\frac{90,4}{8,000}$	+ $\frac{172,5}{11,000}$	+ $\frac{155,7}{8,304}$	+ 18,75	+ 15,68	+ 11,30
Nutzlast $p=1$ t/m auf l_3		+ $\frac{112,5}{11,000}$	+ $\frac{112,5}{8,304}$			
Riegel $t = -15^\circ$			+ $\frac{3,450}{8,304}$	+ 0,415		
$\Delta\varphi_3 = 19'$			- $\frac{31,6}{8,304}$	- $\frac{62,1}{8,304}$		

$$\delta_{3t}^{(3)} = EJ_c \alpha_1 t l_4 N_3^{(3)} = -60000 \cdot 0,00015 \cdot 12 \cdot (-0,0308) = +3,45,$$

$$\delta_{3t}^{(3)} = -EJ_c \Sigma C_3^{(3)} \Delta_c = -60000 \cdot 0,096 \cdot 19 \cdot 0,000291 = -31,6.$$

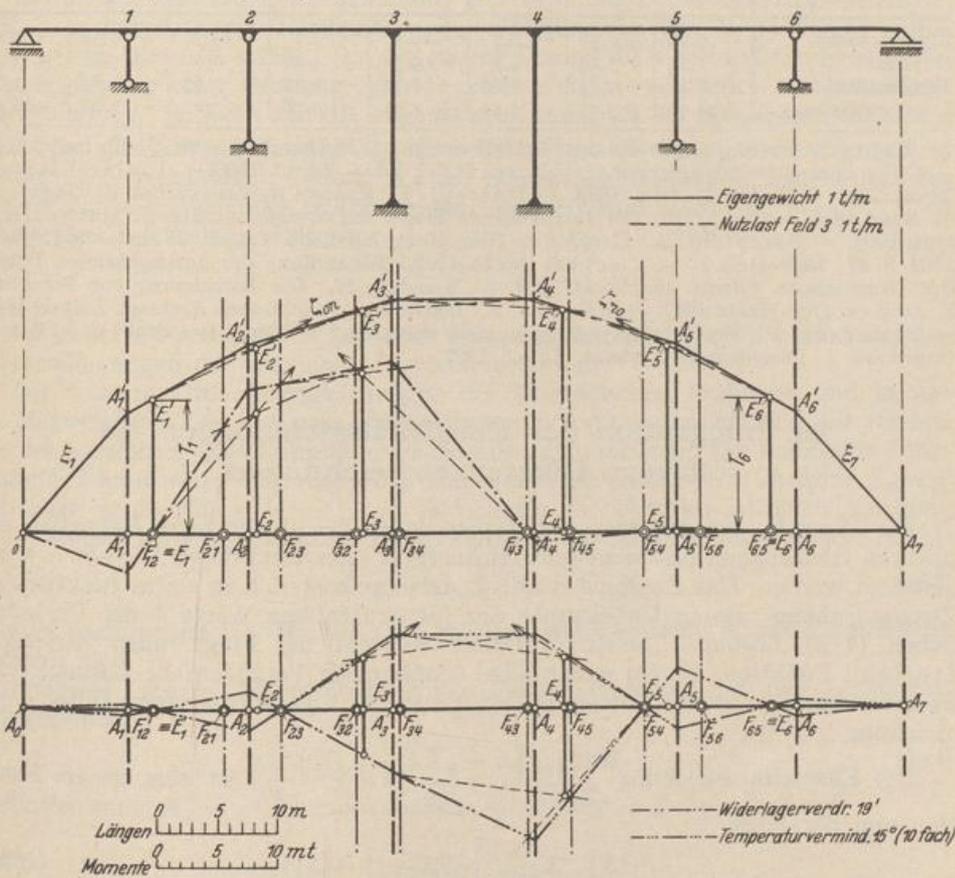


Abb. 235.

Um die Gleichungen zeichnerisch aufzulösen, werden nach S. 261 zuerst die Festpunkte $F_{12} \dots F_{56}, F_{65} \dots F_{21}$ und die Punkte $E_1 \dots E_6$ mit den Ergebnissen $a_{12} \dots a_{56}, a_{65} \dots a_{21}, e_1 \dots e_6$ der Rechnung auf der Achse $A_1 \dots A_6$ eingetragen und die Ordinaten $T_1 \dots T_6$ für jeden einzelnen Belastungsfall in $E_1 \dots E_6$ abgesteckt. Die positiven Werte erscheinen in der oberen Halbebene. Daher gilt das gleiche von den überzähligen Schnittkräften X_k . Mit den Ordinaten T_1, T_6 in den Festpunkten F_{12}, F_{65} und den Endpunkten E'_k der Strecken T_k sind die beiden Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit in jedem Abschnitt A_k zwei Punkte $F'_{(k-1)k}, F''_{(k-1)k}$ des Geradenzuges ξ_k bestimmt, welcher auf den Ordinaten A_1, A_2 usw. die gesuchten Strecken X_1, X_2 usw. abschneidet.

Die statisch unbestimmten Stützenmomente nach Abb. 235 in mt für jeden Belastungsfall:

Belastung	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Eigengewicht. . .	10,2	15,8	19,7	19,7	15,8	10,2 mt
Nutzlast.	-3,4	12,1	14,5	-0,7	0,3	0 „
Temperatur	0,05	-0,18	0,63	0,63	-0,18	0,05 „
Lagerverdrehung .	-0,50	1,50	-5,40	-11,20	3,30	-0,80 „

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Bereichs des Hauptsystems sind

$$M = M_0^{(3)} - X_3 M_3^{(3)} - X_4 M_4^{(3)}.$$

Die Momente $M_0^{(3)}$ aus den einzelnen Belastungen werden nach den Tabellen Abschn. 61 berechnet.

Biegemomente in mt.

Belastung	M_a	M_e	$M_3 = -X_3$	M_h	M_k	$M_4 = -X_4$	M_d	M_b
Eigengewicht. . .	-0,29	+0,58	-19,7	-19,1	-19,1	-19,7	+0,58	-0,29
Nutzlast.	-1,24	+5,13	-14,5	-9,38	+4,06	+0,7	+3,36	-3,01
Temperatur	-1,03	+0,85	-0,63	+0,22	+0,22	+0,63	+0,85	-1,03
Lagerverdrehung .	+32,70	-3,94	+5,40	+1,41	-5,78	+11,2	-16,98	+19,47

Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, 3. Aufl. S. 83. Berlin 1928.
 — Culmann: Anwendungen der graphischen Statik Bd. 3. Zürich 1900. — Fidler, Claxton: Trans. Inst. C. E. Bd. 74. Okt. 1883. — Massau, J.: Annales de l'association des ingénieurs de Gand 1889. — Vianello: Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Hamburg 1904. — Ostenfeld, A.: Graphische Behandlung der kont. Träger. Z. Arch.-Ing.-Wesen 1905 S. 47; 1908 Heft 1. — Vlachos: Zeichnerische Behandlung der durchgehenden Träger. Ost. Wochenschr. öffentl. Baudienst 1908. — Marcus, H.: Die Berechnung von Silozellen. Z. Arch.-u. Ing.-Wesen 1911. — Mehmke, R.: Leitfaden z. graphischen Rechnen. Leipzig 1917. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biege-fester Stab- und Flächen-tragwerke. I. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

33. Integration der Elastizitätsgleichungen als lineare Differenzgleichungen.

Die Wurzeln des Ansatzes sind bisher durch die algebraische Rekursion der linearen Gleichungen bestimmt und zeichnerisch einer Punktfolge $1 \dots k \dots n$ zugeordnet worden. Das Ergebnis erscheint dabei geometrisch in einem funktionalen Zusammenhang, dessen Unbekannte nur für ganzzahlige Werte k der Veränderlichen ($k \cdot A$) Lösungen besitzen. Damit entsteht die Frage nach derjenigen stetigen Funktion, die für ganzzahlige unabhängige Veränderliche Lösungen des linearen Ansatzes ergibt. Dieser erhält damit die Eigenschaft einer Differenzgleichung.

Die Elastizitätsgleichung $\sum_{h=k}^{k+m} \delta_{rh} X_h = \delta_{r0}$, ($k = r - \frac{m}{2}$) ist eine lineare Funktion von der Form

$$F_1(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = N_r \quad (462a)$$

mit $(m + 1)$ aufeinander folgenden abhängigen Veränderlichen X_k . Sie kann als Funktion von Differenzen $\Delta^h X_k$ ($h = 1 \dots m$) entwickelt und damit als lineare Differenzgleichung

$$F_2(X_k, \Delta X_k, \Delta^2 X_k, \dots, \Delta^m X_k) = N_r \tag{462b}$$

mit der ganzzahligen Veränderlichen k angeschrieben werden. Der Grenzübergang mit $(k - 1), k \equiv \Delta x \rightarrow dx \approx 0$ würde eine Differentialgleichung ergeben, so daß die Verwandtschaft der allgemeinen mathematischen Beziehungen und Lösungsmethoden von Differenzen- und Differentialgleichungen verständlich ist.

Die Gleichung (462a) mit X_k und den folgenden Unbekannten bis X_{k+m} heißt nach der Umformung in (462b) Differenzgleichung m ter Ordnung, so daß die dreigliedrigen, fünfgliedrigen und siebengliedrigen Ansätze als Differenzgleichungen zweiter, vierter und sechster Ordnung behandelt werden können. Sie heißen homogen, wenn die Belastungszahlen Null sind. Sind die Störungsglieder N_r vorhanden, so spricht man wie in der Infinitesimalrechnung von vollständigen Gleichungen und nennt Funktionen, welche die Differenzgleichungen erfüllen, Partikularlösungen.

Die Differenzenrechnung ist ein selbständiger Teil der Mathematik, dessen Methoden in zahlreichen Sonderwerken studiert werden können. Ihre Beziehungen zur Baustatik sind von F. Bleich und E. Melan eingehend dargestellt worden. Die nachstehenden Bemerkungen sind daher nur als kurzer Hinweis zu verstehen, welcher zu einem Vergleich mit der algebraischen Auflösung einer Gruppe von linearen Gleichungen ausreicht.

Der Ansatz einer Differenzgleichung m ter Ordnung mit n linearen Gleichungen $1, 2 \dots n$ und $(n + m)$ Unbekannten X_k wird für beliebige Werte der m ersten oder letzten Wurzeln erfüllt. Die allgemeine Lösung X_k^* einer vollständigen Differenzgleichung m ter Ordnung enthält daher stets m willkürlich wählbare konstante Größen. Sie kann aus der allgemeinen Lösung X_k der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung \bar{X}_k der vollständigen Gleichung zusammengesetzt werden. Die vollständige Lösung X_k der homogenen Gleichung besteht aus der Summe der m voneinander unabhängigen, mit den Konstanten C_v ($v = 1, \dots, m$) erweiterten partikulären Lösungen.

$$X_k^* = \bar{X}_k + X_k.$$

Die m in der Funktion X_k^* enthaltenen Integrationskonstanten C_v werden aus den Randbedingungen des statischen Problems bestimmt.

Die linearen Differenzgleichungen der baustatischen Probleme sind infolge des Maxwell'schen Gesetzes stets symmetrisch und von gerader Ordnung. Sie ergeben nur bei konstanten Koeffizienten einfache Lösungsfunktionen. Die homogene Differenzgleichung m ter Ordnung wird dann durch ein partikuläres Integral $X_k = \varrho^k$ befriedigt, in dem die ϱ_v ($v = 1 \dots m$) als Wurzeln einer charakteristischen Gleichung m ten Grades berechnet werden. Damit entsteht die folgende allgemeine Lösung:

$$X_k = C_1 \varrho_1^k + C_2 \varrho_2^k + \dots + C_m \varrho_m^k. \tag{463}$$

Dies ist nach einiger Umformung auch möglich, wenn einzelne Wurzeln gleich oder komplex sind.

Beispiel: Lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung mit den konstanten Koeffizienten a, b, c :

$$a X_{k-1} + b X_k + c X_{k+1} = 0. \tag{464}$$

Lösungsansatz: $X_k = \varrho^k$, charakteristische Gleichung: $a + b\varrho + c\varrho^2 = 0$

$$\varrho_{1,2} = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

allgemeine Lösung:

$$X_k = C_1 \varrho_1^k + C_2 \varrho_2^k.$$

Ist die Gleichung das Ergebnis einer baustatischen Untersuchung, so ist $a = c$, daher

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = 1; \quad \varrho_1 = \varrho; \quad \varrho_2 = \frac{1}{\varrho}; \quad X_k = C_1 \varrho^k + C_2 \varrho^{-k}.$$

Die Gleichung (464) läßt sich für $a = c$ auch folgendermaßen anschreiben:

$$X_{k-1} + 2\beta X_k + X_{k+1} = 0.$$

Lösungsansatz $e^{\alpha k}$, charakteristische Gleichung: $\mathfrak{C}0\} \alpha + \beta = 0$ mit den Wurzeln $\alpha_1 = m, \alpha_2 = -m$ und der Lösung

$$X_k = A_1 e^{mk} + A_2 e^{-mk} = C_1 \mathfrak{C}0\} m k + C_2 \mathfrak{C}in m k.$$

Sie läßt sich auch leicht für die homogenen und symmetrischen Differenzgleichungen vierter und höherer Ordnung entwickeln, wenn die Koeffizienten konstant sind.

Das partikuläre Integral der vollständigen Differenzgleichung kann stets nach den allgemeinen Methoden von Lagrange und Cauchy angegeben werden. Diese sind in der Literatur über Differenzenrechnung zu finden. In der Regel sind jedoch die Störungsglieder der baustatischen Ansätze einfache algebraische Funktionen der Veränderlichen, für die das partikuläre Integral als ganze rationale Funktion mit unbestimmten Beiwerten angeschrieben werden kann. Diese werden dann derart bestimmt, daß der Ansatz erfüllt ist.

Ansatz. $a X_{k-1} + b X_k + c X_{k+1} = N = \text{const}: \quad \bar{X}_k = \zeta N,$
 $\zeta(a + b + c)N = N; \quad \bar{X}_k = \frac{N}{a + b + c}.$

Ansatz. $a X_{k-1} + b X_k + c X_{k+1} = N + r k: \quad \bar{X}_k = \alpha + \beta k.$
 $a(\alpha + \beta(k-1)) + b(\alpha + \beta k) + c(\alpha + \beta(k+1)) = N + r k,$
 $\alpha(a + b + c) - \beta(a - c) + \beta(a + b + c)k = N + r k,$
 $\beta = \frac{r}{a + b + c}; \quad \alpha = \frac{N(a + b + c) + r(a - c)}{(a + b + c)^2},$
 $X_k^* = \frac{N(a + b + c) + r(a - c)}{(a + b + c)^2} + \frac{r}{a + b + c} k + C_1 \varrho_1^k + C_2 \varrho_2^k.$

Jedem stetigen Bereiche einer Differenzgleichung zweiter Ordnung ist eine Lösung mit zwei Integrationskonstanten zugeordnet. Diese werden aus den vorgeschriebenen Randbedingungen und aus der Stetigkeit der Lösung an den Grenzen benachbarter Abschnitte bestimmt. Sie ändern sich mit jedem Belastungsfall.

Bei der Berechnung der Vorzahlen β_{hk} sind die Belastungsglieder außer $N_k = 1$ Null. Der Ansatz ist daher in k unstetig und zerfällt in zwei homogene Teile. I: (0 bis $k-1$), II: ($k+1$ bis n). Die vier Integrationskonstanten werden aus den vorgeschriebenen Randwerten X_0, X_n und aus der Stetigkeit der Lösung in (k) berechnet. Diese verlangt, daß $\beta_{kk,I} = \beta_{kk,II}$ und daß Gleichung (k) mit $N_k = 1$ erfüllt ist.

Die Lösung wird für $n = \infty$ kürzer. Ist diese Annahme unzulässig, so kann diejenige Belastung \mathfrak{P}^* des unendlich ausgedehnten Bereichs durch Spiegelung der vorgeschriebenen Belastung \mathfrak{P}_n des endlichen Bereichs entwickelt werden, welche dieselbe Formänderung des Stabwerks liefert. Der Ansatz wird dann für den unendlich ausgedehnten Bereich ($n = \infty$) mit \mathfrak{P}^* berechnet. Die Lösung kann aber auch für $n = \infty$ mit \mathfrak{P}_n angegeben und dann durch eine homogene Lösung ergänzt werden, welche die vorgeschriebenen Randbedingungen des kurzen Bereichs herstellt (vgl. Abschn. 22).

Berechnung der Stützenmomente des durchgehenden Trägers mit freibeweglichen, starren Stützen $0 \dots k \dots n$; $l' = \text{const} = l$, $X_0 = 0$, $X_n = 0$.

Ansatz nach (293) $X_{k-1} + 4X_k + X_{k+1} = \frac{6}{l} \delta_{k0}$ (Abb. 236).

a) Gleichmäßige Belastung aller Felder: $\frac{6}{l} \delta_{k0} = N = \text{const.}$

Lösung:

$$X_k = \frac{N}{6} + C_1 e^k + C_2 e^{-k};$$

$$\varrho = -2 + \sqrt{3} = -0,2679.$$

Integrationskonstanten C_1, C_2 aus $X_0 = 0$; $X_n = 0$.

$$\frac{N}{6} + C_1 + C_2 = 0;$$

$$\frac{N}{6} + C_1 \varrho^n + C_2 \varrho^{-n} = 0.$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{l} \left(1 - \frac{\varrho^{n-k} + \varrho^k}{1 + \varrho^n} \right); \quad \text{bei großer Felderzahl ist } \varrho^n \approx 0.$$

Gleichförmige Belastung p (Abb. 236a):

$$\frac{\delta_{k0}}{l} = \frac{pl^2}{12} \approx X_k.$$

$$X_1 = 0,10566 pl^2; \quad X_2 = 0,07735 pl^2; \quad X_3 = 0,08494 pl^2.$$

b) Stetige hydraulische Belastung der Felder l_1 bis l_n . $p_0 = 0$; $p_n = p$ (Abb. 236b).

$$p_k = p \frac{k}{n} = \frac{2P}{n^2 l} k; \quad N_k = \frac{6}{l} \delta_{k0} = \frac{Pl}{n^2} k.$$

$$X_k = \frac{Pl}{6n^2} k + C_1 e^k + C_2 e^{-k}; \quad C_1, C_2 \text{ aus } X_0 = X_n = 0.$$

$$X_k = \frac{Pl}{6n} \left(\frac{k}{n} - \frac{\varrho^{n-k} - \varrho^{n+k}}{1 - \varrho^{2n}} \right),$$

$$n = 10: \quad X_1 = 0,001667 Pl, \quad X_5 = 0,008357 Pl, \quad X_9 = 0,019465 Pl.$$

c) Belastung eines einzelnen Feldes l_{m+1} . $h < m$, $r > m + 1$ (Abb. 236c)

$$X_{h-1} + 4X_h + X_{h+1} = 0. \quad X_{r-1} + 4X_r + X_{r+1} = 0.$$

$$X_h = C_1 e^h + C_2 e^{-h}, \quad X_r = C_3 e^r + C_4 e^{-r}.$$

$C_1 \dots C_4$ aus $X_0 = X_n = 0$ und den Gleichungen $m, (m+1)$.

$$m: X_{m-1} + 4X_m + X_{m+1} = \frac{6\delta_{m0}}{l}, \quad (m+1): X_m + 4X_{m+1} + X_{m+2} = \frac{6\delta_{(m+1)0}}{l},$$

$$C_1 = -C_2 = \frac{6\varrho}{l(\varrho^2 - 1)(\varrho^{2n} - 1)} [\delta_{m0}(\varrho^m - \varrho^{2n-m}) + \delta_{(m+1)0}(\varrho^{m+1} - \varrho^{2n-(m+1)})],$$

$$C_3 = -\frac{C_4}{\varrho^{2n}} = \frac{6\varrho}{l(\varrho^2 - 1)(\varrho^{2n} - 1)} [\delta_{m0}(\varrho^m - \varrho^{-m}) + \delta_{(m+1)0}(\varrho^{m+1} - \varrho^{-(m+1)})].$$

Spannungszustand eines Bogenträgers mit steifem Zugband. Die Längskraft X_n wird als die überzählige Schnittkraft des $(n-1)$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems Abb. 237a berechnet, dessen statisch unbestimmte Schnittkräfte $M_1 \dots M_k \dots M_{n-1}$ in Abb. 237b eingetragen sind.

$$M_k = M_{k0}^{(n-1)} - M_{kn}^{(n-1)} X_n.$$

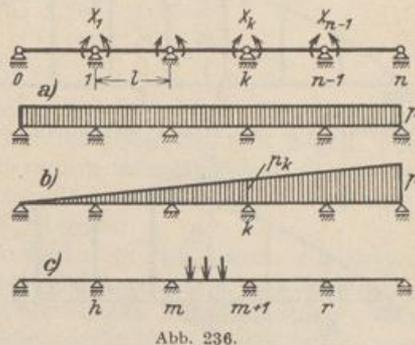
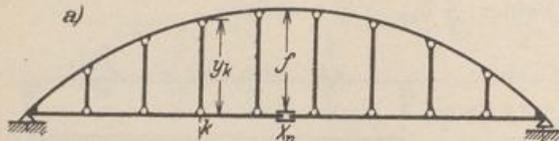


Abb. 236.

Wird die Längenänderung der Hängestangen vernachlässigt, so können die Biegemomente $M_{k0}^{(n-1)}$, $M_{kn}^{(n-1)}$ aus dreigliedrigen Bedingungsgleichungen berechnet werden (Abb. 237b).

$$M_{(k-1)}^{(n-1)} \delta_{k(k-1)} + M_k^{(n-1)} \delta_{kk} + M_{(k+1)}^{(n-1)} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}.$$



Stützweite: $l = (n-2)c$, Abszissen des Punktes k : $(k-1)c$, $(n-1-k)c$.

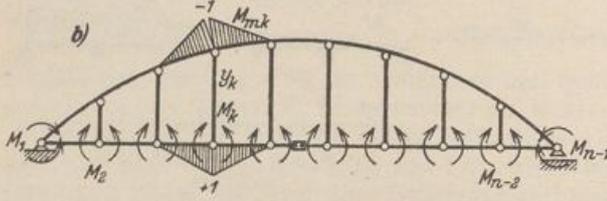


Abb. 237.

Die Vorzeichen der Gleichungen bleiben unverändert, wenn die Abstände c der Hängestangen und das Trägheitsmoment des Untergurtes konstant und die Abschnitte des Bogengurtes derart ausgebildet sind, daß $J_b: J \cos \varphi = 1$ und das Trägheitsmoment J_z des Streckträgers konstant ist ($J_b/J_z = \mu$). Die Biegemomente $M_{k0}^{(n-1)}$, $M_{kn}^{(n-1)}$ werden dann aus den folgenden Differenzgleichungen berechnet:

Beliebige Belastung der Fahrbahn, die durch Querträger an den Hängestangen auf das statisch unbestimmte Hauptsystem übertragen wird.

$$(1 + \mu) [M_{(k-1)0}^{(n-1)} + 4 M_{k0}^{(n-1)} + M_{(k+1)0}^{(n-1)}] = M_{(k-1)0,b}^{(0)} + 4 M_{k0,b}^{(0)} + M_{(k+1)0,b}^{(0)}.$$

Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems durch $-X_n = 1$

$$(1 + \mu) [M_{(k-1)n}^{(n-1)} + 4 M_{kn}^{(n-1)} + M_{(k+1)n}^{(n-1)}] = y_{k-1} + 4 y_k + y_{k+1}.$$

Die Bedingungsgleichungen sind in beiden Fällen reziproke Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten, deren homogener Ansatz durch

$$M_{k0}^{(n-1)} = C_1 \varrho^k + C_2 \varrho^{-k}$$

befriedigt wird. Hierzu treten als partikuläre Lösungen

$$\bar{M}_{k0}^{(n-1)} = \frac{1}{1 + \mu} M_{k0,b}^{(0)}; \quad \bar{M}_{kn}^{(n-1)} = \frac{1}{1 + \mu} y_k = \frac{1}{1 + \mu} 4 f \frac{(k-1)(n-1-k)}{(n-2)^2}.$$

Mit $y_1 = y_{n-1} = 0$ ist das vollständige Integral

$$M_{1n}^{(n-1)} = C_1 \varrho + C_2 \varrho^{-1}; \quad M_{2n}^{(n-1)} = \frac{1}{1 + \mu} y_2 + C_1 \varrho^2 + C_2 \varrho^{-2},$$

$$M_{(n-2)n}^{(n-1)} = \frac{1}{1 + \mu} y_{n-2} + C_1 \varrho^{(n-2)} + C_2 \varrho^{-(n-2)}; \quad M_{(n-1)n}^{(n-1)} = C_1 \varrho^{(n-1)} + C_2 \varrho^{-(n-1)}.$$

Die Randbedingungen $\delta_1^{(n-1)} = 0$, $\delta_{n-1}^{(n-1)} = 0$ ergeben damit

$$\delta_1^{(n-1)} = 0 = (1 + \mu) (2 M_{1n}^{(n-1)} + M_{2n}^{(n-1)}) - y_2; \quad C_1 \varrho_1 (2 + \varrho_1) + C_2 \varrho_1^{-1} (2 + \varrho_1^{-1}) = 0,$$

$$\delta_{n-1}^{(n-1)} = 0 = (1 + \mu) (2 M_{(n-1)n}^{(n-1)} + M_{(n-2)n}^{(n-1)}) - y_{n-2};$$

$$C_1 \varrho_1^{(n-2)} (2 \varrho_1 + 1) + C_2 \varrho_1^{-(n-2)} (2 \varrho_1^{-1} + 1) = 0; \quad C_1 = 0. \quad C_2 = 0.$$

Die Integrationskonstanten werden für die Funktion $M_{k0}^{(n-1)}$ in derselben Weise bestimmt. Sie sind ebenfalls Null, so daß folgende Biegemomente entstehen:

Streckträger: $M_{kn,z}^{(n-1)} = \frac{y_k}{1 + \mu}; \quad M_{k0,z}^{(n-1)} = \frac{M_{k0,b}^{(0)}}{1 + \mu},$

Bogen: $M_{kn,b}^{(n-1)} = y_k - \frac{y_k}{1 + \mu} = \frac{\mu}{1 + \mu} y_k; \quad M_{k0,b}^{(n-1)} = M_{k0,b}^{(0)} - \frac{M_{k0,b}^{(0)}}{1 + \mu} = \frac{\mu}{1 + \mu} M_{k0,b}^{(0)}.$

$$X_n = \frac{\delta_{m,n}^{(n-1)}}{\delta_{u,n}^{(n-1)}} = \frac{\frac{\mu}{1 + \mu} \int M_{m0,b}^{(0)} y_k dx}{\frac{\mu}{1 + \mu} \int y_k^2 dx + \left(\frac{J_b}{F_b} + \frac{J_b}{F_s} \right) l}.$$

(F_b der Querschnitt des Bogens im Scheitel, F_z der Querschnitt des Zugbandes.) Ohne Berücksichtigung der Längskräfte bei der Formänderung des Bogens ist die Längskraft X_n ebenso groß wie bei einem Zugband. Nach der im Ansatz gewählten Superposition sind die Momente im

$$\text{Bogen: } M_{k,b} = M_{k0,b}^{(n-1)} - M_{k_n}^{(n-1)} X_n = \frac{\mu}{1+\mu} (M_{k0,b}^{(0)} - X_n \gamma_k),$$

$$\text{Streckträger: } M_{k,z} = \frac{1}{1+\mu} (M_{k0,b}^{(0)} - X_n \gamma_k).$$

Das Ergebnis ist eine Bestätigung für die bekannte Aufteilung der Biegemomente des Bogenträgers im Verhältnis der Trägheitsmomente von Bogen- und Streckträger. Sie kann sich allerdings wesentlich ändern, wenn die einschränkenden Voraussetzungen für die Integration des Ansatzes nicht erfüllt sind. Er wird dann nach der allgemeinen Rechenvorschrift Abschn. 29 gelöst.

Die Integration der Elastizitätsgleichungen wird, wie dies bereits aus diesen kurzen Bemerkungen einzusehen ist, nur bei einer größeren Anzahl von Unbekannten und bei konstanten Vorzeichen des Ansatzes verwendet. Die Bedeutung dieser Lösung liegt in der Beschreibung des Kräftebildes regelmäßig ausgebildeter Tragwerke, dessen Gesetzmäßigkeiten am besten durch einen funktionalen Zusammenhang dargestellt werden können. Daher sind vor allem mehrfache Tragwerke mit Erfolg durch Differenzgleichungen untersucht worden.

Seliwanoff, D.: Lehrbuch der Differenzenrechnung. Leipzig 1904. — Wallenberg, G.: Theorie der linearen Differenzgleichungen. Leipzig u. Berlin 1911. — Funk, P.: Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin 1920. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerks. Berlin 1925. — Derselbe: Anwendung von Differenzgleichungen in der Statik hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke. Eisenbau 1918 S. 122. — Mann, L.: Statische Berechnung steifer Vierecknetze. Dissertation Berlin 1909 und Z. Bauwes. 1909. — Wanke, J.: Über die Berechnung von Bogenträgern mit einem Streckträger. Eisenbau 1921 S. 264; außerdem in der Melanestschrift. Leipzig u. Wien 1923. — Fritsche, J.: Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzgleichungen. Berlin 1923. — Melan, E.: Ein Beitrag zur Auflösung linearer Differenzgleichungen mit beliebiger Störungsfunktion. Eisenbau 1920 S. 88. — Bleich u. Melan: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik. Berlin 1927.

34. Ansätze mit unabhängigen überzähligen Größen.

Die Elastizitätsgleichungen sind durch die Ausnützung der Symmetrie des Tragwerks bei der Bildung des Hauptsystems wesentlich einfacher geworden und enthalten im Vergleich zum allgemeinen Ansatz nur einen Bruchteil der überzähligen Größen. Die algebraische Auflösung linearer Gleichungen wird jedoch ganz überflüssig, wenn alle Vorzeichen δ_{ik} ($i \neq k$) durch die Struktur des Hauptsystems oder durch Zusammenfassung der statisch unbestimmten Schnittkräfte zu ausgezeichneten Gruppen ausfallen. Die überzähligen Größen sind dann unabhängig voneinander.

$$X_k \delta_{kk} = \delta_{k\otimes}, \quad X_k = \frac{\delta_{k\otimes}}{\delta_{kk}} = \frac{\delta_{k0} + \delta_{ki} + \delta_{ks}}{\delta_{kk}}. \quad (465)$$

Ein derartiger Ansatz kann grundsätzlich bei jedem statisch unbestimmtem Tragwerk angegeben werden. Er verdient aber nur Beachtung, wenn die Fehlerfortpflanzung bei der Auswertung der $\frac{1}{2} \cdot n(n+1)$ Bedingungen $\delta_{ik} = 0$ ($i \neq k$) keine Schwierigkeiten bereitet und damit zuverlässige Ergebnisse für Zähler und Nenner erhalten werden. In allen anderen Fällen ist die Formulierung der überzähligen Größen und die Auflösung der Bedingungsgleichungen nach Abschn. 29 einfacher. Die Brauchbarkeit des Ansatzes hängt außerdem von der fehlerfreien Superposition

der überzähligen Größen X_k bei der Bildung der Schnittkräfte ab. Diese ist auch bei der Auswahl unter den verschiedenen Hauptsystemen entscheidend, welche sich für die unabhängige Berechnung der überzähligen Größen eignen. Im allgemeinen werden diejenigen Hauptsysteme bevorzugt, deren überzählige Größen klein sind.

Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922. — Grüning, M.: Theorie der Baukonstruktionen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften IV 29a. Leipzig 1907—1914.

35. Methoden bei wenigen überzähligen Größen.

Die Vorzahlen δ_{ik} bedeuten allgemein eine virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ der Kräftegruppe $-X_i = 1$ bei den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte i durch die Kräftegruppe $-X_k = 1$. Sie erhalten in einzelnen Fällen geometrische Bedeutung und bezeichnen die Projektion des Vektors einer Verdrehung oder Verschiebung. Die Bedingung $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ kann dann kinematisch erklärt werden.

Sind X_i und X_k zwei statisch unbestimmte Stützkräfte, so bedeutet $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ die winkelrechte Lage des Vektors $\vec{i}i'$ der von $-X_k = 1$ hervorgerufenen Verschiebung des Punktes i zur Richtung des Kraftvektors X_i . Die Bedingung $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ kann daher mit einem Verschiebungsplan des Hauptsystems erfüllt werden, der für $-X_k = 1$ gezeichnet wird und $\vec{i}i'$ liefert (S. 139). X_i ist dann senkrecht dazu.

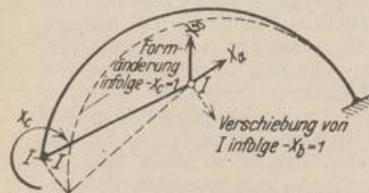


Abb. 233. $\delta_{ab} = 0$; $\delta_{ac} = 0$; $\delta_{bc} = 0$. Die Nebenbedingungen bedeuten kinematisch, daß $X_b \perp \vec{bb}'$ infolge $-X_a = 1$ ist und die Wirkungslinien von X_a und X_b durch den Pol der elastischen Bewegung der Endtangentialen in I infolge von $-X_c = 1$ verlaufen.

Ist X_k ein Spannungsmoment, so wird $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$, wenn die Wirkungslinie von X_i während der Bewegung infolge von $-X_k = 1$ durch den Drehpunkt der Stabtangente verläuft. Ist X_k ein Biegemoment, so ist die Lage von k bei $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ dadurch bestimmt, daß die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung der Querschnitte i infolge $-X_k = 1$ Null ist (Abb. 233).

Diese zeichnerischen Hilfsmittel sind meist nicht genau genug, um die Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ vollständig zu erfüllen, so daß sie besser durch analytische Lösung ersetzt werden. In einfachen Fällen treten an die Stelle der statisch unbestimmten Schnittkräfte eines ausgezeichneten Querschnitts

äquivalente Kräfte mit geometrischen Freiwerten. Die überzähligen Größen erscheinen daher als Funktionen der Koordinaten x_0, y_0 ihres Schnittpunktes und des Winkels φ zwischen ihren Richtungen. Damit werden auch die Schnittkräfte N_i, N_k, M_i, M_k des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1, -X_k = 1$ Funktionen dieser Koordinaten. Sie können mit den Nebenbedingungen

$$\delta_{ik} = \frac{J_c}{F_c} \int N_i N_k \frac{F_c}{F} ds + \int M_i M_k \frac{J_c}{J} ds = 0 \quad (466)$$

so bestimmt werden, daß je drei einander zugeordnete überzählige Größen voneinander unabhängig sind.

Anwendung auf zweifach statisch unbestimmte Stabwerke. Als überzählige Größen werden die Komponenten einer Gelenkkraft $X_1 \uparrow X_2$ mit dem Winkel $\varphi = 90 - \psi$ (Abb. 239b) oder die Biegemomente X_1, X_2 zweier Querschnitte im Abstand e (Abb. 239f) verwendet. Dann sind φ und e geometrische Freiwerte, die so bestimmt werden, daß $1_1 \cdot \delta_{12} = 0$. Dies wird mit der Berechnung des Rahmens Abb. 239a ausführlich gezeigt.

a) Die überzähligen Größen sind die Komponenten X_1, X_2 der Stützkraft im Punkte a . Die Richtung von X_2 schließt mit der Waagerechten den Winkel ψ ein.

Dieser dient als geometrischer Freiwert. Die Kraft $-X_1 = 1$ liefert M_1 , die waagerechte Kraft 1 in a die Momente M_k . Aus der Bedingung

$$\int M_1 M_2 \frac{J^e}{J} ds = \int M_1 (M_1 \sin \psi + M_k \cos \psi) \frac{J^e}{J} ds = 0$$

folgt

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{\int M_1 M_k \frac{J^e}{J} ds}{\int M_1^2 \frac{J^e}{J} ds} \quad (467)$$

Besitzen die beiden Rahmenstäbe konstantes Trägheitsmoment, so ist

$$\operatorname{tg} \psi = + \frac{3 l' h}{2 l^2 l'} = + \frac{3 h}{2 l}.$$

b) Die überzähligen Größen sind das Biegemoment X_1 und die waagerechte Komponente X_2 des Stützendrucks A . Parameter ist die Abszisse e des Quer-

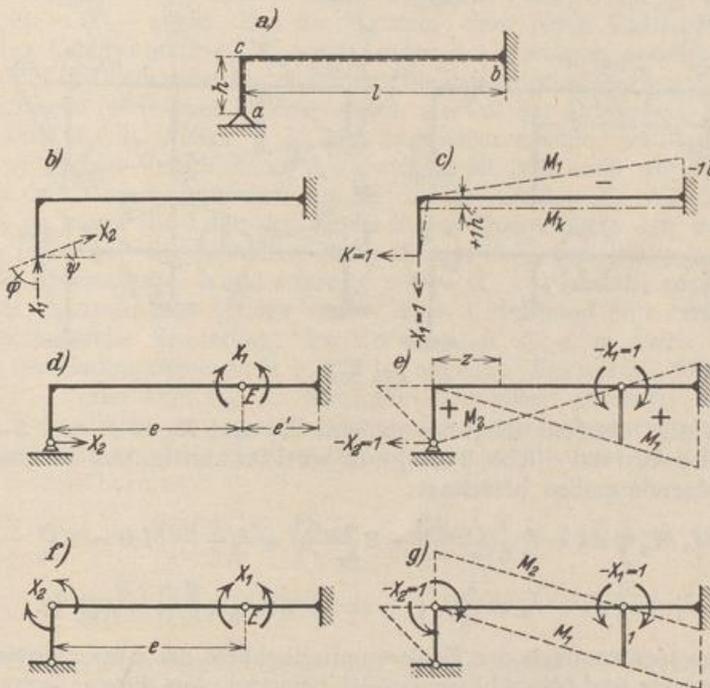


Abb. 239.

schnitts E (Abb. 239 d, e). Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist $e = 2/3 \cdot l$. Der Ansatz erfährt keine Änderung, wenn die beiden Biegemomente X_1 und X_2 in E und C als überzählige Größen gewählt werden (Abb. 239 f, g) und der Parameter e so bestimmt wird, daß die Nebenbedingung $1_1 \cdot \delta_{12} = 0$ erfüllt ist.

In ähnlicher Weise wird der Rahmen Abb. 240 berechnet.

a) Überzählige Größen: Die Komponenten X_1, X_2 des Stützendrucks A (Abb. 240 b, c). Parameter ist der Winkel ψ .

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{\int M_1 M_k \frac{J^e}{J} ds}{\int M_1^2 \frac{J^e}{J} ds}$$

Bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe ist

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h_1 (3l'_1 + 2l'_2) + h_2 l'_2}{2l_1 (l'_1 + l'_2)}$$

b) Überzählige Größen: Stützkraft $C = X_1$ und das Biegemoment $M_E = X_2$. Parameter ist die Strecke e (Abb. 240 d, e).

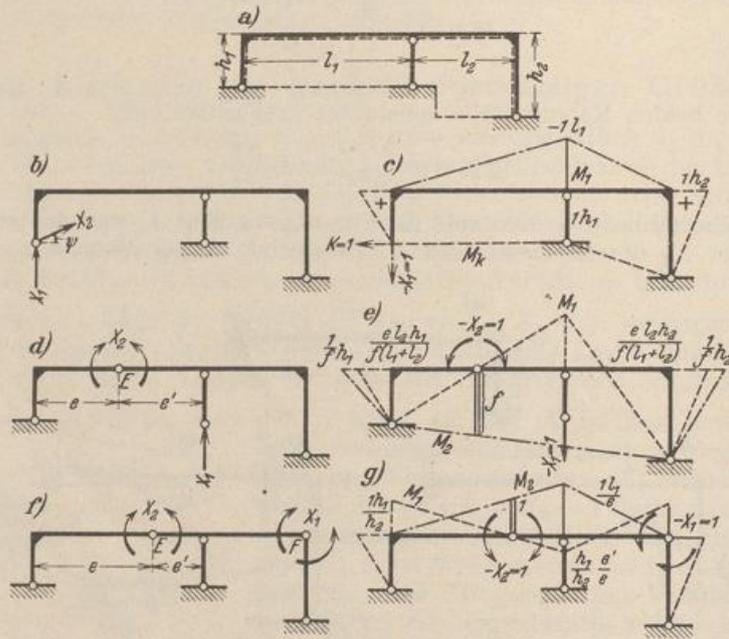


Abb. 240.

c) Überzählige Größen: Biegemomente X_1 und X_2 in F und E . Als Parameter dient der Abstand e (Abb. 240 f, g). Er wird bei konstantem Trägheitsmoment der Stäbe folgendermaßen berechnet:

$$\delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{J_c}{J} ds = l'_1 \frac{1}{6} \frac{l_1}{e} \left(\frac{h_1}{h_2} - 2 \frac{h_1}{h_2} \frac{e'}{e} \right) + l'_2 \frac{1}{6} \frac{l_1}{e} \left(1,0 - 2 \frac{h_1}{h_2} \frac{e'}{e} \right) = 0;$$

$$\lambda'_1 = \frac{l'_2}{l'_1}; \quad \lambda_h = \frac{h_2}{h_1}; \quad e = \frac{2 + 2\lambda'_1}{3 + 2\lambda'_1 + \lambda'_1 \lambda_h} l_1.$$

Diese Ansätze werden nach der Fehlerempfindlichkeit der Superposition der Anteile aus Belastung und überzähligen Größen bewertet. Aus diesem Grunde verdient der dritte Ansatz in beiden Beispielen den Vorzug.

Anwendung auf dreifach statisch unbestimmte Stabwerke. Die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c eines Hauptsystems können entweder aus den drei Schnittkräften eines Querschnitts b (Abb. 241) oder aus drei Biegemomenten (Abb. 243) abgeleitet werden. Außerdem besteht die Möglichkeit, dafür die Biegemomente der Querschnitte k_1, k_2 und die waagerechte Komponente der Kraft $\int (\tau \mp \sigma) dF$ eines der beiden Querschnitte (k_2) zu wählen (Abb. 242).

Die geometrischen Freiwerte (x'_0, y'_0, ψ), die auf diese Weise eingehen, werden aus den Nebenbedingungen

$$1_a \delta_{ab} = 0, \quad 1_b \delta_{bc} = 0, \quad 1_c \delta_{ca} = 0 \quad (468)$$

so bestimmt, daß die überzähligen Größen X_a, X_b, X_c nicht mehr voneinander abhängen. Diese bestehen in dem Ansatz zu Abb. 241 aus den Schnittkräften des

Querschnitts b , also aus zwei Gruppen von Kräften, die wiederum miteinander im Gleichgewicht sind. Die überzähligen Größen des Ansatzes zu Abb. 242 bilden zweimal zwei Gruppen von Kräften, von denen ebenfalls je zwei im Gleichgewicht

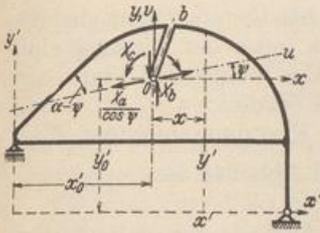


Abb. 241.

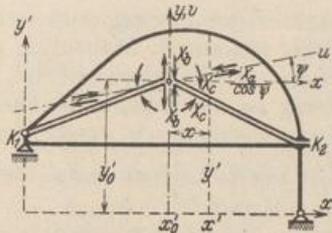


Abb. 242.

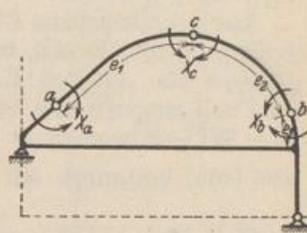


Abb. 243.

sind. Jeder Ansatz enthält eine Kraft $X_a \uparrow X_b$ und ein Kräftepaar X_c . Die Wirkungslinien der Kräfte schneiden sich in einem Punkt $O(x'_0, y'_0)$ und schließen den Winkel $\varphi = 90 - \psi$ ein. Um die Wirkung einer jeden Kräftegruppe auf die zugeordneten Querschnitte k_1, k_2 zum Ausdruck zu bringen, werden diese mit O durch starre Stäbe verbunden angenommen, die keine Formänderung erleiden. Nach den Bedingungen (468) kann O kinematisch als Pol der Drehbewegung der Querschnitte k oder k_1, k_2 infolge $-X_c = 1$ angesehen werden, während X_a winkelrecht zur wirklichen Verschiebung δ_{ab} gerichtet ist (vgl. auch Abb. 238).

Werden drei Biegemomente als überzählige Größen X_a, X_b, X_c verwendet (Abb. 243), so hängt die Lage der zugeordneten Querschnitte a, b, c von den Bedingungen (468) ab. Sie bedeuten dann kinematisch, daß die gegenseitige Verdrehung der Querschnitte b und c infolge von $-X_a = 1$ und die gegenseitige Verdrehung des Querschnitts c infolge von $-X_b = 1$ Null sind (vgl. S. 272).

Die zeichnerische Ermittlung der Koordinaten x'_0, y'_0, ψ durch kinematische Auslegung der Bedingungen nach S. 272 ist ungenau. Sie werden daher analytisch mit $M_a, M_b \dots$ oder $M_a^{(r)}, M_b^{(r)} \dots$ als Funktionen dieser geometrischen Freiwerte entwickelt, je nachdem ein statisch bestimmtes oder r fach statisch unbestimmtes Hauptsystem vorliegt. Jede der drei Bedingungen erhält dann nach (299) eine der folgenden beiden Formen:

$$\left. \begin{aligned} 1_a \delta_{ab} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_a N_b \frac{F_c}{F} ds + \int M_a M_b \frac{J_c}{J} ds = 0, \\ 1_a^{(0)} \delta_{ab}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_a^{(0)} N_b^{(r)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_a^{(0)} M_b^{(r)} \frac{J_c}{J} ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (469)$$

Ihre Anzahl kann auch beschränkt werden, um die Matrix der überzähligen Größen auf diese Weise aufzuspalten. Dies geschieht oft mit Rücksicht auf die Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Bei unsymmetrischen Bogen- und Rahmenträgern (Abb. 244) wird daher auch $1_a \delta_{ab} \neq 0$ verwendet und mit der folgenden Matrix gerechnet.

	X_a	X_b	X_c	
δ_{aa}	δ_{ab}			δ_{a0}
δ_{ba}	δ_{bb}			δ_{b0}
			δ_{cc}	δ_{c0}

(470)

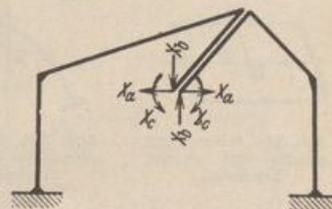


Abb. 244.

Der Ansatz ist durch die Untersuchung geschlossener oder eingespannter ein- und mehrteiliger Stabzüge mit statisch bestimmtem oder unbestimmtem Haupt-

system bekannt geworden. Unter verschiedenen Lösungen verdient stets diejenige Anordnung den Vorzug, deren überzählige Schnittkräfte klein sind, das Kräftebild des Hauptsystems also wenig ändern und einfache Ausdrücke für $N_a, M_a \dots$ oder $N_a^{(r)}, M_a^{(r)} \dots$ liefern.

Der grundsätzliche Charakter der Lösung zeigt sich bei Untersuchung des einteiligen, geschlossenen, beliebig geformten Stabzuges, der unter der Wirkung einer Gruppe von äußeren Kräften im Gleichgewicht ist. Der beiderseits starr oder elastisch eingespannte Stabzug ist ein Sonderfall. Die Koordinaten x'_0, y'_0, φ oder $\psi = 90^\circ - \varphi$ werden in einem geometrisch geeigneten Koordinatensystem x', y' aus (468) bestimmt. Mit $\frac{J_c}{J} ds = ds', \frac{F_c}{F} ds = ds''$ und Abb. 241 ist

$$\left. \begin{aligned} 1_a \delta_{ac} &= \int 1 [y' - y'_0 - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] ds' = 0, & 1_b \delta_{bc} &= \int 1 (x' - x'_0) ds' = 0, \\ 1_b \delta_{ab} &= \frac{J_c}{F_c} \int \frac{\cos(\psi - \alpha) \sin \alpha}{\cos \psi} ds'' + \int (x' - x'_0) [y' - y'_0 - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] ds' = 0, \\ y'_0 &= \frac{\int y' ds'}{\int ds'}, & x'_0 &= \frac{\int x' ds'}{\int ds'}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\int (x' - x'_0)(y' - y'_0) ds' + \frac{J_c}{F_c} \int \sin \alpha \cos \alpha ds''}{\int (x' - x'_0)^2 ds' + \frac{J_c}{F_c} \int \sin^2 \alpha ds''} \approx \frac{\int (x' - x'_0) y' ds'}{\int (x' - x'_0)^2 ds'}. \end{aligned} \right\} (471)$$

Besteht das Stabwerk aus geraden Elementen s_k von konstantem Trägheitsmoment J_k , deren Projektionen auf die Richtungen x', y' mit s_{kx}, s_{ky} und deren Schwerpunktsabstände mit x'_{k0}, y'_{k0} bezeichnet werden, so ist mit $s'_k = s_k \cdot J_c / J_k$:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k}; & y'_0 &= \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k}; \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\sum y'_{k0} x'_{k0} s'_k + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sum s_{ky} s_{kx} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k}{\sum x'_{k0} s'_k + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sum s_{kx}^2 s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k}. \end{aligned} \right\} (472)$$

In bezug auf das neue Koordinatensystem u, v (Abb. 241 u. 242) ist dann

$$\int u \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \int v \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \int uv \frac{ds}{EJ} = 0. \quad (473)$$

Der Ursprung O wird daher als Schwerpunkt elastischer Gewichte ds/EJ bezeichnet, deren Deviationsmoment bezogen auf die Richtungen der Kräfte X_b und $X_a/\cos \psi$

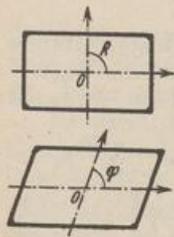


Abb. 245. Rahmen mit gerader und schiefer Symmetrie.

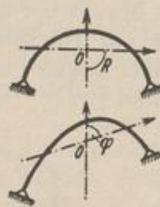


Abb. 246. Bogen mit gerader und schiefer Symmetrie.

Null ist. Diese Analogie zur Geometrie der Massen hat zur Aufzeichnung einer Elastizitätsellipse und eines Elastizitätskreises geführt, deren zugeordnete Achsen die Bedingungen (473) erfüllen. Schwerpunkt und Achsensystem sind von der Lage der ausgezeichneten Querschnitte k oder k_1, k_2 (Abb. 242) unabhängig. Sie können beliebig liegen, werden jedoch stets so gewählt, daß die Schnittkräfte aus den Belastungszuständen des Hauptsystems einfach anzugeben sind. Der elastische Schwerpunkt liegt bei gerader und schiefer Symmetrie

auf deren Achse (Abb. 245 u. 246). Diese bestimmt gemeinsam mit der Symmetrierichtung das Bezugssystem. Die Lage des elastischen Schwerpunktes folgt aus $\delta_{ac} = 0$. Die Bedingung wird unter Umständen in Verbindung mit den Komponenten $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{21}$ des Verschiebungszustandes der anschließenden Bauteile ange-

geschrieben (Abb. 247). Sie bedeuten die EJ_c fachen Drehwinkel des Anschlußquerschnitts a des symmetrischen Stabzugs infolge eines Kräftepaars von 1 mt und einer zur y -Achse winkelrechten Einzellast von 1 t.

$$1_a \delta_{ac} = -2(y'_0 \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21}) + \int (y' - y'_0) ds' = 0, \quad \left. \begin{aligned} y'_0 &= \frac{\int y' ds' - 2 \varepsilon_{21}}{\int ds' + 2 \varepsilon_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (474)$$

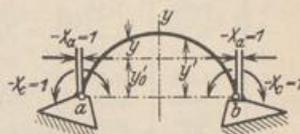


Abb. 247.

Bei zwei Symmetrieachsen ist der geometrische Mittelpunkt gleichzeitig auch elastischer Schwerpunkt (Abb. 245).

Die drei Vorzahlen δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{cc} sind ebenso wie die Koordinaten des elastischen Schwerpunkts x'_0 , y'_0 , ψ unabhängig von der Wahl des Hauptsystems und werden aus

$$\left. \begin{aligned} \sum s'_k; \quad \sum x'_{k0} s'_k; \quad \sum y'_{k0} s'_k; \\ \sum x'^2_{k0} s'_k; \quad \sum y'^2_{k0} s'_k; \quad \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k; \\ \sum s'^2_{kx} s'_k; \quad \sum s'^2_{ky} s'_k; \quad \sum s_{kx} s_{ky} s'_k; \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abb. 248}) \quad (475)$$

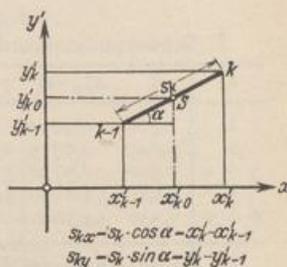


Abb. 248.

folgendermaßen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\sum x'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{b'e}}{\delta_{c'e}}; \quad y'_0 = \frac{\sum y'_{k0} s'_k}{\sum s'_k} = \frac{\delta_{a'e}}{\delta_{c'e}}; \\ \delta_{b'b} &= \sum x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{kx} s'_k - x'_0 \sum x'_{k0} s'_k = \delta_{b'b'} - x'_0 \delta_{b'e}, \\ \delta_{a'a,1} &= \sum y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s'^2_{ky} s'_k - y'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'a'} - y'_0 \delta_{a'e}, \\ \delta_{a'b} &= \sum x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \sum s_{kx} s_{ky} s'_k - x'_0 \sum y'_{k0} s'_k = \delta_{a'b'} - x'_0 \delta_{a'e}, \\ \text{tg } \psi &= \frac{\delta_{a'b}}{\delta_{b'b}}; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \delta_{a'b}. \end{aligned} \right\} \quad (476)$$

Hierbei hat $\delta_{i'k}$ die Bedeutung einer gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung im Sinne einer Kraft $-X'_i \uparrow \uparrow -X'_k$, die im Ursprung des Koordinatensystems x', y' angreift, hervorgerufen durch $-X'_k = 1$ im Punkte O . Ebenso bedeutet $\delta_{i'k'}$ die Verschiebung infolge $-X'_k = 1$ ($X'_k \uparrow \uparrow X'_k$, im Punkte $x' = 0, y' = 0$). Danach ist $\delta_{i'k} = \int M'_i M'_k \frac{J_c}{J} ds$. Für ein $r = (n - 3)$ fach statisch unbestimmtes Hauptsystem werden die Verschiebungen mit $\delta_{i'k}^{(r)}$, $\delta_{i'k'}^{(r)}$ bezeichnet und in derselben Weise berechnet. Die Vorzahlen in (465) sind:

$$\delta_{c'e} = \sum s'_k; \quad \delta_{b'b} = \delta_{b'b'}; \quad \delta_{a'a} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2}. \quad (477)$$

Die Untersuchung erfährt bei einem statisch unbestimmtem Hauptsystem keine grundsätzliche Änderung. Die geometrischen Freiwerte sind durch (468) bestimmt.

Berechnung von Dachrahmen.

A. Geometrische Grundlagen.

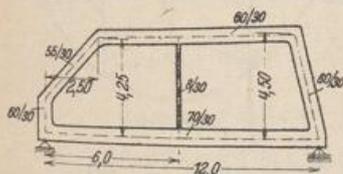


Abb. 249.

$$\begin{aligned} J_c &= 0,0054 \text{ m}^4; \\ F_{e1} (\text{Eisen}) &= 0,0016 \text{ m}^2; \\ E_b &= 210 \text{ t/cm}^2; \\ n &= E_s/E_b = 10. \end{aligned}$$

Bezeichnungen vgl. Abb. 248.

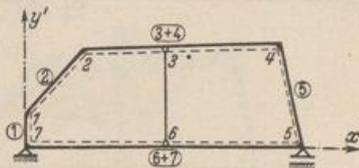


Abb. 250.

* $\uparrow \uparrow$ bedeutet parallel und gleichgerichtet (vgl. Hütte).

k	x'_k	y'_k	x'_{k0}	y'_{k0}	s_{kx}	s_{ky}	s_k	J_c/J	s'_k
0	0,00	0,00							
1	0,00	1,50	0,00	0,750	0,00	1,50	1,50	1,0000	1,500
2	2,50	4,25	1,250	2,875	2,50	2,75	3,72	1,2980	4,829
3	6,00	4,35	6,750	4,375	8,50	0,25	3,50	1,0000	3,500
4	11,00	4,50					5,00	1,0000	5,000
5	12,00	0,00	11,500	2,250	1,00	-4,50	4,61	1,0000	4,610
6	6,00	0,00	6,000	0,000	-12,00	0,00	6,00	0,6294	3,776
7	0,00	0,00					6,00	0,6294	3,776

B. Dachrahmen ohne Hängesäule.

1. Schwerpunktskoordinaten und Vorzahlen nach (475) u. (476).

k	s'_k	$x'_{k0} \cdot s'_k$	$y'_{k0} \cdot s'_k$	$x'^2_{k0} s'_k$	$y'^2_{k0} s'_k$	$x'_{k0} y'_{k0} s'_k$	$s^2_{kx} s'_k$	$s^2_{ky} s'_k$	$s_{kx} s_{ky} s'_k$
1	1,500	0,0000	1,1250	0,0000	0,8438	0,0000	0,0000	3,3750	0,000
2	4,829	6,0375	13,8863	7,5469	39,9231	17,3578	30,1813	36,5193	33,1994
3 + 4	8,500	57,3750	37,1875	387,2813	162,6953	251,0156	614,1250	0,5313	18,0625
5	4,610	53,0150	10,3725	609,6725	23,3381	119,2838	4,6100	93,3525	-20,7450
6 + 7	7,552	45,3000	0,0000	271,8000	0,0000	0,0000	1087,4880	0,0000	0,0000
Σ	26,991	161,7275	62,5713	1276,3007	226,8003	387,6572	1736,4043	133,7781	30,5169

$\delta_{b'e} = \Sigma x'_{k0} s'_k = 161,7275; \delta_{a'e} = \Sigma y'_{k0} s'_k = 62,5713; \delta_{ee} = \Sigma s'_k = 26,991;$

$\delta_{b'b} = \Sigma x'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s^2_{kx} s'_k = 1276,3007 + \frac{1}{12} 1736,4043 = 1421,0011;$

$\delta_{a'a} = \Sigma y'^2_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s^2_{ky} s'_k = 226,8003 + \frac{1}{12} 133,7781 = 237,9485;$

$\delta_{a'b} = \Sigma x'_{k0} y'_{k0} s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s_{kx} s_{ky} s'_k = 387,6572 + \frac{1}{12} 30,5169 = 390,2003;$

$x'_0 = \frac{\delta_{b'e}}{\delta_{ee}} = \frac{161,7275}{26,991} = 5,9921; \quad y'_0 = \frac{\delta_{a'e}}{\delta_{ee}} = \frac{62,5713}{26,991} = 2,3183;$

$\delta_{b'b} = \delta_{b'b} - x'_0 \delta_{b'e} = 1421,0011 - 5,9921 \cdot 161,7275 = 451,914;$

$\delta_{a'a,1} = \delta_{a'a} - y'_0 \delta_{a'e} = 237,9485 - 2,3183 \cdot 62,5713 = 92,8895;$

$\delta_{a'a} = \delta_{a'a} - x'_0 \delta_{a'e} = 390,2003 - 5,9921 \cdot 62,5713 = 15,2668;$

$\text{tg } \psi = \frac{\delta_{a'a}}{\delta_{b'b}} = \frac{15,2668}{451,914} = 0,03378; \quad \delta_{a'a,2} = \text{tg } \psi \cdot \delta_{a'a} = 0,5157;$

$\delta_{ee} = 26,991; \quad \delta_{bb} = \delta_{b'b} = 451,914;$

$\delta_{aa} = \delta_{a'a} = \delta_{a'a,1} - \delta_{a'a,2} = 92,8895 - 0,5157 = 92,3738;$

Probe für die Koordinaten $x'_0; y'_0; \psi$ nach (472):

$\Sigma (y'_{k0} - y'_0) s'_k = 0,0; \quad \Sigma (x'_{k0} - x'_0) s'_k = 0,0;$

$\Sigma (x'_{k0} - x'_0) (y'_{k0} - x'_0 \text{tg } \psi) s'_k + \frac{1}{12} \Sigma s_{kx} (s_{ky} - s_{kx} \text{tg } \psi) s'_k = 0,0.$

2. Belastung und Wahl des Hauptsystems nach (Abb. 242).

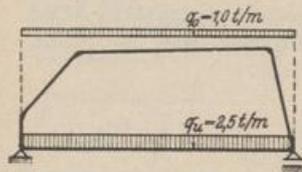


Abb. 251.

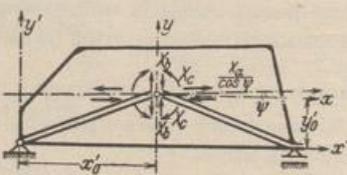


Abb. 252.

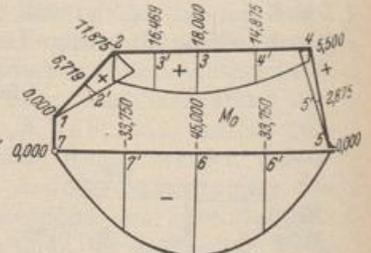


Abb. 253.

Belastung: Gleichmäßig verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast nach Abb. 251.
 Hauptsystem: Zwei Balken auf zwei Stützen nach Abb. 252. Die überzähligen Schnittkräfte werden durch eine äquivalente Kräftegruppe X_a, X_b, X_c im elastischen Schwerpunkt ersetzt.

Momente M_0 im Hauptsystem: Abb. 253; Momente im Hauptsystem aus:

$$\begin{aligned} -X_c &= 1, & M_c &= -1,0; \\ -X_b &= 1, & M_b &= -x = -(x' - x'_0); \\ -X_a &= 1, & M_a &= -[y - x \operatorname{tg} \psi] = -[(y' - y'_0) - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi]. \end{aligned}$$

3. Belastungszahlen: Tabellarische Berechnung von:

$$\begin{aligned} \delta_{b'0} &= -\int x' M_0 ds' = +354,455; & \delta_{a'0} &= -\int y' M_0 ds' = -687,355; \\ \delta_{c0} &= -\int 1 M_0 ds' = +57,224; & \delta_{a0} &= -\int (y - x \operatorname{tg} \psi) M_0 ds' = \delta_{a'0} - y'_0 \delta_{c0} - \operatorname{tg} \psi \delta_{b0}; \\ \delta_{a0} &= -687,355 - 2,3183 \cdot 57,224 - 0,03378 \cdot 11,563 = -820,408; \\ \delta_{b0} &= -\int x M_0 ds' = \delta_{b'0} - x'_0 \delta_{c0} = 354,455 - 5,9921 \cdot 57,224 = 11,563. \end{aligned}$$

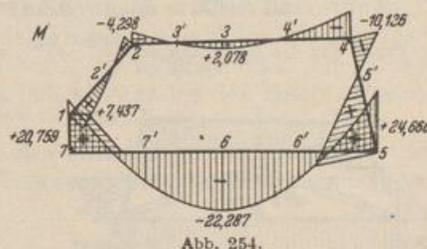
4. Überzählige Größen:

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = \frac{-820,408}{92,3738} = -8,8814 \text{ t}, \\ X_b &= \frac{\delta_{b0}}{\delta_{bb}} = \frac{11,563}{451,914} = +0,02559 \text{ t}, \\ X_c &= \frac{\delta_{c0}}{\delta_{cc}} = \frac{57,224}{26,991} = +2,1201 \text{ mt}. \end{aligned}$$

5. Momente im dreifach statisch unbestimmten System (Abb. 254):

$$\begin{aligned} M &= M_0 - X_a M_a - X_b M_b - X_c M_c \\ &= M_0 + X_a [(y' - y'_0) - (x' - x'_0) \operatorname{tg} \psi] + X_b (x' - x'_0) + X_c \\ &= M_0 + X_a y' + (X_b - X_a \operatorname{tg} \psi) x' + [X_c - X_b x'_0 - X_a (y'_0 - \operatorname{tg} \psi x'_0)] \\ &= M_0 - 8,8815 y' + 0,32559 x' + 20,7593. \end{aligned}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	+ 7,4370	4	- 10,1260
2'	+ 2,3507	5	+ 24,6664
2	- 4,2981	6'	- 10,0604
3'	+ 0,4213	6	- 22,2872
3	+ 2,0783	7'	- 12,0139
4'	- 0,8988	7	+ 20,7593



C. Dachrahmen mit Hängestange.

Das System ist vierfach statisch unbestimmt. Die Schnittkräfte X_1, X_2, X_3 an den Querschnitten 5 und 7 (Abb. 250) werden durch eine äquivalente Kräftegruppe X_a, X_b, X_c ersetzt, für die

$$\delta_{b'c}^{(1)} = 0; \quad \delta_{a'c}^{(1)} = 0; \quad \delta_{a'b}^{(1)} = 0$$

ist. Dies sind die Nebenbedingungen für die Koordinaten $x'_0, y'_0, \psi^{(1)}$. In den Ansätzen unter B dieser Aufgabe treten daher an Stelle der Formänderungen δ_{ik} die Formänderungen $\delta_{ik}^{(1)}$ des einfach statisch unbestimmten Hauptsystems.

1. Belastung: Gleichmäßig verteilte Last aus Eigengewicht und Nutzlast nach Abb. 251.

2. Hauptsystem, einfach statisch unbestimmt: Zwei übereinanderliegende einfache Träger mit Hängestange. Statisch unbestimmte Schnittkraft: Y_A (Längskraft der Hängestange). Die Formänderungen des statisch unbestimmten Hauptsystems werden aus den folgenden zugeordneten Formänderungen des statisch bestimmten Hauptsystems berechnet (Abb. 255):

$$\delta_{AA} = \int M_A^2 ds' + \frac{J_c}{11 F_Z} S_Z^2 s_Z = 61,6325;$$

$$\delta_{Ac} = -\int 1 M_A ds' = 31,6838;$$

$$\delta_{A'b'} = -\int x' M_A ds' = 188,6054;$$

$$\delta_{A'a'} = -\int y' M_A ds' = 84,1148.$$

$\delta_{b'e}, \delta_{a'e}, \delta_{c'e}$ usw. aus B, 1.

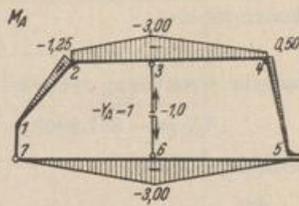


Abb. 255.

3. Schwerpunktskoordinaten und Vorzahlen $\delta_{kk}^{(1)}$:

$$Y_{Ac} = \frac{\delta_{Ac}}{\delta_{AA}} = 0,51407; \quad Y_{Ab'} = \frac{\delta_{Ab'}}{\delta_{AA}} = 3,06016; \quad Y_{Aa'} = \frac{\delta_{Aa'}}{\delta_{AA}} = 1,36478;$$

$$\begin{aligned} \delta_{b'c}^{(1)} &= \delta_{b'c} - Y_{Ac} \delta_{Ab'} = 161,7275 - 0,51407 \cdot 188,6054 = 64,7711, \\ \delta_{a'c}^{(1)} &= \delta_{a'c} - Y_{Ac} \delta_{Aa'} = 62,5713 - 0,51407 \cdot 84,1148 = 19,3304, \\ \delta_{cc}^{(1)} &= \delta_{cc} - Y_{Ac} \delta_{Ac} = 26,991 - 0,51407 \cdot 31,6838 = 10,7033, \\ \delta_{b'b'}^{(1)} &= \delta_{b'b'} - Y_{Ab'} \delta_{Ab'} = 1421,0011 - 3,06016 \cdot 188,6054 = 843,8384, \\ \delta_{a'a'}^{(1)} &= \delta_{a'a'} - Y_{Aa'} \delta_{Aa'} = 237,9485 - 1,36478 \cdot 84,1148 = 123,1503, \\ \delta_{a'b'}^{(1)} &= \delta_{a'b'} - Y_{Aa'} \delta_{Ab'} = 390,2003 - 1,36478 \cdot 188,6054 = 132,7954, \\ x_0^{(1)} &= \frac{\delta_{b'c}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = \frac{64,7711}{10,7033} = 6,0515; \quad y_0^{(1)} = \frac{\delta_{a'c}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = \frac{19,3304}{10,7033} = 1,8060, \end{aligned}$$

$$\delta_{b'b}^{(1)} = \delta_{b'b'}^{(1)} - x_0^{(1)} \delta_{b'c}^{(1)} = 843,8384 - 6,0515 \cdot 64,7711 = 451,8761,$$

$$\delta_{a'a,1}^{(1)} = \delta_{a'a'}^{(1)} - y_0^{(1)} \delta_{a'c}^{(1)} = 123,1503 - 1,8060 \cdot 19,3304 = 88,2396,$$

$$\delta_{a'b}^{(1)} = \delta_{a'b'}^{(1)} - x_0^{(1)} \delta_{a'c}^{(1)} = 132,7954 - 6,0515 \cdot 19,3304 = 15,8175,$$

$$\text{tg } \psi^{(1)} = \frac{\delta_{a'b}^{(1)}}{\delta_{b'b}^{(1)}} = \frac{15,8175}{451,8761} = 0,0350; \quad \delta_{a'a,2}^{(1)} = \text{tg } \psi^{(1)} \cdot \delta_{a'b}^{(1)} = 0,5536,$$

$$\delta_{cc}^{(1)} = 10,7033, \quad \delta_{bb}^{(1)} = \delta_{b'b}^{(1)} = 451,8761;$$

$$\delta_{aa}^{(1)} = \delta_{a'a}^{(1)} = \delta_{a'a,1}^{(1)} - \delta_{a'a,2}^{(1)} = 88,2396 - 0,5536 = 87,6860;$$

Probe für die Koordinaten $x_0^{(1)}$; $y_0^{(1)}$; $\psi^{(1)}$: Ermittlung von $M_a^{(1)}$, $M_b^{(1)}$, $M_c^{(1)}$:

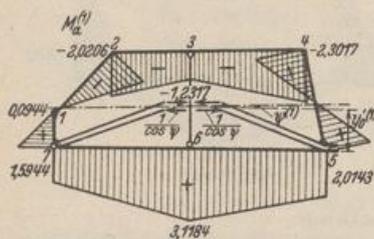


Abb. 256.

$$Y_{Ac} = 0,51407;$$

$$Y_{Ab} = Y_{Ab'} - x_0^{(1)} Y_{Ac} = -0,05077;$$

$$Y_{Aa} = Y_{Aa'} - y_0^{(1)} Y_{Ac} - \text{tg } \psi^{(1)} Y_{Ab} = 0,4381;$$

$$\int M_b M_c^{(1)} ds' = 0,0; \quad \int M_a M_c^{(1)} ds' = 0,0;$$

$$\int M_a M_b^{(1)} ds' = 0,0. \quad (\text{Abb. 256 bis 258}).$$

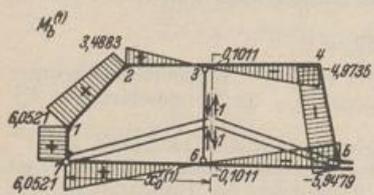


Abb. 257.

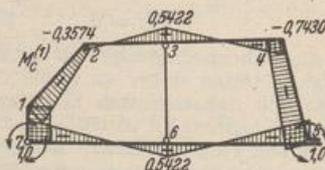


Abb. 258.

4. Belastungszahlen:

$$\delta_{k0}^{(1)} = \int M_0' M_k^{(1)} ds';$$

die tabellarische Ermittlung führt zu:

$$\delta_{a0}^{(1)} = -851,8949; \quad \delta_{b0}^{(1)} = 15,2279; \quad \delta_{c0}^{(1)} = -14,2402.$$

5. Überzählige Größen:

$$X_a^{(1)} = \frac{\delta_{a0}^{(1)}}{\delta_{aa}^{(1)}} = -9,7222 \text{ t}; \quad X_b^{(1)} = \frac{\delta_{b0}^{(1)}}{\delta_{bb}^{(1)}} = +0,0337 \text{ t}; \quad X_c^{(1)} = \frac{\delta_{c0}^{(1)}}{\delta_{cc}^{(1)}} = -1,2713 \text{ mt}.$$

6. Momente im vierfach statisch unbestimmten System (Abb. 259):

$$M = M_0^{(1)} - X_a^{(1)} M_a^{(1)} - X_b^{(1)} M_b^{(1)} - X_c^{(1)} M_c^{(1)}$$

k	M [mt]	k	M [mt]
1	- 0,5575	4	- 16,5268
2'	- 2,2586	5	+ 18,5125
2	- 5,5222	6'	- 5,6046
3'	+ 5,5087	6	- 7,2228
3	+ 13,4847	7'	- 7,8485
4'	+ 1,6040	7	+ 14,0258

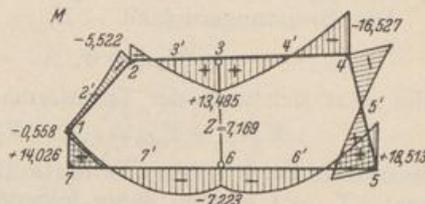


Abb. 259.

36. Die Entwicklung statisch unbestimmter Gruppenlasten.

Die einfachen Methoden zur unabhängigen Berechnung statisch unbestimmter Schnittkräfte versagen bei mehr als drei Unbekannten. Aus diesem Grunde wird der Begriff der überzähligen Größe durch die Bildung von Gruppen dieser ausgezeichneten Schnittkräfte erweitert. Sie sind bei einem n fach statisch unbestimmtem Tragwerk in n facher Mannigfaltigkeit vorhanden, jedoch nur mit n Gruppen unabhängig voneinander. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit Y_J ($J = A \dots N$) bezeichnet, also durch große Buchstaben unterschieden. Daher beschreiben die Wege δ_{JK} den Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge der Belastung durch einzelne statisch unbestimmte Schnittkräfte $-Y_K = 1$. Sie werden im Sinne von $-Y_J$ positiv gerechnet. Die Gruppen statisch unbestimmter Schnittkräfte erhalten als überzählige Größen des Ansatzes wie bisher die Bezeichnung X_k , sind also durch kleine Buchstaben ($k = a \dots n$) unterschieden. Die Wege δ_{Jk} bedeuten daher Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems infolge von $-X_k = 1$ in Richtung von $-Y_J$.

Die Gruppenlasten X_k sind äußere Kräfte des Hauptsystems, mit denen die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks wie in (288) nach dem Superpositionsgesetz entwickelt werden.

$$M = M_0 - \sum X_k M_k, \quad (k = a \dots n). \quad (466)$$

In diesem Ansatz bedeuten M_0, M_k wieder die Schnittkräfte des Hauptsystems infolge der Belastung \mathfrak{B} und der Gruppenlast $-X_k = 1$ ($k = a \dots n$).

Die Bildung der Gruppenlasten. Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J werden durch Superposition der Anteile aus den überzähligen Größen X_k gefunden.

$$Y_J = \sum_{k=a}^{k=n} X_k Y_{Jk}, \quad (J = A \dots N). \quad (467)$$

	X_a	X_b	X_h	X_i	X_k	X_n
Y_A	Y_{Aa}	Y_{Ab}	Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}	Y_{An}
Y_B	Y_{Ba}	Y_{Bb}	Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}	Y_{Bn}
Y_H	Y_{Ha}	Y_{Hb}	Y_{Hh}	Y_{Hi}	Y_{Hk}	Y_{Hn}
Y_J	Y_{Ja}	Y_{Jb}	Y_{Jh}	Y_{Ji}	Y_{Jk}	Y_{Jn}
Y_N	Y_{Na}	Y_{Nb}	Y_{Nh}	Y_{Ni}	Y_{Nk}	Y_{Nn}

(468)

Daher bedeutet der Index k von Y_{Jk} im Gegensatz zu (466) die Ursache $+X_k = 1$. Der Ansatz besteht aus n Gleichungen zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Gruppenlasten X_k mit der umstehenden Matrix:

Der Belastungszustand $-X_k = 1$ ist gleichbedeutend mit

$$X_a = \dots = X_{k-1} = 0, \quad -X_k = 1, \quad X_{k+1} = \dots = X_n = 0,$$

und setzt sich nach der Transformation aus den Schnittkräften

$$Y_A = -Y_{Ak} \dots, \quad Y_J = -Y_{Jk} \dots, \quad Y_N = -Y_{Nk}$$

zusammen. Die beliebigen Schnittkräfte M_k des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ können daher folgendermaßen entwickelt werden:

$$M_k = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J, \quad (k = a \dots n). \quad (469)$$

Hierbei ist M_J die Schnittkraft infolge von $-Y_J = 1$.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichung für statisch unbestimmte Gruppenlasten. Das Hauptsystem entsteht nach Abschn. 24 durch die Verwendung von statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften Y_J des Stabwerks als äußere Kräfte. Sie werden durch die Variation der Formänderungsarbeit nach den Spannungen aus vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems berechnet. Dabei entstehen Gleichungen über die Arbeit von virtuellen Kräften \mathfrak{F} und vorgeschriebenen Verschiebungen δ_J . Sie sind in Abschn. 24 mit $\mathfrak{F} = -Y_J = 1$ und $\delta_J = 0$ angeschrieben worden.

$$1_J \cdot \delta_J = 1_J \cdot (\delta_{J0} - \sum_{H=A}^{H=N} Y_H \delta_{JH}) = 0, \quad (J = A \dots N). \quad (470)$$

Unter ungünstigen Umständen sind alle δ_{JH} von Null verschieden und damit n Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen.

Um diese unabhängig voneinander anzugeben, werden Arbeitsgleichungen mit der virtuellen Belastung $-X_i = 1$ ($i = a \dots n$), also mit den äußeren Kräften $-Y_{Hi}$ ($H = A \dots N$) entwickelt.

$$\sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_H = \frac{J_c}{F_c} \int \bar{N}_i N \frac{F_c}{F} ds + \int \bar{M}_i M \frac{J_c}{J} ds + E J_c \left(\int \bar{N}_i \alpha_i t ds + \int \bar{M}_i \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds - \sum \bar{C}_{Ei} \Delta E \right), \quad (i = 1 \dots n). \quad (471)$$

Die linke Seite der Gleichungen ist durch die mit dem Tragwerk vorgeschriebene Verträglichkeit des Formänderungszustandes des Hauptsystems ($\delta_H = 0, H = A \dots N$) wiederum Null, so daß mit der Entwicklung von N, M nach (288) in Anlehnung an (293) folgender Ansatz entsteht:

$$1_i \delta_i = 1_i (\delta_{i0} - \sum_{k=1}^{k=n} X_k \delta_{ik}) = 0, \quad (i = 1 \dots n). \quad (472)$$

Die Vorzahlen $1_i \delta_{ik}$ und $1_i \delta_{i0}$ dieser n Elastizitätsgleichungen besitzen nicht mehr wie früher kinematische Bedeutung, sondern sind Ausdrücke für die virtuelle Arbeit der Gruppenbelastung $-X_i = 1$, also der Schnittkräfte $-Y_H = Y_{Hi}$, bei einer Verschiebung δ_{Hk} der Punkte H des Hauptsystems infolge der Gruppenlast $-X_k = 1$ oder infolge der vorgegebenen Belastung, der Temperaturänderung und Stützbewegung ($\delta_{H\otimes}$)

$$\left. \begin{aligned} 1_i \delta_{ik} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_{Hk}, & (i, k = a \dots n), \\ 1_i \delta_{i\otimes} &= \sum_{H=A}^{H=N} Y_{Hi} \delta_{H\otimes}, & (i = a \dots n). \end{aligned} \right\} \quad (473)$$

Die Verschiebung δ_{Hk} im Sinne von $-Y_H = 1$ wird von der Gruppenbelastung $-X_k = 1$, also von den Schnittkräften $-Y_{Hk}$ hervorgerufen und nach Maxwell in Verbindung mit (469) folgendermaßen berechnet:

$$1_H \delta_{Hk} = 1_k \delta_{kH} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \delta_{JH}, \quad (H = A \dots N),$$

$$1_H \delta_{Hk} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} \int M_H M_J \frac{J^c}{J} ds = \int M_H \left(\sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jk} M_J \right) \frac{J^c}{J} ds,$$

$$1_H \delta_{Hk} = \int M_H M_k \frac{J^c}{J} ds. \quad (474)$$

Um jede überzählige Größe unabhängig von den übrigen angeben zu können, werden die Gruppenlasten X_k derart aus den statisch unbestimmten Schnittkräften zusammengesetzt, daß alle Vorzahlen δ_{ik} ($i \neq k$) des Ansatzes (472) Null sind. Auf diese Weise entstehen $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$ Nebenbedingungen, welche mit den n Gleichungen (467) zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J und den überzähligen Größen X_k erfüllt werden können. Sie bilden die lineare Transformation, um die n Elastizitätsgleichungen mit vollbesetzter Matrix derart umzuformen, daß jede von ihnen nur eine überzählige Größe X_k enthält (465).

Die Auswahl der Gruppenlasten für die Nebenbedingung $\delta_{ik} = 0$. Die Transformation (468) der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J als Funktion der überzähligen Größen X_k enthält n^2 Koeffizienten Y_{Jk} . Von diesen werden $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$ als Parameter gebraucht, um dieselbe Anzahl von Nebenbedingungen $1_i \cdot \delta_{ik} = 0$ zu erfüllen. Die virtuelle Arbeit $1_i \cdot \delta_{ik}$ wird hierzu nach (473) als Funktion dieser Parameter entwickelt. Über die anderen $n^2 - \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ Koeffizienten kann frei verfügt werden. Sie werden derart angenommen, daß die $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$ abhängigen Parameter übersichtlich, schnell und fehlerfrei bestimmt werden. Sollen nur einzelne δ_{ik} des Ansatzes Null werden, um die Matrix der Elastizitätsgleichungen in geeigneter Weise aufzuspalten und damit die Lösung zu vereinfachen, so ist die Anzahl der frei wählbaren Parameter Y_{Jk} größer.

Die Lösung eines allgemeinen Ansatzes wird am einfachsten, wenn die Koeffizienten Y_{Ji} der Hauptdiagonalen gleich 1 und die Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonalen Null gesetzt werden. Damit entsteht die folgende Transformation der n statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J :

	X_a	X_b	X_c	X_h	X_i	X_k	X_n
Y_A	1	Y_{Ab}	Y_{Ac}	Y_{Ah}	Y_{Ai}	Y_{Ak}	Y_{An}
Y_B	0	1	Y_{Bc}	Y_{Bh}	Y_{Bi}	Y_{Bk}	Y_{Bn}
Y_C	0	0	1	Y_{Ch}	Y_{Ci}	Y_{Ck}	Y_{Cn}
Y_H	0	0	0	1	Y_{Hi}	Y_{Hk}	Y_{Hn}
Y_J	0	0	0	0	1	Y_{Jk}	Y_{Jn}
Y_K	0	0	0	0	0	1	Y_{Kn}
Y_N	0	0	0	0	0	0	1

(475)

Die überzähligen Größen X_i werden demnach aus einer stetig zunehmenden Anzahl von statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J gebildet, so daß die abhängigen Koeffizienten schrittweise aus den Nebenbedingungen $\delta_{ik} = 0$ durch Gleichungen mit je einer Unbekannten erhalten werden. Der Parameter Y_{Ab} der Kolonne X_b ergibt sich aus der Bedingung $\delta_{ba} = 0$. Die Parameter Y_{Ac} , Y_{Bc} der Kolonne X_c werden mit den Nebenbedingungen $\delta_{ca} = 0$, $\delta_{cb} = 0$ bestimmt. Zur Berechnung der $(k-1)$ unbekannt Parameter Y_{Jk} der Spalte k stehen ebenso viele Bedingungsgleichungen $\delta_{ka} = 0 \dots \delta_{k(k-1)} = 0$ zur Verfügung.

Der Belastungszustand $-X_a = 1$ ist nach (475) gleichbedeutend mit $-Y_A = 1$. Er liefert die Verschiebungen δ_{Ja} ($J = A \dots N$).

$$1_a \delta_{ab} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Ja} \delta_{Jb} = 1_{Aa} \delta_{Ab} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \delta_{Ab} = 0.$$

$$1_b \delta_{ba} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jb} \delta_{Ja} = Y_{Ab} \delta_{Aa} + 1_{Bb} \delta_{Ba} = 0; \quad Y_{Ab} = -\frac{\delta_{Ba}}{\delta_{Aa}}.$$

$-Y_A = Y_{Ab} = -\delta_{Ba}/\delta_{Aa}$ und $-Y_B = Y_{Bb} = 1$ bilden den Belastungszustand $-X_b = 1$. Damit sind dann auch die Formänderungen δ_{Jb} ($J = A \dots N$) bekannt. Die Koeffizienten Y_{Ac} und Y_{Bc} werden mit den folgenden Bedingungen bestimmt:

$$1_a \delta_{ac} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Ja} \delta_{Jc} = 1_{Aa} \delta_{Ac} = 0; \quad \delta_{Ac} = 0;$$

$$1_b \delta_{bc} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jb} \delta_{Jc} = Y_{Ab} \delta_{Ac} + 1_{Bb} \delta_{Bc} = 0; \quad \delta_{Bc} = 0;$$

$$1_c \delta_{cb} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jc} \delta_{Jb} = Y_{Ac} \delta_{Ab} + Y_{Bc} \delta_{Bb} + 1_{Cc} \delta_{Cb} = 0;$$

$$Y_{Bc} = -\frac{1_{Cc} \delta_{Cb}}{\delta_{Bb}};$$

$$1_c \delta_{ca} = \sum_{J=A}^{J=N} Y_{Jc} \delta_{Ja} = Y_{Ac} \delta_{Aa} + Y_{Bc} \delta_{Ba} + 1_{Cc} \delta_{Ca} = 0;$$

$$Y_{Ac} = -\frac{Y_{Bc} \delta_{Ba} + 1_{Cc} \delta_{Ca}}{\delta_{Aa}}.$$

Damit ist der Belastungszustand $-X_c = 1$ bestimmt. Er besteht aus den Schnittkräften $-Y_A = Y_{Ac}$, $-Y_B = Y_{Bc}$, $-Y_C = 1$ und liefert die Formänderungen δ_{Jc} ($J = A \dots N$). Werden die Indizes der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit Rücksicht auf die spätere Anwendung durch Ziffern ersetzt, so entsteht die Rechenvorschrift auf S. 285.

Die Komponenten $Y_H = -Y_{Hi}$ des Belastungszustandes $-X_i = 1$ werden als Summe von positiven und negativen Anteilen entwickelt, in denen sich Abrundungsfehler unter Umständen in unzulässigem Maße fortpflanzen und die Brauchbarkeit des Ergebnisses Y_{Hi} gefährden. Die Fehlerempfindlichkeit der Auflösung von n Gleichungen mit n Unbekannten ist daher durch die Verwendung von überzähligen Gruppenlasten nicht beseitigt, sie gefährdet vielmehr die einwandfreie Bildung der Gruppen, also die Transformation der statisch unbestimmten Einzelkräfte. Die unabhängige Berechnung der überzähligen Gruppenlasten nach (465)

$$X_k = \delta_{k0}/\delta_{kk} \quad (476)$$

ist daher stets an den Nachweis geknüpft, daß die Nebenbedingungen

$$1_i \delta_{ik} = 0, \quad (i \neq k)$$

durch die Schnittkräfte Y_{Hi} und Y_{Hk} ($H = A \dots N$) erfüllt werden.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte sind dann nach (467)

$$Y_K = 1_{Kk} X_k + Y_{K(k+1)} X_{k+1} + \dots + Y_{Kn} X_n.$$

Für die Bildung des Hauptsystems gelten die gleichen Gesichtspunkte wie auf Seite 170.

Das Wesen der Rechenvorschrift wird am besten an einfachen Beispielen gezeigt.

a) Zweifach statisch unbestimmtes Tragwerk.

Transformation: Nebenbedingung: Statisch unbestimmte Schnittkräfte:

	$X_a \quad X_b$		
Y_1	1	Y_{1b}	$\delta_{ba} = 0,$
Y_2	0	1	$Y_{1b} \delta_{1a} + 1_{2b} \delta_{2a} = 0,$
			$Y_{1b} = -1 \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}},$
			$Y_1 = 1 X_a - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} X_b,$
			$Y_2 = 1 X_b.$

Durchgehender Träger über vier Stützen (Abb. 260). Die statisch nicht bestimmbar sind die Stützenmomente Y_1, Y_2 .

Belastungszustand $-X_a = 1$: $-Y_1 = Y_{1a} = 1$; $-Y_2 = Y_{2a} = 0$

$$\delta_{1a} = \frac{l'_1 + l'_2}{3}; \quad \delta_{2a} = \frac{l'_2}{6}.$$

Belastungszustand $-X_b = 1$: $-Y_1 = Y_{1b} = -\frac{l'_2}{2(l'_1 + l'_2)}$; $-Y_2 = Y_{2b} = 1.$

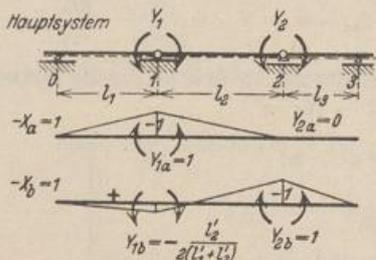


Abb. 260.

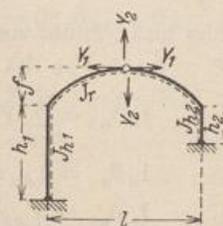


Abb. 261.

Unsymmetrischer Eingelenkrahmen (Abb. 261). Die statisch nicht bestimmbar sind die Komponenten Y_1 und Y_2 der Gelenkkraft.

$-X_a = 1$: $-Y_1 = Y_{1a} = 1$; $-Y_2 = Y_{2a} = 0$ (Abb. 262a);

$-X_b = 1$: $-Y_1 = Y_{1b} = -\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}$; $-Y_2 = Y_{2b} = 1$ (Abb. 262b).

$$Y_{1b} = -\frac{15 I [h'_1 (2f + h_1) - h'_2 (2f + h_2)]}{4 \{3 f'^2 + 5 h'_1 [3 f (h_1 + f) + h_1^2] + 5 h'_2 [3 f (h_2 + f) + h_2^2]\}},$$

$$Y_1 = X_a - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} X_b; \quad Y_2 = X_b.$$

Bei symmetrischer Trägereinbildung mit $h_1 = h_2$ und $h'_1 = h'_2$ ist $Y_{1b} = 0$.

b) Dreifach statisch unbestimmtes Tragwerk. Transformation für die Nebenbedingungen $\delta_{ab} = \delta_{bc} = \delta_{ca} = 0$ nach S. 285

	$X_a \quad X_b \quad X_c$		$X_a \quad X_b \quad X_c$
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}
Y_2		1	Y_{2c}
Y_3			1

Y_1	1	$-\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}$	$-\frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} + \frac{\delta_{2a} \delta_{3b}}{\delta_{1a} \delta_{2b}}$
Y_2		1	$-\frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}}$
Y_3			1

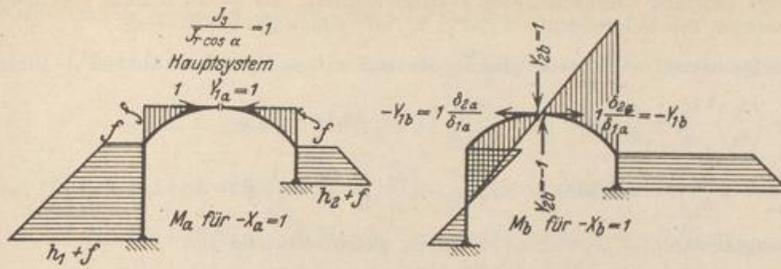


Abb. 262.

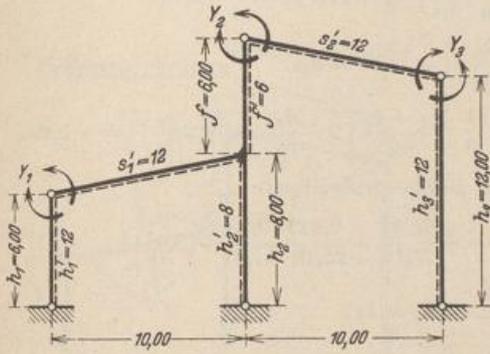


Abb. 263 a. Hauptsystem.

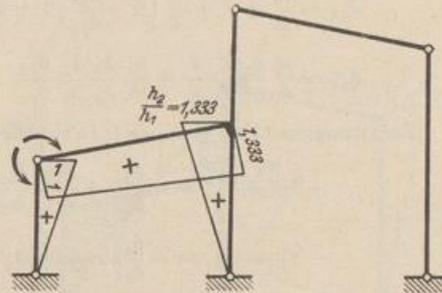


Abb. 263 b. $- Y_1 = 1$.

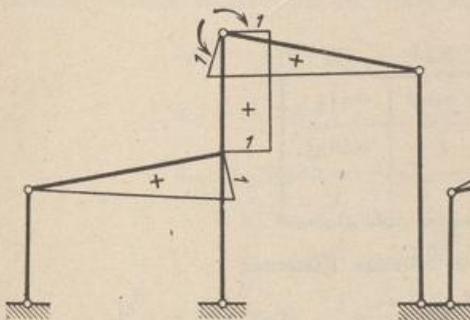


Abb. 263 c. $- Y_2 = 1$.

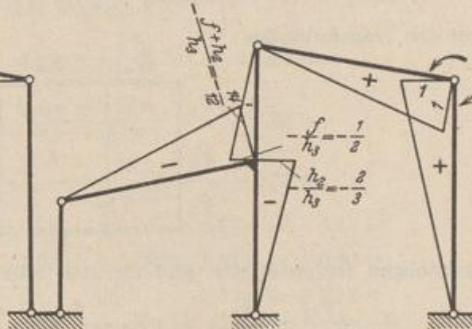


Abb. 263 d. $- Y_3 = 1$.

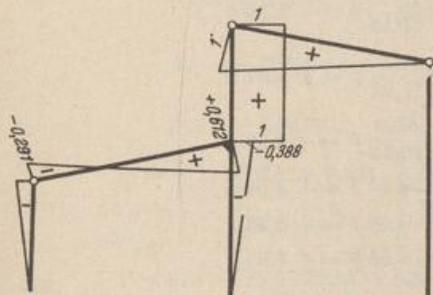


Abb. 263 e. $- X_b = 1$.

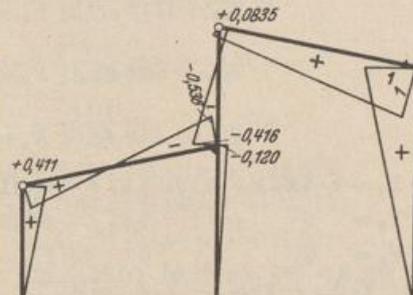


Abb. 263 f. $- X_c = 1$.

Dreifach statisch unbestimmter Hallenrahmen. Als statisch nicht bestimmbare Einzelkräfte werden die Eckmomente Y_1, Y_2, Y_3 verwendet (Abb. 263 a—d).

Belastungszustand $-X_a = 1$, gleichbedeutend mit $-Y_1 = 1$ (Abb. 263 b), führt zu

$$\delta_{1a} = \frac{h_1'}{3} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{h_2'}{3} + \frac{s_1'}{3} \left[1 + \frac{h_2}{h_1} + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2\right] = +25,18 = \delta_{aa},$$

$$\delta_{2a} = \frac{s_1'}{6} \left(1 + 2 \frac{h_2}{h_1}\right) = +7,333; \quad \delta_{3a} = -\left[\frac{h_2}{h_1} \frac{h_2}{h_3} \frac{h_2'}{3} + \frac{1}{h_3} (f + h_2) \left(1 + 2 \frac{h_2}{h_1}\right) \frac{s_1'}{6}\right] = -10,87.$$

Belastungszustand $-X_b = 1$ (Abb. 263 e), gleichbedeutend mit

$$-Y_1 = Y_{1b} = -\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} = -\frac{7,333}{25,18} = -0,291; \quad -Y_2 = 1,$$

liefert M_b und die Formänderungen δ_{2b} und δ_{3b} ; $\delta_{1b} = 0$.

$$\delta_{2b} = \frac{s_2'}{3} + f' + \frac{s_1'}{6} \left[2 - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \left(1 + 2 \frac{h_2}{h_1}\right)\right] = 11,87 = \delta_{bb},$$

$$\delta_{3b} = \frac{s_2'}{6} - \frac{f'}{2} \frac{f}{h_3} + \frac{h_2'}{3} \frac{h_2}{h_3} \frac{h_2}{h_1} \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} - \frac{1}{6} s_1' \frac{f + h_2}{h_3} \left[2 - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \left(1 + 2 \frac{h_2}{h_1}\right)\right] = -0,99.$$

Belastungszustand $-X_c = 1$ (Abb. 263 f), gleichbedeutend mit

$$-Y_1 = Y_{1c} = -\frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} + \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} = +\frac{10,87}{25,18} - \frac{7,333 \cdot 0,99}{25,18 \cdot 11,87} = 0,411;$$

$$-Y_2 = Y_{2c} = -\frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} = 0,0835; \quad -Y_3 = 1,$$

liefert M_c und damit die Formänderungen $\delta_{1c} = 0$, $\delta_{2c} = 0$.

$$\delta_{3c} = +12,0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2 \cdot 0,536 - 0,411) + 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,12 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (2 \cdot 0,416 - 0,0835) + 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 + 0,0835) + 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 10,30 = \delta_{cc}.$$

Ergebnis der Transformation:

	X_a	X_b	X_c
Y_1	1	-0,291	0,411
Y_2		1	0,0835
Y_3			1

Die überzähligen Gruppenlasten sind für eine beliebige Belastung

$$X_a = \frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = \frac{\delta_{a0}}{25,18}; \quad X_b = \frac{\delta_{b0}}{\delta_{bb}} = \frac{\delta_{b0}}{11,87}; \quad X_c = \frac{\delta_{c0}}{\delta_{cc}} = \frac{\delta_{c0}}{10,30}.$$

Gleichförmig verteilte Belastung der beiden Riegel (Abb. 263 g).

$$\delta_{a0} = 117 p, \quad X_a = \frac{117}{25,18} p = +4,64 p,$$

$$\delta_{b0} = 66,0 p, \quad X_b = \frac{66,0}{11,87} p = +5,57 p,$$

$$\delta_{c0} = 48,0 p, \quad X_c = \frac{48,0}{10,30} p = +4,66 p.$$

$$Y_1 = 1 \cdot 4,64 p - 0,291 \cdot 5,57 p + 0,411 \cdot 4,66 p = +4,94 p,$$

$$Y_2 = 0 + 1 \cdot 5,57 p + 0,0835 \cdot 4,66 p = +5,96 p,$$

$$Y_3 = 0 + 0 + 1 \cdot 4,66 p = +4,66 p,$$

$$\text{Probe: } Y_1 \delta_{1a} + Y_2 \delta_{2a} + Y_3 \delta_{3a} = \delta_{a0},$$

$$4,94 \cdot 25,18 + 5,96 \cdot 7,33 - 4,66 \cdot 10,87 = 117 \approx \delta_{a0}/p.$$

Die Gruppenbildung bei Symmetrie des Tragwerks. Bei Auflösung der Elastizitätsgleichungen mit symmetrisch liegenden statisch unbestimmten Schnittkräften sind durch die Addition und Subtraktion einander zugeordneter Gleichungen neue Unbekannte entstanden, die bereits in Abschn. 28 als Gruppenlasten X_{a+i}, X_{r-i} erkannt und unabhängig voneinander berechnet wurden. Die Gruppenlast $-X_{a+i} = 1$ bestand aus $-Y_{A+J} = 1, -Y_{R-J} = 1$, die Gruppenlast $-X_{r-i} = 1$ aus $-Y_{A+J} = 1, +Y_{R-J} = 1$. Die Matrix zerfiel damit in zwei voneinander unabhängige Teile. Im Sinne dieses Abschnitts wurde also über alle übrigen Komponenten $Y_{H(a+i)}, Y_{H(r-i)}$ frei verfügt. Sie waren Null. Sollen jedoch nunmehr alle überzähligen Gruppenlasten unabhängig voneinander sein, so werden die Ansätze von S. 281 für die Transformation der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit den Ergebnissen aus Abschn. 28 bei Auswahl der frei verfügbaren Komponenten unterhalb der Hauptdiagonale des Ansatzes verbunden.

a) Träger auf vier Stützen nach Abb. 264 (eine Symmetrieachse):

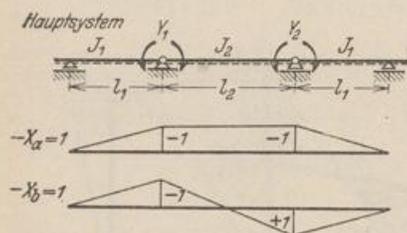


Abb. 264.

Transformation Nebenbedingung $\delta_{ba} = 0$

	X_a	X_b	
Y_1	1	Y_{1b}	$Y_{1b} \delta_{1a} - 1_{2b} \delta_{2a} = 0,$
Y_2	1	-1	$Y_{1b} = 1.$

Statisch unbestimmte Schnittkräfte

$\delta_{1a} = \delta_{2a}$ $Y_1 = X_a + X_b, Y_2 = X_a - X_b.$

b) Bunkerrahmen nach Abb. 265 (eine Symmetrieachse).

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e	X_f
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}	Y_{1d}	Y_{1e}	Y_{1f}
Y_2		1	1	Y_{2d}	Y_{2e}	Y_{2f}
Y_3		1	-1	Y_{3d}	Y_{3e}	Y_{3f}
Y_4				1	Y_{4e}	Y_{4f}
Y_5					1	1
Y_6					1	-1

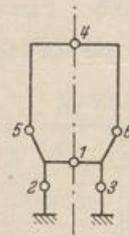


Abb. 265.

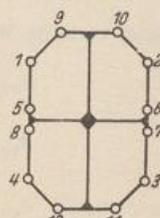


Abb. 266.

Damit ist: $Y_{2c} = Y_{5f} = 1,$
 $Y_{1c} = Y_{1f} = Y_{4f} = 0,$
 $Y_{2d} = Y_{3d}, Y_{2e} = Y_{3e}, Y_{2f} = -Y_{3f}.$

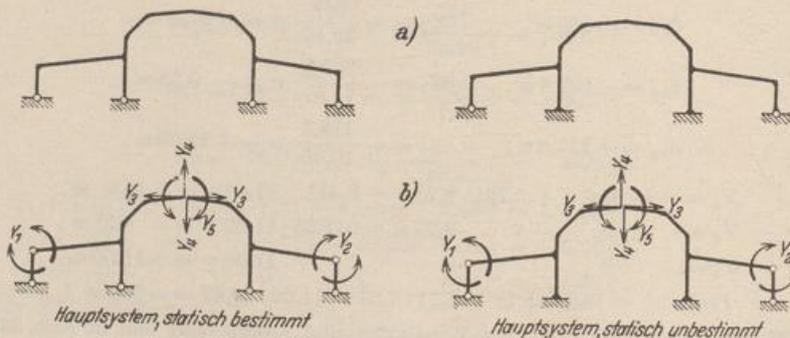


Abb. 267.

c) Behälterrahmen nach Abb. 266 (zwei Symmetrieachsen).

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e	X_f	X_g	X_h	X_i	X_k	X_l	X_m
Y_1	1	1	1	1	Y_{1e}	Y_{2f}	Y_{3g}	Y_{4h}	Y_{1i}	Y_{2k}	Y_{3l}	Y_{4m}
Y_2	1	1	-1	-1	Y_{1e}	Y_{2f}	$-Y_{3g}$	$-Y_{4h}$	Y_{1i}	Y_{2k}	$-Y_{3l}$	$-Y_{4m}$
Y_3	1	-1	-1	1	Y_{1e}	$-Y_{2f}$	$-Y_{3g}$	Y_{4h}	Y_{1i}	$-Y_{2k}$	$-Y_{3l}$	Y_{4m}
Y_4	1	-1	1	-1	Y_{1e}	$-Y_{2f}$	Y_{3g}	$-Y_{4h}$	Y_{1i}	$-Y_{2k}$	Y_{3l}	$-Y_{4m}$
Y_5					1	1	1	1	Y_{5i}	Y_{6k}	Y_{7l}	Y_{8m}
Y_6					1	1	-1	-1	Y_{5i}	Y_{6k}	$-Y_{7l}$	$-Y_{8m}$
Y_7					1	-1	-1	1	Y_{5i}	$-Y_{6k}$	$-Y_{7l}$	Y_{8m}
Y_8					1	-1	1	-1	Y_{5i}	$-Y_{6k}$	Y_{7l}	$-Y_{8m}$
Y_9									1	1	1	1
Y_{10}									1	1	-1	-1
Y_{11}									1	-1	-1	1
Y_{12}									1	-1	1	-1

Die Abkürzung des Ansatzes bei Symmetrie des Tragwerks und Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme wird mit der einheitlichen Untersuchung der Binder der dreischiffigen Hallen Abb. 267 und 268 gezeigt, deren Riegelzug unter Wahrung symmetrischer Anordnung beliebig geformt sein kann. Die Hauptsysteme zählen fünf statisch unbestimmte Schnittkräfte $Y_1 \dots Y_5$, deren Lage und Sinn aus den Abbildungen hervorgeht.

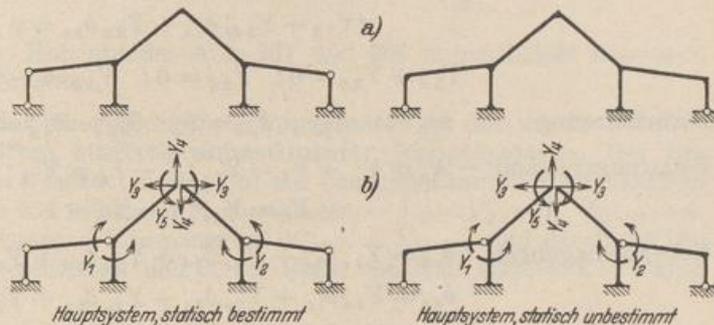


Abb. 268.

Beziehung zwischen den statisch unbestimmten Schnittkräften und den überzähligen Gruppenlasten.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	Y_{1b}	Y_{1c}	Y_{1d}	Y_{1e}
Y_2	1	-1	Y_{2c}	Y_{2d}	Y_{2e}
Y_3			1	Y_{3d}	Y_{3e}
Y_4				1	Y_{4e}
Y_5					1

Belastungszustand $-X_a = 1: -Y_1 = 1; -Y_2 = 1; Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0.$
 Formänderung $\delta_{1a} = \delta_{2a}; \delta_{3a}; \delta_{4a} = 0; \delta_{5a}.$

Belastungszustand $-X_b = 1: -Y_1 = Y_{1b}; -Y_2 = -1; Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0.$
 Nebenbedingung $\delta_{ba} = Y_{1b} \delta_{1a} + Y_{2b} \delta_{2a} = 0; Y_{1b} = 1.$
 Formänderung $\delta_{1b} = -\delta_{2b}; \delta_{3b} = 0; \delta_{4b}; \delta_{5b} = 0.$

Belastungszustand $-X_c = 1: -Y_1 = Y_{1c}; -Y_2 = Y_{2c}; -Y_3 = 1; Y_4 = Y_5 = 0.$
 Nebenbedingungen $\delta_{cb} = Y_{1c} \delta_{1b} + Y_{2c} \delta_{2b} + 1 \delta_{3b} = 0,$
 $\delta_{ca} = Y_{1c} \delta_{1a} + Y_{2c} \delta_{2a} + 1 \delta_{3a} = 0,$
 $(Y_{1c} - Y_{2c}) \delta_{1b} = 0,$
 $(Y_{1c} + Y_{2c}) \delta_{1a} + 1 \delta_{3a} = 0,$
 $Y_{1c} = Y_{2c} = -\frac{\delta_{3a}}{2 \delta_{1a}}.$

Formänderung $\delta_{1c} = \delta_{2c}; \delta_{3c}; \delta_{4c} = 0; \delta_{5c}.$

Belastungszustand $-X_d = 1: -Y_1 = Y_{1d}; -Y_2 = Y_{2d}; -Y_3 = Y_{3d};$
 $-Y_4 = 1; Y_5 = 0.$

Nebenbedingungen $\delta_{da} = Y_{1d} \delta_{1a} + Y_{2d} \delta_{2a} + Y_{3d} \delta_{3a} + 1 \delta_{4a} = 0,$
 $\delta_{db} = Y_{1d} \delta_{1b} + Y_{2d} \delta_{2b} + Y_{3d} \delta_{3b} + 1 \delta_{4b} = 0,$
 $\delta_{da} = Y_{1d} \delta_{1a} + Y_{2d} \delta_{2a} + Y_{3d} \delta_{3a} + 1 \delta_{4a} = 0,$
 $(Y_{1d} + Y_{2d}) \delta_{1c} + Y_{3d} \delta_{3c} = 0,$
 $(Y_{1d} - Y_{2d}) \delta_{1b} + 1 \delta_{4b} = 0,$
 $(Y_{1d} + Y_{2d}) \delta_{1a} + Y_{3d} \delta_{3a} = 0,$
 $Y_{1d} + Y_{2d} = 0; Y_{3d} = 0; Y_{1d} = -Y_{2d} = -\frac{\delta_{4b}}{2 \delta_{1b}}.$

Formänderung $\delta_{1d} = -\delta_{2d}; \delta_{3d} = 0; \delta_{4d}; \delta_{5d} = 0.$

Belastungszustand $-X_e = 1: -Y_1 = Y_{1e}; -Y_2 = Y_{2e}; -Y_3 = Y_{3e};$
 $-Y_4 = Y_{4e}; -Y_5 = 1.$

Nebenbedingungen $\delta_{ea} = Y_{1e} \delta_{1a} + Y_{2e} \delta_{2a} + Y_{3e} \delta_{3a} + Y_{4e} \delta_{4a} + 1 \delta_{5a} = 0,$
 $\delta_{ec} = Y_{1e} \delta_{1c} + Y_{2e} \delta_{2c} + Y_{3e} \delta_{3c} + Y_{4e} \delta_{4c} + 1 \delta_{5c} = 0,$
 $\delta_{eb} = Y_{1e} \delta_{1b} + Y_{2e} \delta_{2b} + Y_{3e} \delta_{3b} + Y_{4e} \delta_{4b} + 1 \delta_{5b} = 0,$
 $\delta_{ea} = Y_{1e} \delta_{1a} + Y_{2e} \delta_{2a} + Y_{3e} \delta_{3a} + Y_{4e} \delta_{4a} + 1 \delta_{5a} = 0,$
 $(Y_{1e} - Y_{2e}) \delta_{1a} + Y_{4e} \delta_{4a} = 0,$
 $(Y_{1e} + Y_{2e}) \delta_{1c} + Y_{3e} \delta_{3c} + 1 \delta_{5c} = 0,$
 $(Y_{1e} - Y_{2e}) \delta_{1b} + Y_{4e} \delta_{4b} = 0,$
 $(Y_{1e} + Y_{2e}) \delta_{1a} + Y_{3e} \delta_{3a} + 1 \delta_{5a} = 0,$
 $Y_{1e} - Y_{2e} = 0; Y_{4e} = 0; Y_{1e} = +Y_{2e},$
 $2Y_{1e} \delta_{1c} + Y_{3e} \delta_{3c} = -\delta_{5c},$
 $2Y_{1e} \delta_{1a} + Y_{3e} \delta_{3a} = -\delta_{5a},$
 $Y_{1e} = \frac{-\delta_{5c} \delta_{3a} + \delta_{5a} \delta_{3c}}{2(\delta_{1c} \delta_{3a} - \delta_{1a} \delta_{3c})}; Y_{3e} = \frac{-\delta_{1c} \delta_{5a} + \delta_{1a} \delta_{5c}}{2(\delta_{1c} \delta_{3a} - \delta_{1a} \delta_{3c})}.$

Das Ergebnis wird in der folgenden Matrix zusammengefaßt.

	X_a	X_b	X_c	X_d	X_e
Y_1	1	1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$-\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_2	1	-1	$-\frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}}$	$+\frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}}$	Y_{1e}
Y_3			1	0	Y_{3e}
Y_4				1	0
Y_5					1

Sie liefert die überzähligen Schnittkräfte nach (467)

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= X_a + X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c - \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e, \\
 Y_2 &= X_a - X_b - \frac{\delta_{3a}}{2\delta_{1a}} X_c + \frac{\delta_{4b}}{2\delta_{1b}} X_d + Y_{1e} X_e, \\
 Y_3 &= X_c + Y_{3e} X_e, \\
 Y_4 &= X_d, \\
 Y_5 &= X_e.
 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Hallenbinder Abb. 267 und 268 unterscheidet sich demnach nur durch die Vorzeichen.

Die Beziehungen der überzähligen Gruppenlasten zu den statisch unbestimmten Schnittkräften statisch unbestimmter Hauptssysteme. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ besteht nach (475) aus den unbekanntem Schnittkräften $Y_{A_i}, \dots, Y_{(J-1)_i}$ und den frei wählbaren Komponenten $-Y_j = Y_{j_i} = 1, Y_{(j+1)_i} = 0, \dots, Y_{N_i} = 0$. Die unbekanntem Komponenten $Y_{A_i}, \dots, Y_{(j-1)_i}$ sind durch die Bedingungen $\delta_{ik} = 0$ vorgeschrieben und in der Regel von Null verschieden. Daher sind mit

$$1_i \delta_{ik} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{H_i} \delta_{Hk} = 0, \quad i = a, \dots, (k-1) \quad (480)$$

alle Verschiebungen δ_{H_i} ($H = A, \dots, J-1$) Null. Der Verschiebungszustand des Hauptsystems infolge von $-X_i = 1$ erfüllt also die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen eines $(i-1)$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der Belastungszustand $-X_i = 1$ im statisch bestimmten Hauptsystem ist also identisch mit dem Belastungszustand $-Y_i = 1$ des $(i-1)$ -fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Daher ist

$$Y_j^{(i)} = \frac{\delta_{j_0}^{(i-1)}}{\delta_{j_j}^{(i-1)}} = \frac{\sum_{H=A}^{H=J} Y_{H_i} \delta_{H0}}{\sum_{H=A}^{H=J} Y_{H_i} \delta_{Hj}} = \frac{1_i \delta_{i0}}{1_i \delta_{ij}} = X_i. \quad (481)$$

Die überzähligen Gruppenlasten $X_a \dots X_k \dots X_n$ erhalten damit die Bedeutung

von statisch unbestimmten Einzelkräften $Y_A^{(1)} \dots Y_K^{(k)} \dots Y_N^{(n)}$, welche die Belastung \mathfrak{B} in Hauptsystemen von Eins aus ansteigenden Grades hervorruft. Die Gruppenlast X_i kann daher für eine ruhende Belastung auch folgendermaßen angegeben werden:

$$X_i = Y_i^{(i)} = \frac{\int N_i^{(0)} N_i^{(i-1)} \frac{ds}{EF} + \int M_i^{(0)} M_i^{(i-1)} \frac{ds}{EJ} + \int N_i^{(i-1)} \alpha_i ds + \int M_i^{(i-1)} \frac{\alpha_i \Delta t}{h} ds - \sum C_{e_i}^{(i-1)} \Delta_e}{\int N_i^{(0)} N_i^{(i-1)} \frac{ds}{EF} + \int M_i^{(0)} M_i^{(i-1)} \frac{ds}{EJ}}$$

Ihre mit $\delta_{it} = \delta_{ij}^{(i-1)}$ ($i = a \dots n, j = A \dots N$) erweiterten Einflußlinien sind die Biegelinien $\delta_{mA}^{(0)} \dots \delta_{mJ}^{(i-1)} \dots \delta_{mN}^{(n-1)}$ der Lastgurte von Hauptsystemen von Eins aus ansteigender statischer Unbestimmtheit für $-Y_A^{(1)} = 1 \dots -Y_J^{(j)} = 1 \dots -Y_N^{(n)} = 1$. Nach Maxwell ist

$$1_m \delta_{mJ}^{(i-1)} = 1_m \delta_{m_i}^{(0)} = \sum Y_{H_i} \delta_{Hm} = \sum_{H=A}^{H=J} Y_{H_i} \delta_{mH}^{(0)}. \quad (482)$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_J ergeben sich durch Superposition

$$Y_J = X_i + \sum_{i+1}^n Y_{Jk} X_k = Y_J^{(i)} + \sum_{J+1}^N Y_{Jk} Y_K^{(k)}. \quad (483)$$

Derselbe Ansatz gilt für die Einflußlinien. Für ein sechsfach statisch unbestimmtes Stabwerk ist daher mit $J = 1 \dots 6$

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= +1 \frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} + Y_{1b} \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} + Y_{1c} \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} + Y_{1d} \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{1e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{1f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ Y_2 &= \quad + 1 \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} + Y_{2c} \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} + Y_{2d} \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{2e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{2f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ Y_3 &= \quad \quad + 1 \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} + Y_{3d} \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{3e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{3f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ Y_4 &= \quad \quad \quad + 1 \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{4e} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{4f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ Y_5 &= \quad \quad \quad \quad + 1 \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} + Y_{5f} \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ Y_6 &= \quad \quad \quad \quad \quad + 1 \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \end{aligned} \right\} \quad (484)$$

Die Parameter Y_{Jk} sind nach S. 285:

$$\begin{aligned} -Y_{1b} &= \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}}; \quad -Y_{2c} = \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad -Y_{3d} = \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}; \quad -Y_{4e} = \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}; \quad -Y_{5f} = \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}}; \\ -Y_{1c} &= \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} + Y_{2c} \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad \dots \quad -Y_{4f} = \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} + Y_{5f} \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} = \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}, \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} Y_5 &= \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot Y_6; \quad Y_4 = \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \left[\frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \right] \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ &= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \left[\frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \right] - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \\ &= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_6. \end{aligned}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte lassen sich daher folgendermaßen umformen:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{\delta_{10}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{12}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_2 - \frac{\delta_{13}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_3 - \frac{\delta_{14}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_4 - \frac{\delta_{15}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{16}^{(0)}}{\delta_{11}^{(0)}} \cdot Y_6 \\ Y_2 &= \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_3 - \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_4 - \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{26}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}} \cdot Y_6 \\ Y_3 &= \frac{\delta_{30}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_4 - \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{36}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}} \cdot Y_6 \\ Y_4 &= \frac{\delta_{40}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_5 - \frac{\delta_{46}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}} \cdot Y_6 \\ Y_5 &= \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot 1 - \frac{\delta_{56}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}} \cdot Y_6 \\ Y_6 &= \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}} \cdot 1 \end{aligned} \right\} (485)$$

Die Lösung ist damit auf die reduzierte Matrix eines sechsfach statisch unbestimmten Systems zurückgeführt und auf diese Weise der Anschluß an die allgemeine Auflösung gefunden.

Die Formänderungsenergie des vorgegebenen Tragwerks kann nach dem Clapeyronschen Gesetz durch die äußeren Kräfte ausgedrückt werden. Sie zerfällt, bezogen auf das Hauptsystem, in zwei Teile, die von der Belastung \mathfrak{P} und den statisch überzähligen Größen Y_K oder X_k herrühren:

$$A_t = \frac{1}{2} \sum P_m \delta_m^{(0)} - \frac{1}{2} \sum Y_K \delta_{K0} = \frac{1}{2} \sum P_m \delta_m^{(0)} - \frac{1}{2} \sum X_k \delta_{k0}$$

($K = A \dots N, k = a \dots n$).

Daher ist

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum X_k \delta_{k0}$$

und mit den bereits bekannten Beziehungen (481)

$$\delta_{k0} = \frac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}}, \quad X_k = \frac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}} \quad \text{und} \quad \delta_{K0} = \sum Y_H \delta_{KH},$$

$$\sum Y_K \delta_{K0} = \sum \frac{(\delta_{K0}^{(k-1)})^2}{\delta_{KK}^{(k-1)}} = \sum Y_K^{(k)} \delta_{K0}^{(k-1)} = \sum_K \sum_H Y_K Y_H \delta_{KH} \quad (K = A \dots N, H = A \dots N). \quad (486)$$

Der Ansatz eignet sich nach S. 229 zur Nachprüfung der nach irgendeiner Elimination berechneten Wurzeln Y_K .

Müller, S.: Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. Zbl. Bauverw. 1907 S. 23. — Müller-Breslau, H.: Die Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Abt. Stuttgart 1922. — Hertwig, A.: Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme und verwandter Aufgaben in der Statik der Baukonstruktionen. Z. Bauwes. 1910 S. 487. — Pirlet, J.: Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1910 S. 331. — Derselbe: Verwendung vereinfachter Elastizitätsgleichungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1915 S. 167. — Derselbe: Kompendium der Statik der Baukonstruktionen Bd. 2, 1. Teil. Berlin 1921. — Kaufmann, W.: Statik. Handbibl. f. Bauing. Berlin 1923. — Grüning, M.: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Berlin 1923. — Derselbe: Elastizitätsgleichungen gegenseitiger Unabhängigkeit. Eisenbau 1921 S. 305.

37. Die Verwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme.

Von den n statisch unbestimmten Schnittkräften eines Stabwerks gelten h als überzählig. Sie werden durch äußere Kräfte X_i ($i = 1 \dots h$) ersetzt und aus ebenso vielen geometrischen Bedingungen für den Verschiebungszustand des $(n-h) = r$ fach statisch unbestimmten Hauptsystems berechnet, da die relativen Verschiebungen

($i = 1 \dots h$) im vorgegebenen Tragwerk Null sind. Nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$M = M_{\otimes}^{(n-h)} - \sum X_k M_k^{(n-h)} \quad (k = 1 \dots h), \quad (487)$$

$$\delta_i = \delta_{i\otimes}^{(n-h)} - \sum_{k=1}^h X_k \delta_{ik}^{(n-h)} = 0 \quad (i = 1 \dots h). \quad (488)$$

Die Belastung \mathfrak{P} , die Temperaturänderung t und die Stützenbewegung Δ_e erzeugen Schnittkräfte $M_{\otimes}^{(n-h)}$ und Verschiebungen $\delta_{i\otimes}^{(n-h)}$, die äußeren Kräfte $-X_k = 1$ Schnittkräfte $M_k^{(n-h)}$ und Verschiebungen $\delta_{ik}^{(n-h)}$. Sie können bei zahlreichen Aufgaben nach Tabellen eingesetzt, bei anderen nach (311) berechnet werden. Darnach ist

$$\left. \begin{aligned} 1_i^{(n-h)} \delta_{i\otimes}^{(n-h)} &= \int M_i^{(n-h)} M_{\otimes}^{(0)} \frac{J_e}{J} ds + \int N_i^{(n-h)} \alpha_i t ds - \sum C_{ei}^{(n-h)} \Delta_e, \\ 1_i^{(n-h)} \delta_{ik}^{(n-h)} &= \int M_i^{(0)} M_k^{(n-h)} \frac{J_e}{J} ds = \int M_i^{(n-h)} M_k^{(0)} \frac{J_e}{J} ds. \end{aligned} \right\} \quad (489)$$

Die Genauigkeit dieser Vorzahlen ist oft wegen der Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes für die Brauchbarkeit des Ergebnisses von großer Bedeutung, so daß die zuverlässige Berechnung der Spannungszustände $M_{\otimes}^{(n-h)}$, $M_i^{(n-h)}$ des Hauptsystems aus den äußeren Ursachen und den Kräften $-X_i = 1$ durch den Nachweis der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung zu prüfen ist.

Die Schnittkräfte $M_{\otimes}^{(0)}$, $M_i^{(0)}$, $M_k^{(0)}$ werden durch die Belastung \mathfrak{P} und die äußeren Kräfte $-X_i = 1$, $-X_k = 1$ in einem beliebig gegliederten statisch bestimmten Hauptsystem hervorgerufen, das in dem $(n-h)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystem enthalten ist. Es liegt nahe, dabei diejenige Form zu wählen, welche einfache, wenig fehlerempfindliche Rechnungen und daher auch genaue Ergebnisse $\delta_{i\otimes}^{(n-h)}$, $\delta_{ik}^{(n-h)}$ verbürgt. Die Einflußlinien der überzähligen Schnittkräfte X_i werden mit $\delta_{i0}^{(n-h)} = \delta_{im}^{(n-h)} = \delta_{mi}^{(n-h)}$ aus den Biegelinien des Laststabszuges des Hauptsystems und daher ebenfalls aus den Schnittkräften $M_i^{(n-h)}$ entwickelt.

Die überzähligen Größen X_i ergeben sich nach diesen Vorarbeiten durch die Auflösung der h linearen Gleichungen (488). In der Regel wird die zu den Vorzahlen $\delta_{ik}^{(n-h)}$ konjugierte Matrix β_{ik} bestimmt und

$$X_i = \sum_{k=1}^h \beta_{ik} \delta_{k\otimes}^{(n-h)} \quad (i = 1 \dots h) \quad (490)$$

berechnet. Dabei gelten alle Bemerkungen des Abschnitts 25 für die Auflösung der Ansätze aus statisch bestimmten Hauptsystemen. Ebenso ist selbstverständlich, daß Gruppenlasten X_i an Stelle von statisch unbestimmten Schnittkräften verwendet und nach Abschn. 36 unabhängig voneinander angegeben werden können. Der Ansatz (488) läßt sich daher auf das statisch bestimmte Hauptsystem zurückführen, in welchem auch die übrigen $(n-h) = r$ überzähligen Schnittkräfte X_c des Tragwerks als äußere Kräfte wirken. Diese werden zur leichteren Unterscheidung mit Y_c bezeichnet. Darnach ist

$$\left. \begin{aligned} M &= M_{\otimes}^{(n-h)} - \sum_{i=1}^h M_i^{(n-h)} X_i = M_{\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h X_i \left\{ M_i^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} \right\}, \\ &= M_{\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} (Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h Y_{\sigma}^{(r)} X_i) - \sum_{i=1}^h M_i^{(0)} X_i = M_{\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r M_{\sigma}^{(0)} X_{\sigma}, \\ 0 &= \delta_{k\otimes}^{(n-h)} - \sum_{i=1}^h X_i \delta_{ki}^{(n-h)} = \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h X_i \left\{ \delta_{ki}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} Y_{\sigma}^{(r)} \right\} \\ &= \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} (Y_{\sigma}^{(r)} - \sum_{i=1}^h Y_{\sigma}^{(r)} X_i) - \sum_{i=1}^h \delta_{ki}^{(0)} X_i = \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^r \delta_{k\sigma}^{(0)} X_{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (491)$$

Die geometrischen Bedingungen (488) für den Verschiebungszustand des statisch unbestimmten Hauptsystems stimmen nach dieser Ableitung mit denjenigen des statisch bestimmten Hauptsystems überein.

Diese algebraischen Beziehungen werden bei der Berechnung eines Ansatzes mit n Unbekannten in zwei Stufen verwendet. Die Zerlegung richtet sich nach der Struktur der Matrix. Werden die überzähligen Größen $X_1 = Y_1, \dots, X_{n-h} = Y_R$ in der ersten Stufe zusammengefaßt, so gehören die übrigen Schnittkräfte $X_i (1 \dots h)$ der Gleichungen 1 bis r zunächst zu den Belastungsgliedern. Damit ist

$$X_c = Y_c = Y_{c\otimes}^{(r)} - \sum_{k=1}^h Y_{c\otimes k}^{(r)} X_k \quad (492)$$

und die Normalgleichung i^k der zweiten Stufe

$$\left. \begin{aligned} \sum_{c=1}^h (Y_{c\otimes}^{(r)} - \sum_{k=1}^h Y_{c\otimes k}^{(r)} X_k) \delta_{ic}^{(0)} + \sum_{k=1}^h X_k \delta_{ik}^{(0)} &= \delta_{i\otimes}^{(0)}, \\ \sum_{k=1}^h (\delta_{ik}^{(0)} - \sum_{c=1}^r \delta_{ic}^{(0)} Y_{c\otimes k}^{(r)}) X_k &= \delta_{i\otimes}^{(0)} - \sum_{c=1}^r \delta_{ic}^{(0)} Y_{c\otimes}^{(r)}, \\ \sum_{k=1}^h \delta_{ik}^{(n-h)} X_k &= \delta_{i\otimes}^{(n-h)}. \end{aligned} \right\} \quad (493)$$

Die Auflösung des Ansatzes in zwei Stufen ist daher gleichbedeutend mit der Verwendung eines statisch unbestimmten Hauptsystems. Sie bringt stets Vorteile für die Rechnung, wenn die statisch unbestimmten Schnittkräfte der ersten Stufe durch Tabellen bekannt sind oder aus drei- und fünfgliedrigen Gleichungen berechnet werden können. Entscheidend sind Abkürzung und geringe Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Am meisten werden Rahmen, eingespannte Träger und durchgehende Träger mit starren, oder elastisch drehbaren Stützen als statisch unbestimmte Hauptsysteme verwendet.

Berechnung eines Hallenrahmens.

1. Geometrische Grundlagen: ($n = E_d/E_s = 10$) Abb. 269.

$$\begin{aligned} J_1 &= 0,0213 \text{ m}^4; & J_2 &= 0,0417 \text{ m}^4 = J_c; & F_z &= 0,008 \text{ m}^2, \\ J_c/J_1 &= J_2/J_1 = 1,95775; & J_c/n F_c &= J_2/n F_z = 0,52125, \\ l &= 18,00 \text{ m}, & l_1 &= 5,00 \text{ m}, & f &= 3,00 \text{ m}, \\ h &= 12,00 \text{ m} = h', & h_1 &= 3,00 \text{ m}, & h_2 &= 9,00 \text{ m} = h_2', \\ s &= 9,487 \text{ m}, & s_1 &= 2,635 \text{ m}, & s_2 &= 6,852 \text{ m}, \\ s' &= 18,573 \text{ m}, & s_1' &= 5,159 \text{ m}, & s_2' &= 13,414 \text{ m}. \end{aligned}$$

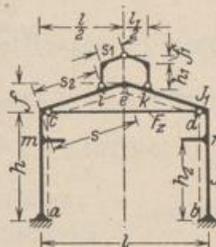


Abb. 269.

2. Hauptsystem. Das Hauptsystem Abb. 270a ist der dreifach statisch unbestimmte Rahmen. Die Längskraft des Zugbandes als überzählige Größe beträgt nach (488) und (311):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(3)}}{\delta_{11}^{(3)}} = \frac{\int M_0^{(0)} M_1^{(3)} \frac{J_c}{J} ds}{\int M_1^{(0)} M_1^{(3)} \frac{J_c}{J} ds + \frac{J_c}{n F_z} 1,0^2 l}$$

Hilfswerte zur Berechnung von $M_0^{(3)}$ aus der Belastung und von $M_1^{(3)}$ aus $-X_1 = 1$ (Abb. 271) mit den Tabellen des Abschn. 61:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1,50000, & \kappa &= 0,64610, & \mu &= 5,92016, & \psi_1 &= 8,31154, \\ \varphi &= 0,25000, & \varrho &= 0,83848, & \nu &= 5,87660, & \psi_2 &= 6,13058, \\ H_{d1}^{(3)} &= -2 \frac{-1}{2} \left[\frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848}{3 \cdot 5,87660} (2 \cdot 0,25 \cdot 8,31154 + 3) \right] = + 0,16892 \text{ t}, \\ M_{d1}^{(3)} &= 2 \frac{-1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25}{3 \cdot 5,92016} (2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848 + 3) = -1,15512 \text{ mt}, \\ M_{c1}^{(3)} &= -1,15512 + 0,16892 \cdot 12,0 = + 0,87192 \text{ mt}, \\ M_{c1}^{(3)} &= -1,15512 - (0,16892 - 1,0) 3,0 = + 1,33812 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Zugeordnetes statisch bestimmtes Hauptsystem: Balken auf 2 Stützen. $M_1^{(0)}$ aus $-X_1 = 1$ (Abb. 270 b).

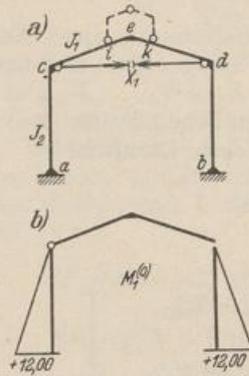


Abb. 270.

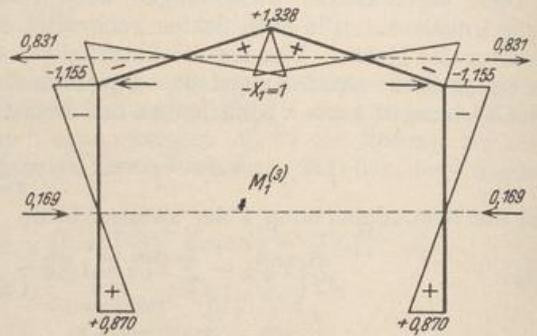


Abb. 271.

$$3. \delta_{11}^{(3)} = 2 \cdot 12,00 \cdot \frac{1}{8} 12,00 (2 \cdot 0,87192 - 1,15512) + 0,52125 \cdot 1,0^2 \cdot 18,0 = 37,641.$$

4. Schnittkräfte im vorgelegten Tragwerk

$$C = C_0^{(3)} - X_1 C_1^{(3)}; \quad M = M_0^{(3)} - X_1 M_1^{(3)}.$$

a) Belastung aus Eigengewicht der Laterne: $p_1 = 2,0 \text{ t/m}$ (Abb. 272 a).

$$P = 2,0 \cdot 5,0/2 = 5,0 \text{ t}; \quad \xi = 0,36111; \quad \xi' = 0,63889;$$

$$W = \frac{2,0 \cdot 5,0^2}{8 \cdot 3,833} = 1,631 \text{ t}; \quad \zeta = 0,7222; \quad \zeta' = 0,27787;$$

$$M_{k1}^{(3)} = \left(1,33812 - \frac{1,33812 + 1,15512}{18,00} \cdot 5,00 \right) = 0,64555;$$

$$\delta_{10}^{(3)} = 2 \left[\frac{18,573}{6} \cdot 45,00 (2 \cdot 1,33812 - 1,15512) - \frac{5,159}{6} 11,1417 (2 \cdot 1,33812 + 0,64555) \right] = 360,131;$$

$$X_1 = \frac{360,131}{37,6411} = 9,5675 \text{ t}.$$

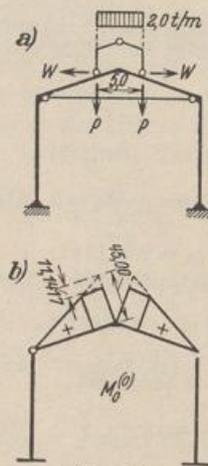


Abb. 272.

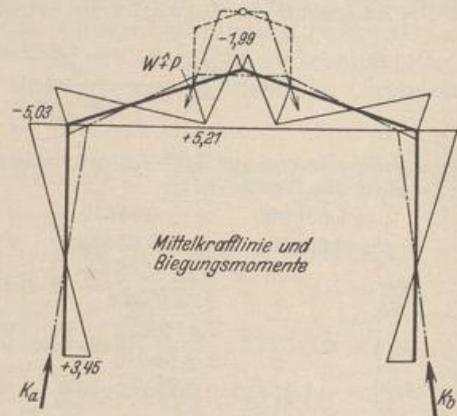


Abb. 273.

Nach Abschn. 61 wird:

aus P: $H''_{a0}^{(3)} = 2 \cdot 5,0 \cdot \frac{1,5 \cdot 0,83848}{3 \cdot 0,66667} \cdot 0,36111 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 4 \cdot 0,36111^2) + 6 \cdot 0,63889];$

aus W: $H''_{b0}^{(3)} = -2 \cdot \frac{-1,631}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,83848}{3 \cdot 5,92016} \cdot 0,27778^2 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 0,27778) + 3];$

$H_a = H''_{a0}^{(3)} + H''_{b0}^{(3)} - X_1 H''_{d1}^{(3)} = 2,29717 + 0,02571 - 9,5675 \cdot 0,16892 = 0,70674 \text{ t};$

aus P: $M''_{d0}^{(3)} = -2 \cdot 5,0 \cdot 18,0 \cdot 0,36111 \cdot \frac{1}{3 \cdot 5,92016} [0,25 \cdot 0,83848 (3 - 4 \cdot 0,36111^2) + 6 \cdot 0,63889];$

aus W: $M''_{d0}^{(3)} = 2 \cdot \frac{-1,631 \cdot 12,0}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 0,27778^2}{3 \cdot 5,92016} [0,25 \cdot 0,83848 (3 - 0,27778) + 3];$

$M_d = M''_{d0}^{(3)} + M''_{d0}^{(3)} - X_1 M''_{d1}^{(3)} = -15,93064 - 0,15181 + 9,5675 \cdot 1,15512 = -5,03084 \text{ mt};$

$M_a = M_d + H_a \cdot h = +3,45004 \text{ mt (Abb. 273).}$

b) Einseitige Belastung des Daches: $p_2 = 3,0 \text{ t/m (Abb. 274a).}$

$Q = 3,0 \cdot 6,5 = 19,5 \text{ t}; \quad \xi = 0,36111; \quad \xi' = 0,63889.$

Aufspaltung der Belastung in einen symmetrischen und einen antimetrischen Lastanteil.
Symmetrischer Anteil: (Abb. 274b).

${}^{(1)}\delta_{10}^{(3)} = 2 \left[\frac{5,159}{2} \cdot 31,687 (1,33812 + 0,64555) + 13,414 \cdot \frac{1}{12} \cdot 31,687 (5 \cdot 0,64555 - 3 \cdot 1,15512) \right] = 307,4443.$

Antimetrischer Anteil: ${}^{(2)}\delta_{10}^{(3)} = 0;$

$\delta_{10}^{(3)} = {}^{(1)}\delta_{10}^{(3)}; \quad X_1 = \frac{307,4443}{37,6411} = 8,16779 \text{ t};$

$H_b = \frac{3,0 \cdot 18,0}{6} \cdot \frac{0,83848 \cdot 1,5}{5,92016} \cdot 0,36111^2 [0,25 \cdot 8,31154 (3 - 2 \cdot 0,36111^2) + 2 (3 - 2 \cdot 0,36111)] - 8,1677 \cdot 0,16892 = 1,17529 \text{ t};$

$M_d = -\frac{3,0 \cdot 18,0^2}{6} \cdot 0,36111^2 \left[\frac{1}{5,92016} \left\{ 0,25 \cdot 0,83848 (3 - 2 \cdot 0,36111^2) + 2 (3 - 2 \cdot 0,36111) \right\} \pm \frac{3}{5,87660} \cdot 0,63889^2 \right] + 8,16779 \cdot 1,15512;$

$M_e = -13,27163 \text{ mt}; \quad M_d = -4,46766 \text{ mt}; \quad M_a = +0,83185 \text{ mt}; \quad M_b = +9,63582 \text{ mt}; \quad M_e = -5,21143 \text{ mt}; \quad M_i = +10,15379 \text{ mt. (Abb. 275.)}$

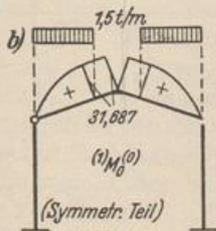
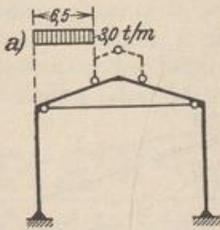


Abb. 274.

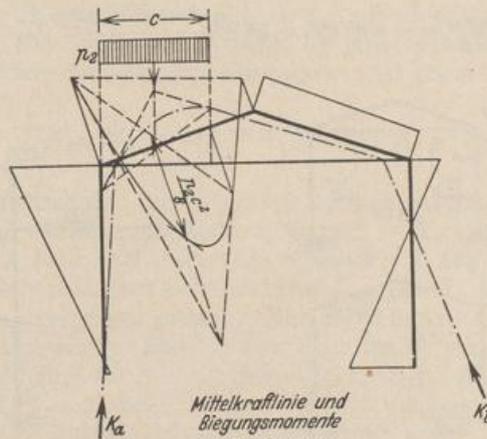


Abb. 275.

c) Gleichförmige Belastung durch Wind am Pfosten: $w = 0,75 \text{ t/m}$ (Abb. 276a).

$$\delta_{10}^{(0)} = -\frac{12,0}{12,0} 54,00 (3 \cdot 0,87192 - 1,15512) = -78,8746;$$

$$X_1 = -\frac{78,8746}{37,6411} = -2,09544 \text{ t};$$

$$H_b = -\frac{0,75 \cdot 12,0}{2} \left[\pm 1 + 1 - \frac{0,6461 \cdot 0,83848}{6 \cdot 5,92016} (3 \cdot 8,31154 - 4) \right] + 2,09544 \cdot 0,16892;$$

$$M_a = -\frac{0,75 \cdot 12,0^2}{12,0} 0,64610 \left(\frac{3 \cdot 0,83848 - 4}{5,92016} \mp \frac{6}{5,8766} \right) - 2,09544 \cdot 1,15512;$$

$$\begin{aligned} H_a &= -7,90548 \text{ t}; & H_b &= 1,09452 \text{ t}; & M_c &= 4,97468 \text{ mt}; \\ M_a &= -6,89935 \text{ mt}; & M_b &= -35,89108 \text{ mt}; & M_b &= 6,23489 \text{ mt}. \end{aligned} \quad (\text{Abb. 277.})$$

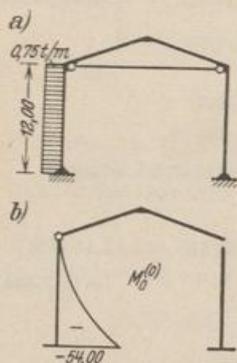


Abb. 276.

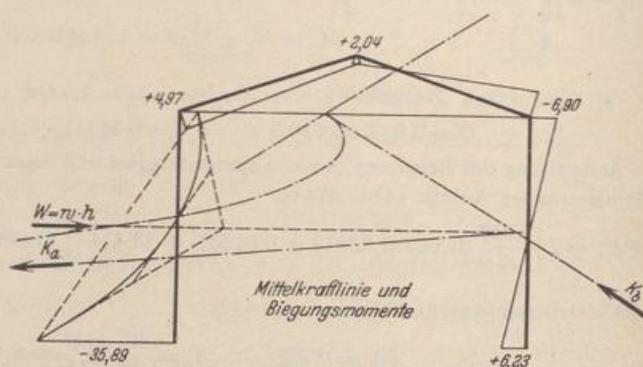


Abb. 277.

d) Belastung bei ungünstiger Stellung der Katze des Laufkrans (Abb. 278a).

$$M_i = 13,50 \text{ mt}; \quad M_r = 2,25 \text{ mt}; \quad \eta = 0,7500; \quad \eta' = 0,2500;$$

$$\delta_{10}^{(0)} = -9,00 \cdot \frac{1}{2} (13,50 + 2,25) (0,87192 - 0,64836) = -15,84482;$$

$$X_1 = -\frac{15,84482}{37,64106} = -0,42095 \text{ t};$$

$$H_b = \frac{13,50 + 2,25}{12,00} \cdot \frac{0,6461 \cdot 0,83848}{5,92016} 0,75 [8,31154 (2 - 0,75) - 2] + 0,42095 \cdot 0,16892 = 0,82679 \text{ t};$$

$$M_a^{(3)} = -\kappa \eta \left[(M_i + M_r) \frac{q(2-\eta)-2}{\mu} \mp (M_i - M_r) \frac{3}{\nu} \right];$$

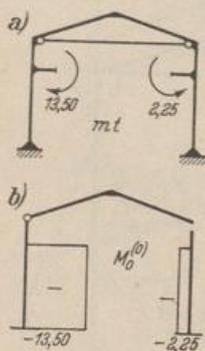


Abb. 278.

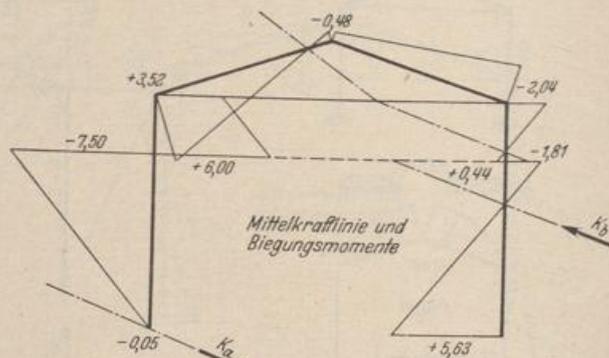


Abb. 279.

$$M_c = -0,64610 \cdot 0,75 \left[(13,50 + 2,25) \frac{0,83848 (2 - 0,75) - 2}{5,92016} \mp (13,50 - 2,25) \frac{3}{5,87660} \right] - 0,42095 \cdot 1,15512;$$

$$M_e = + 3,52393 \text{ mt}; \quad M_d = - 2,04209 \text{ mt};$$

$$M_a = - 0,05459 \text{ mt}; \quad M_b = + 5,62939 \text{ mt}. \quad (\text{Abb. 279.})$$

5. Nachprüfung der Ergebnisse. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung eines Querschnitts k mit N_k, M_k oder Q_k als äußere Kraft ist für den berechneten Spannungszustand gleich Null:

Beispiel: Belastung (4b) (Abb. 274a).

α) Gegenseitige Verdrehung des Querschnitts e (Abb. 280a):

$$\tau = \int M \bar{M}_M \frac{J_c}{J} ds = \frac{1}{2} 12,0 (-13,2716 + 0,8319)$$

$$+ 13,414 \left[\frac{1}{2} (-13,2716 + 10,1538) + \frac{2}{3} 15,8438 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} 5,159 (10,1538 - 5,2117) + \frac{1}{2} 18,573 (-5,2117 - 4,4677)$$

$$+ \frac{1}{2} 12,0 (-4,4677 + 9,6358) = 133,522 - 133,517 \approx 0,0.$$

β) Gegenseitige vertikale Verschiebung des Querschnitts e (Abb. 280b):

$$\tau = \int M \bar{M}_V \frac{J_c}{J} ds = 12,0 \cdot 9,0 \cdot \frac{1}{2} (-13,2716 + 0,8319)$$

$$+ 13,414 \left\{ \frac{1}{6} [9,0 (-2 \cdot 13,2716 + 10,1538) \right.$$

$$+ 2,5 (-13,2716 + 2 \cdot 10,1538)] + \frac{1}{3} 15,8438 (9,0 + 2,5) \left. \right\}$$

$$+ 5,159 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2,5 (2 \cdot 10,1538 - 5,2117) + 18,573 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9,0 (2 \cdot 4,4677 + 5,2117)$$

$$- 12,0 \cdot \frac{1}{2} 9,0 (9,6358 - 4,4677) = 1241,274 - 1241,267 \approx 0,0.$$

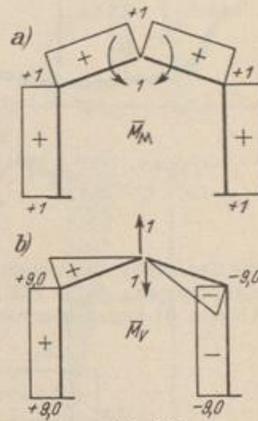


Abb. 280.

Ansätze mit statisch unbestimmten Schnittkräften und unbekanntem Verschiebungen. Die Auflösung der n linearen Gleichungen in Stufen liegt insbesondere bei Stabwerken nahe, deren Schnittkräfte abgesehen von der Belastung \mathfrak{P} als Funktion von $r = (n - f)$ statisch unbestimmten Schnittkräften und den EJ_c -fachen Beträgen f ausgezeichneter Komponenten ψ_c ($c = 1 \dots f$) des Verschiebungszustandes berechnet werden. Dies sind nach Abschn. 38 Knotenpunktverschiebungen oder Stabdrehwinkel. Nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$M = M_0^{(0)} - \sum_{h=1}^r M_h^{(0)} X_h + \sum_{H=1}^f \psi_H (M_H^{(0)} - \sum_{h=1}^r X_{hH} M_h) = M_0^{(n-f)} + \sum M_H^{(n-f)} \psi_H. \quad (494)$$

$M_0^{(0)}, M_h^{(0)}$ sind die Schnittkräfte eines statisch und durch $\psi_H = 0$ auch geometrisch bestimmten Hauptsystems für die vorgeschriebene Belastung \mathfrak{P} und $-X_h = 1$. Die Schnittkraft $M_H^{(0)}$ infolge $\psi_H = 1$ ist Null und daher die Schnittkraft $M_H^{(n-f)}$ infolge von $\psi_H = 1$ durch die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_{hH} ($h = 1 \dots r$) eines r -fach statisch unbestimmten Hauptsystems bestimmt. Zur Berechnung der n Unbekannten stehen die $(n - f) = r$ geometrischen Bedingungen über den Verschiebungszustand des Hauptsystems ($\delta_i = 0$) und die f statischen Bedingungen über das Gleichgewicht der Schnittkräfte ($\delta A_H = 0$) nach Abschn. 38 zur Verfügung. Nach der Zerlegung des Ansatzes werden die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_h in der Regel in der ersten, die ausgezeichneten Komponenten ψ_c in der zweiten

Stufe berechnet. Darnach ist

$$X_h = X_{h0} + \sum_{H=1}^I X_{hH} \psi_H. \tag{495}$$

Zur statischen Untersuchung des durchgehenden Brückenträgers Abb. 281a wird neben den statisch unbestimmten Schnittkräften der EJ_c -fache Betrag des Drehwinkels ψ_A der linken Endstütze als Unbekannte verwendet und in einer zweiten Stufe der Lösung bestimmt. Die Schnittkräfte der ersten Stufe beziehen sich dann mit $\psi_A = 0$ auf ein neunfach statisch unbestimmtes System (Abb. 281 b). In diesem werden die Stützenkopfmomente X_{k0} ($k = 1 \dots 6$)

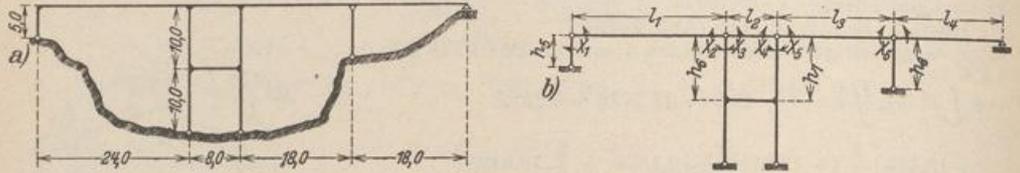


Abb. 281.
 $l_1 = l'_1 = 24,0,$ $l_3 = l'_3 = 18,0,$ $h_5 = 5,0,$ $h'_5 = 15,$ $h_7 = 10,0,$ $h'_7 = 30,$
 $l_2 = 8,0,$ $l'_2 = 12,$ $h_6 = 10,0,$ $h'_6 = 30,$ $EJ_c = 1050000 \text{ tm}^2,$
 Längen in m.

als überzählig angesehen und aus der Formänderung eines dreifach statisch unbestimmten Hauptsystems (Abb. 282) berechnet, dessen Schnittkräfte für $\beta, -X_2 = 1, -X_3 = 1$ nach Abschn. 61 angegeben werden. Die geometrischen Bedingungen ergeben dann folgende Matrix:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
+ 13,000	+ 4,000				
+ 4,000	+ 22,114	- 14,114	+ 5,519	- 5,519	
	- 14,114	+ 18,114	- 3,519	+ 5,519	
	+ 5,519	- 3,519	+ 18,114	- 14,114	
	- 5,519	+ 5,519	- 14,114	+ 20,114	+ 3,000
				+ 3,000	+ 12,000

Die konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ik} wird nach Abschn. 29 berechnet. Das Ergebnis lautet folgendermaßen:

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}
X_{10}	+ 0,087048	- 0,032907	- 0,025190	+ 0,007913	+ 0,003568	- 0,000892
X_{20}	- 0,032907	+ 0,106948	+ 0,081868	- 0,025715	- 0,011595	+ 0,002899
X_{30}	- 0,025190	+ 0,081868	+ 0,123245	- 0,023583	- 0,028982	+ 0,007246
X_{40}	+ 0,007913	- 0,025715	- 0,023583	+ 0,134203	+ 0,097210	- 0,024303
X_{50}	+ 0,003568	- 0,011595	- 0,028982	+ 0,097210	+ 0,127452	- 0,031863
X_{60}	- 0,000892	+ 0,002899	+ 0,007246	- 0,024303	- 0,031863	+ 0,091299

Im übrigen soll die Untersuchung auf die Entwicklung der Einflußlinie X_2 und auf den Nachweis der Temperaturwirkung beschränkt bleiben. Nach (495) und (328) ist

$$X_2 = X_{20} + X_{2A} \psi_A, \quad X_{20} = \sum_{h=1}^6 \beta_{2h} \delta_{hm}.$$

Der Laststabzug besteht aus einer Reihe einfacher Träger, deren Biegelinien δ_{mh} für $-X_h = 1$, nach S. 112 durch

$$\delta_{mh} = \frac{l'}{6} \omega_D \quad \text{oder} \quad \delta_{mh} = \frac{l'}{6} \omega'_D = \frac{l'}{6} (3\omega_R - \omega_D)$$

beschrieben werden. Die Gleichung der Einflußlinie X_{20} ist daher mit den Vorzahlen β_{2h} in jedem Felde durch 2 Beiträge bestimmt.

$$\begin{aligned} \text{Feld 1 } X_{20} &= 0,106948 \frac{l_1 l'_1}{6} \left[3\omega_R - \left(1 + \frac{32907}{106948} \right) \omega'_D \right], \\ \text{,, 2 } X_{20} &= 0,086868 \frac{l_2 l'_2}{6} \left[3\omega_R - \left(1 + \frac{25715}{81868} \right) \omega_D \right], \\ \text{,, 3 } X_{20} &= -0,011595 \frac{l_3 l'_3}{6} \left[3\omega_R - \left(1 + \frac{2899}{11595} \right) \omega_D \right], \\ \text{,, 4 } X_{20} &= 0,002899 \frac{l_4 l'_4}{6} \omega'_D. \end{aligned}$$

Diese Funktionen werden mit Tabelle 22 berechnet und in Abb. 283 b aufgetragen.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_{hA} aus $\psi_A = 1$ sind den Belastungsgliedern $\delta_{hA} = -\sum C_{eA} \cdot (EJ_e \Delta_e)$ mit $EJ_e \Delta_e = \psi_A \cdot 5,0 = 5,0$ m zugeordnet. Diese sind

$$\begin{aligned} \delta_{1A} &= -\frac{1}{5,0} \cdot 5,0 = -1,00; \\ \delta_{2A} &= (+0,0927 - 0,0353) 5,0 = +0,287, \\ \delta_{3A} &= -0,287, \quad \delta_{4A} = +0,287, \\ \delta_{5A} &= -0,287, \quad \delta_{6A} = 0 \end{aligned}$$

und daher $X_{hA} = \sum \beta_{hk} \delta_{kA}$;

h	1	2	3	4	5	6
X_{hA}	-0,088016	+0,036052	+0,014864	+0,002091	-0,007256	+0,001814 mt

Das Ergebnis ist in Abb. 283 a eingetragen und durch die Biegemomente der Stäbe des Zwischenpfeilers ergänzt worden. Sie ergeben sich durch Superposition nach Abb. 282.

Wird die Summe der Endmomente eines Stabes r , deren Drehsinn hier in Übereinstimmung mit S. 307 im Uhrzeigersinn als positiv gilt, mit K_r bezeichnet, so ist nach S. 317 die Bedingung für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an einer aus dem Stabwerk abgeleiteten zwangläufigen Kette mit den virtuellen Geschwindigkeiten $\psi_A = 1$, $\dot{\nu}_{rA} = \dot{\psi}_A \vartheta_{rA}$

$$\delta A = 0 = \sum K_r \dot{\nu}_{rA} = \sum (K_{r0} + \psi_A K_{rA}) \vartheta_{rA}; \quad \psi_A = -\frac{\sum K_{r0} \vartheta_{rA}}{\sum K_{rA} \vartheta_{rA}}. \quad (496)$$

Die Pfosten der Kette sind von links nach rechts h_5, h_6, h_7, h_8 , ihre Drehwinkel für $\psi_A = \vartheta_5 = 1$ daher $\vartheta_{5A} = 1$, $\vartheta_{6A} = h_5/h_6 = 0,5$, $\vartheta_{7A} = h_6/h_7 = 0,5$. Nach dem Prinzip der virtuellen Ver-rückungen ist für die wandernde Einzellast $P_m = 1_m$

$$\sum K_{r0} \vartheta_{rA} = 1_m \eta_{mA}.$$

Dabei ist K_{r0} die Summe der Endmomente des Stabes r infolge der Einzellast $P_m = 1$ in m und η_{mA} die Verschiebung des Punktes m des Laststabzuges infolge von $\psi_A = 1$. Sie wird aus den statisch unbestimmten Schnittkräften X_{hA} entwickelt. Damit ist die Einflußlinie ψ_{Am} gefunden.

$$\psi_{Am} = -\frac{1_m \eta_{mA}}{\sum K_{rA} \vartheta_{rA}},$$

$$\begin{aligned} \sum K_{rA} \vartheta_{rA} &= -0,088016 \cdot 1 - (0,021188 - 0,004853) \cdot 0,5 \\ &\quad - (0,009347 - 0,008165) \cdot 0,5 = -0,096274. \end{aligned}$$

Die Biegelinie η_{mA} des Laststabzuges wird mit den Momenten Abb. 283 a nach Abschn. 19 berechnet. Sie ist, mit $-1/0,096274$ multipliziert, die Einflußlinie ψ_{Am} , die nach (495) mit

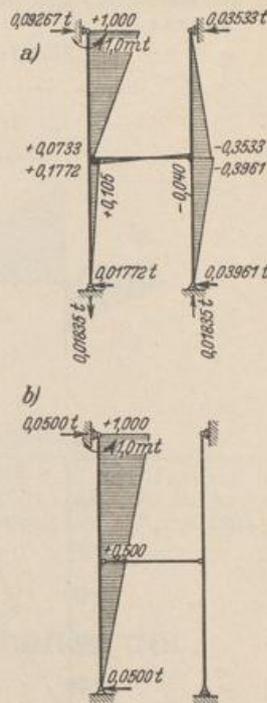


Abb. 282.

$X_{2A} = +0,036052$ erweitert zur Bildung der Einflußlinie von X_2 verwendet wird. Die Gleichung für den Anteil $X_{2A} \cdot \psi_{Am}$ ($X_{21} \psi$ in Abb. 283 b) lautet folgendermaßen:

Feld 1: $+0,37447 \frac{l_1 l_1'}{6} 0,088016 [3 \omega_R - 1,40960 \omega_D]$,

„ 2: $-0,37447 \frac{l_2 l_2'}{6} 0,014864 [3 \omega_R - 0,85840 \omega_D]$.

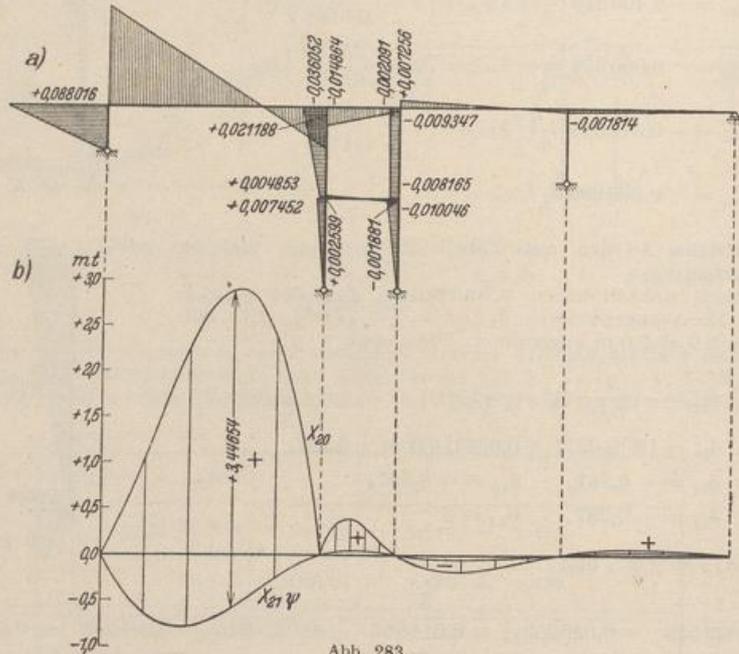


Abb. 283.

Die Schnittkräfte infolge einer Temperaturerhöhung des Riegels um $t = 10^\circ$ werden nach dem Ansatz $X_{kt} = X_{kt,0} + \psi_{At} X_{kA}$ berechnet. Der erste Anteil ist durch die Vorzahlen $\beta_{k\lambda}$ und die Verschiebungen $\delta_{h\lambda}^{(3)}$ des Hauptsystems bestimmt. Nach (311) ist

$$\delta_{h\lambda}^{(3)} = E J_c \sum N_{hk}^{(3)} \alpha t l_h.$$

$N_{hk}^{(3)}$ ist die Längskraft im Stabe h infolge von $-X_k = 1$, $\psi_A = 0$. $J_c = 0,5 \text{ m}^4$, $E J_c \alpha t l_1 = 2520$, $E J_c \alpha t l_2 = 840$. Nach Abb. 282a wird

h	1	2	3	4	5	6
$N_{1k}^{(3)}$	0	+ 0,0573	- 0,0573	+ 0,0573	- 0,0573	0 t
$N_{2k}^{(3)}$	0	- 0,0353	+ 0,0353	+ 0,0927	- 0,0927	0 t

so daß

$$\delta_{2t}^{(3)} = -\delta_{3t}^{(3)} = 114,820, \quad \delta_{4t}^{(3)} = -\delta_{5t}^{(3)} = 222,340, \quad \delta_{1t}^{(3)} = \delta_{6t}^{(3)} = 0.$$

$$X_{kt,0} = \sum \beta_{k\lambda} \delta_{h\lambda}^{(3)}$$

h	1	2	3	4	5	6
$X_{kt,0}$	+ 0,0800	- 0,2597	- 3,5505	+ 7,9802	- 4,7276	+ 1,1818 mt

Die Temperaturänderung des Riegels erzeugt Schnittkräfte im statisch unbestimmten Hauptsystem Abb. 282a, die mit den Anteilen aus $X_{kt,0}$ überlagert werden. Auf diese Weise werden die in Abb. 284 eingetragenen Ergebnisse erhalten. Sie stellen die Momente aus Temperatur für $\psi_A = 0$ dar.

Der unbekannt Stabdrehwinkel ψ_{A_i} wird nach (496)

$$\psi_{A_i} = - \frac{\sum K_{r_i} \cdot \vartheta_{r_A}}{\sum K_{r_A} \cdot \vartheta_{r_A}} = - \frac{0,0800 \cdot 1 + 2,3630 \cdot 0,5 - 10,9677 \cdot 0,5}{-0,096274} = -43,858,$$

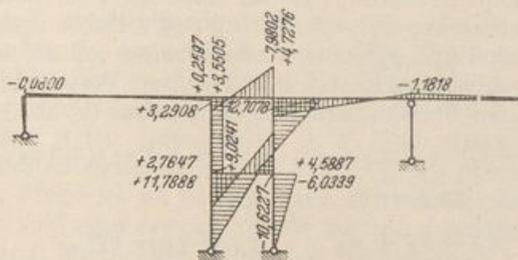


Abb. 284.

$$X_{k_i} = X_{k_i,0} - 43,858 X_{k_A},$$

$$X_{1_i} = +0,0800 - 43,858 \cdot 0,088016 = -3,78 \text{ mt.}$$

Kammer, Statisch unbestimmte Hauptssysteme. Arm. Bet. 1914 S. 161. — Hertwig, A.: Die Berechnung der Rahmengebilde. Eisenbau 1921 S. 122. — Nakonz, W.: Die Berechnung mehrstieliger Rahmen unter Anwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme. Berlin 1924. — Spiegel, G.: Mehrteilige Rahmen. Berlin 1920.

B. Die Berechnung durch Elimination der Schnittkräfte.

38. Die statischen Bedingungsgleichungen.

Die Theorie des statisch unbestimmten Stabwerks ist in Abschn. 23 mit einer Zerlegung in Teile (h) und (J) eingeleitet worden, um Gleichungen teils statischen, teils geometrischen Inhalts zur Beschreibung des Spannungs- und Verschiebungszustandes des Stabwerks zu bilden. Dieser allgemeine Ansatz ist bisher stets auf die geometrischen Bedingungen zurückgeführt worden, um die statisch unbestimmten Schnittkräfte anzugeben. Unter Umständen ist es aber zweckmäßig, diese zu eliminieren und zuerst die Komponenten des Verschiebungszustandes aus den Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen.

Die Knotenpunktfigur. Durch die Aufteilung eines Stabwerks allgemeiner Form entstehen Knotenscheiben (J), Gelenke (G) und Abschnitte (h) des Stabwerks. Diese sind gerade oder gekrümmt und können auch aus geschlossenen Gruppen von einzelnen Stäben zusammengesetzt sein. Über die Zerlegung des Stabwerks bestehen keine anderen Vorschriften, als daß jeder Abschnitt (h) nur zwei freie Querschnitte erhält, in denen er vorher steif oder frei drehbar angeschlossen war.

Die Konfiguration der Knotenscheiben und Gelenke in der Bildebene heißt Knotenpunktfigur (Abb. 289b). Sie ist durch die Gelenkpunkte G und durch die Schnittpunkte J, K von geraden Linien bestimmt, welche die Abschnitte (h) des Stabwerks vertreten. Die Schnittpunkte J, K ersetzen nach der Theorie des Stabwerks, abgesehen von seltenen Ausnahmen, die Knotenscheiben und erhalten aus diesem Grunde die Eigenschaft von materiellen Punkten, mit denen die Anschlußquerschnitte (h) des Stabwerks zusammenfallen.

Die Bewegung eines Gelenkes (G) ist durch zwei Komponenten u_G, v_G , die Bewegung eines Stabknotens (J) durch drei Komponenten u_J, v_J, φ_J beschrieben. φ_J wird als Knotendrehwinkel bezeichnet und im Uhrzeigersinn positiv gerechnet.