Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

24. Die geometrischen Bedingungsgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

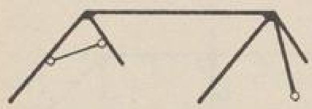
Verschiebung oder einer relativen Verschiebung aus den Anteilen der Belastung und der statisch unbestimmten Schnittkräfte gebildet werden.

$$\delta_k = \delta_{k0} + \sum X_h \delta_{kh} \,. \tag{281}$$

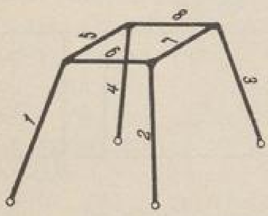
Sind die geometrischen Komponenten des Verschiebungszustandes überzählige Größen eines Hauptsystems, so kann jede Schnittkraft nach dem Superpositionsgesetz aus den Anteilen der Belastung und den Beiträgen dieser unbekannten Größen angegeben werden.

$$K_m = K_{m0} + \sum (\varphi_J K_{mJ} + u_J K'_{mJ} + v_J K''_{mJ}) \,. \tag{282}$$

Das räumliche Stabwerk mit k Knotenpunkten, dessen s Stabelemente wiederum nur in zwei Querschnitten starr in Knoten miteinander verbunden sind, zählt $12\,s$ Anschlußkräfte. Hierzu können noch t Zusatzkräfte treten, welche einzelnen Zwischenstützen oder Zugbändern zugeordnet sein sollen. Der Verschiebungszustand wird an jedem Knoten durch sechs Komponenten beschrieben. Dies sind drei Verschiebungen u, v, w und drei Drehwinkel φ_x, φ_y, φ_z. Zur Berechnung der unbekannten Größen (Anzahl $12\,s + 6\,k + t$) stehen $6\,s$ Gleichgewichtsbedingungen der an jedem Stab angreifenden äußeren Kräfte, $6\,k$ Gleichgewichtsbedingungen der an jedem Knotenpunkt angreifenden äußeren Kräfte und $6\,s$ Verträglichkeitsbedingungen zwischen relativer Verschiebung der Endquerschnitte und Verformung des Stabes zur Verfügung. Durch t Zusatzstäbe sind t Verschiebungen gegeben. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen stimmt also auch hier mit derjenigen der Unbekannten überein. Das Ergebnis ist demnach, abgesehen von dem Ausnahmefall $D = 0$, wiederum eindeutig.



$n = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 1 - 6 \cdot 2 = 22$



$n = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 12$

Abb. 151.

Formale Abzählung der überzähligen Größen des räumlichen Stabwerks mit steif oder gelenkig angeschlossenen Stäben:

$$n = 6\,s_{12} + 3\,s_9 + s_6 + t - 6\,k_6 - 3\,k_3 \tag{283}$$

(Abb. 151). Daher kann das räumliche Stabwerk, dessen Elemente in allen Knoten steif angeschlossen sind, statisch bestimmt berechnet werden, wenn $12\,s + t = 6\,s + 6\,k$ oder $6\,s + t = 6\,k$. In diesem Falle ist das Stabwerk ohne Belastung spannungslos und der Spannungszustand unabhängig von Temperaturänderung und Stützenbewegung. Die Berechnung eines beliebigen räumlichen Stabwerks kann ebenfalls entweder auf einen Ansatz geometrischer Bedingungen mit den statisch unbestimmten Stütz- und Schnittkräften als Unbekannten oder auf die Gleichgewichtsbedingungen der Schnittkräfte am Knoten zurückgeführt werden, in denen die sechs geometrischen Komponenten der Knotenverschiebung als Unbekannte auftreten.

A. Die Berechnung durch Elimination der Komponenten des Verschiebungszustandes.

24. Die geometrischen Bedingungsgleichungen.

Der Spannungszustand eines $n$fach statisch unbestimmten Stabwerkes kann für jede Belastung nach S. 153 eindeutig beschrieben werden, wenn n voneinander unabhängige, statisch nicht bestimmbare Stützenwiderstände C oder Schnittkräfte N, M, Q ausgezeichneter Querschnitte bekannt sind. Sie werden in Zukunft unabhängig von ihrer Eigenschaft als Kraft oder Kräftepaar mit $X_k (k = 1 \ldots n)$ bezeichnet. Die Ansätze (281) stützen sich allein auf das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte und werden daher durch jede Annahme über die Größe und den Richtungssinn der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt.

Statisch überzählige Größen X_k und Hauptsystem. Wird eine Anzahl der n statisch nicht bestimmbaren Stütz- und Schnittkräfte X_k Null gesetzt, so entsteht ein Hauptsystem des vorgelegten Stabwerks. Es ist statisch bestimmt oder statisch unbestimmt, je nachdem alle statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte oder nur eine Anzahl h von ihnen als „überzählig" ausgeschieden werden. Das Hauptsystem heißt in diesem Falle $(n - h)$fach statisch unbestimmt. Als statisch überzählige Größen lassen sich einzelne Komponenten einer Stützkraft oder einzelne Komponenten der einem ausgezeichneten Querschnitt k zugeordneten inneren Kraft $\int_k (\sigma \dotplus \tau)\, dF$ verwenden. Selbstverständlich können auch zwei oder alle drei Komponenten (N, M, Q) eines Querschnitts gleichzeitig Null gesetzt werden.

Dieser Eingriff in den Spannungszustand des vorgelegten Tragwerks kann durch reibungslose Gelenke, Führungen oder durch die vollkommene Trennung des Stabes verwirklicht werden, ohne damit das Kräftebild des Hauptsystems zu ändern.

a) $X_1 = M_k = \int_k \sigma z\, df.$

Mit $X_1 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einer Längs- nnd Querkraft, die von einem Gelenk Abb. 152a übertragen werden können.

b) $X_2 = N_k = \int_k \sigma\, df.$

Mit $X_2 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einem Biegungsmoment und einer Querkraft, die von einer F ü h r u n g Abb. 152b übertragen werden können.

c) $X_3 = Q_k = \int_k \tau\, df.$

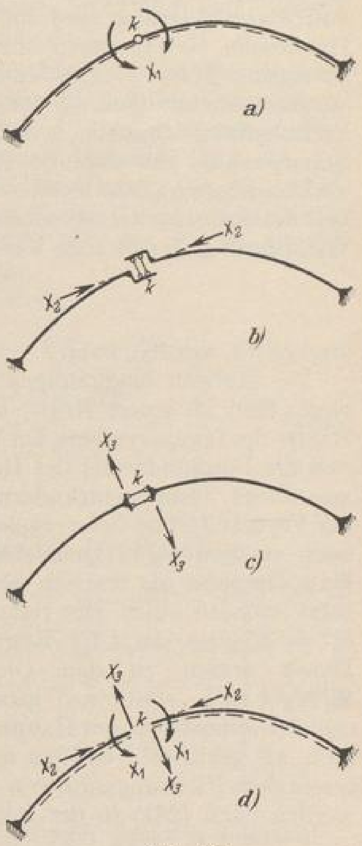


Abb. 152.

Mit $X_3 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einem Biegungsmoment und einer Längskraft, die von einer F ü h r u n g Abb. 152c übertragen werden können.

d) $X_1 = M_k,\ X_2 = N_k,\ X_3 = Q_k.$

Mit $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ sind alle inneren Kräfte im Querschnitt k Null, so daß das Tragwerk hier u n t e r b r o c h e n werden kann. Das Hauptsystem Abb. 152d ist statisch bestimmt und besteht aus zwei Kragträgern.

Gleichgewicht einer b e l i e b i g e n Gruppe von äußeren Kräften ist nur an einem Hauptsystem mit kinematisch starrem Aufbau möglich. Der Ausnahmefall der unendlich kleinen Beweglichkeit des Hauptsystems ist ebenfalls ausgeschlossen. Im übrigen können die überzähligen Größen X_k nach Art, Lage und Richtungssinn grundsätzlich beliebig ausgewählt werden. Ist das Hauptsystem jedoch aus besonderen Gründen beweglich, so sind zum Gleichgewicht ausgezeichnete Eigenschaften der Belastung $\mathfrak{P}$ und der statisch unbestimmten äußeren Kräfte X_k notwendig.

Geometrische Verträglichkeit und Superpositionsgesetz im kinematisch starren Hauptsystem. Die Gleichgewichtsbedingungen werden bei jeder Annahme über die Größe der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt. Dagegen ist nach (279) nur eine durch Größe und Richtungssinn ausgezeichnete Gruppe vorhanden, die in Verbindung mit der Belastung $\mathfrak{P}$ die mit dem vorgelegten Stabwerk verträgliche Formänderung des Hauptsystems erzeugt. Diese ist durch die Stützung und durch die Dehnung und Biegung der Stäbe, also durch die Schnittkräfte bestimmt. Spannung und Formänderung sind im Bereiche des zulässigen Tragvermögens durch das Hookesche Gesetz linear miteinander verknüpft. Daher entstehen zwischen der Belastung $\mathfrak{P}(P_1 \ldots P_n)$, den Schnittkräften und der Verschiebung oder Verdrehung ausgezeichneter Querschnitte k lineare algebraische Gleichungen oder lineare Differentialgleichungen, welche durch Superposition der Absolutglieder, also durch Superposition der äußeren Kräfte $\mathfrak{P}$ und der anderen äußeren Ursachen gelöst werden können. Das Hookesche Gesetz ist also die Voraussetzung für die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, nach dem irgend eine mechanische oder geometrische Wirkung W_h (Kraft oder Verschiebung) eines statisch unbestimmten Tragwerks als

$$W_h = \sum_{k=1}^{k=n} W_{hk} P_k \tag{284}$$

angegeben werden kann.

Die statisch überzähligen Stütz- und Schnittkräfte $X_k (k = 1 \ldots n)$ des Stabwerks sind als innere Kräfte stets Doppelkräfte und neben der Belastung $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte des Hauptsystems. Ihr Richtungssinn und ihre Größe werden derart bestimmt, daß die Formänderung des Hauptsystems aus seiner Belastung $\mathfrak{P}, X_k (k = 1 \ldots n)$, aus seiner Temperaturänderung $t, \Delta t$ und seinen Stützenverschiebungen Δ_e mit der Formänderung des vorgelegten Tragwerks übereinstimmt. Dies gilt insbesondere auch an denjenigen Querschnitten k, an welchen Schnittkräfte zur Bildung des Hauptsystems als statisch überzählig angesehen und durch äußere Kräfte X_k ersetzt worden sind. Die relativen elastischen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_k^{(n)} = \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(0)}$ der Ufer dieser Querschnitte k des Hauptsystems sind daher Null. Damit treten zu den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}, X_k (k = 1 \ldots n)$ noch geometrische Verträglichkeitsbedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems. In diesem werden die Komponenten δ_k, die stets als gerichtete Größen anzusehen sind, in der Regel nach Vereinbarung entgegen dem Richtungssinn von X_k positiv gerechnet. Die Verträglichkeitsbedingungen werden nach (281) in der folgenden Form angeschrieben:

$$\left.\begin{array}{ll} 1_k^{(0)} \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(0)} = 1_k^{(0)} \delta_k \quad = 0\,, & (k = 1, \ldots, n) \\ \text{oder} & \\ 1_k^{(n-h)} \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(n-h)} = 1_k^{(n-h)} \delta_k = 0\,, & (k = 1, \ldots, h)\,. \end{array}\right\} \tag{285}$$

Die Anzahl der Verträglichkeitsbedingungen stimmt mit der Anzahl n oder h der überzähligen Größen X_k überein, so daß die notwendige und hinreichende Grundlage zu ihrer Berechnung vorhanden ist.

Entwicklung der Elastizitätsgleichung aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen. Die relative Verschiebung δ_k der Ufer k eines ebenen, statisch bestimmten oder $(n - h)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch äußere Kräfte $\mathfrak{P}, X_k$, durch Temperaturänderung und Stützenbewegung im Sinne von $-X_k$ wird nach (35) aus dem Vergleich mit einem dem vorhandenen Kräftebild benachbarten Spannungszustande abgeleitet. Hierbei entstehen die Ansätze (285) mit der Arbeit aus einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(0)}$ oder $-X_k = 1_k^{(n-h)}$

und den Komponenten des vorgeschriebenen statisch unbestimmten Verschiebungszustandes $(\delta_k, \varepsilon_0, \delta\psi)$.

$$\text{a)}\quad 1_k^{(0)}\delta_k = \int N_k^{(0)}\frac{N\,ds}{EF} + \int M_k^{(0)}\frac{M\,ds}{EJ} + \int Q_k^{(0)}\varkappa\frac{Q\,ds}{GF} + \int N_k^{(0)}\alpha_t\,t\,ds + \int M_k^{(0)}\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(0)}\Delta_e = 0. \tag{286}$$

$$\text{b)}\quad 1_k^{(n-h)}\delta_k = \int N_k^{(n-h)}\frac{N\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)}\frac{M\,ds}{EJ} + \int Q_k^{(n-h)}\varkappa\frac{Q\,ds}{GF} + \int N_k^{(n-h)}\alpha_t\,t\,ds + \int M_k^{(n-h)}\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)}\Delta_e = 0. \tag{287}$$

Diese werden nach (281) durch Superposition in die Anteile aus den überzähligen Größen X_k und in die Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ (Index 0), aus der Temperaturänderung $t, \Delta t$ (Index t), aus den Stützenverschiebungen Δ_e (Index s) zerlegt. Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems aus allen äußeren Ursachen $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ zusammen $(k = 1 \ldots n)$ oder $(k = 1 \ldots h)$ erhalten die Bezeichnung $C_\otimes, N_\otimes, M_\otimes, Q_\otimes$. Die Definition der positiven Richtung des Vektors δ_k des Hauptsystems nach S. 156 bestimmt mit den Schnittkräften $C_k^{(0)}, N_k^{(0)}, M_k^{(0)}, Q_k^{(0)}$ oder $C_k^{(n-h)}, N_k^{(n-h)}, M_k^{(n-h)}, Q_k^{(n-h)}$ aus $-X_k = 1$ die Form der Superposition.

a) Superposition im statisch bestimmten Hauptsystem:

$$\left.\begin{array}{llll} C_\otimes^{(0)} = C_0^{(0)}; & N_\otimes^{(0)} = N_0^{(0)}; & M_\otimes^{(0)} = M_0^{(0)}; & Q_\otimes^{(0)} = Q_0^{(0)}; \\ \multicolumn{2}{l}{C = C_0^{(0)} - \sum X_k C_k^{(0)};} & \multicolumn{2}{l}{N = N_0^{(0)} - \sum X_k N_k^{(0)};} \\ \multicolumn{2}{l}{M = M_0^{(0)} - \sum X_k M_k^{(0)};} & \multicolumn{2}{l}{Q = Q_0^{(0)} - \sum X_k Q_k^{(0)};} \\ \multicolumn{4}{c}{(k = 1, \ldots, n)} \end{array}\right| \tag{288}$$

b) Superposition im $(n-h)$fach statisch unbestimmten Hauptsystem:

$$\left.\begin{array}{ll} C_\otimes^{(n-h)} = C_0^{(n-h)} + C_t^{(n-h)} + C_s^{(n-h)}; & C = C_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k C_k^{(n-h)}; \\ N_\otimes^{(n-h)} = N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)}; & N = N_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k N_k^{(n-h)}; \\ M_\otimes^{(n-h)} = M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)}; & M = M_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k M_k^{(n-h)}; \\ Q_\otimes^{(n-h)} = Q_0^{(n-h)} + Q_t^{(n-h)} + Q_s^{(n-h)}; & Q = Q_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k Q_k^{(n-h)}; \\ \multicolumn{2}{c}{(k = 1, \ldots, h).} \end{array}\right| \tag{289}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen (286) und (287) lassen sich darnach folgendermaßen entwickeln:

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form a:

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(0)}\delta_k = 0 = {} & \int N_k\frac{N_0\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_0\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k\frac{Q_0\,ds}{GF} + \int N_k\alpha_t t\,ds + \int M_k\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds \\ & - \sum C_{ek}\Delta_e - X_1\left[\int N_k\frac{N_1\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_1\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k\frac{Q_1\,ds}{GF}\right] - \cdots \\ & - X_k\left[\int \frac{N_k^2\,ds}{EF} + \int \frac{M_k^2\,ds}{EJ} + \int \varkappa\frac{Q_k^2\,ds}{GF}\right] - \cdots \\ & - X_n\left[\int N_k\frac{N_n\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_n\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k\frac{Q_n\,ds}{GF}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{290}$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form a:

$$\left.\begin{aligned}
1_k^{(n-h)}\delta_k = 0 = &\int N_k^{(n-h)}\frac{N_\otimes^{(n-h)}\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)}\frac{M_\otimes^{(n-h)}\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)}\frac{Q_\otimes^{(n-h)}\,ds}{GF}\\
&+ \int N_k^{(n-h)}\alpha_t\,t\,ds + \int M_k^{(n-h)}\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)}\Delta_e\\
&- X_1\left[\int N_k^{(n-h)}\frac{N_1^{(n-h)}\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)}\frac{M_1^{(n-h)}\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)}\frac{Q_1^{(n-h)}\,ds}{GF}\right] - \cdots\\
&- X_k\left[\int \frac{N_k^{(n-h)^2}\,ds}{EF} + \int \frac{M_k^{(n-h)^2}\,ds}{EJ} + \int \varkappa \frac{Q_k^{(n-h)^2}\,ds}{GF}\right] - \cdots\\
&- X_h\left[\int N_k^{(n-h)}\frac{N_h^{(n-h)}\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)}\frac{M_h^{(n-h)}\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)}\frac{Q_h^{(n-h)}\,ds}{GF}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(291)$$

Das erste Glied des Ansatzes (290)

$$\int N_k\frac{N_0\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_0\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k\frac{Q_0\,ds}{GF} + \int N_k\,\alpha_t\,t\,ds + \int M_k\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds$$
$$-\sum C_{ek}\Delta_e = 1_k(\delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}) = 1_k\,\delta_{k\otimes}$$

ist der Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems durch eine Belastung $\mathfrak{P}$, die Temperaturänderung $(t, \Delta t)$ und durch Stützenverschiebungen Δ_e. Das positive Ergebnis bedeutet daher die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung des Punkte- oder Geradenpaares k des Hauptsystems aus diesen äußeren Ursachen im Sinne von $-X_k$. Der Ansatz

$$\int N_k N_1\frac{ds}{EF} + \int M_k M_1\frac{ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k Q_1\frac{ds}{GF} = 1_k\,\delta_{k1} \qquad (292)$$

wird als Arbeit der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems durch $-X_1 = 1$ erkannt. Das positive Ergebnis ist die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung des Punkte- oder Geradenpaares k des Hauptsystems infolge $-X_1 = 1$. Die entsprechenden Teilwerte von (291) sind Arbeiten einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(n-h)}$ bei einer Formänderung des statisch unbestimmten Hauptsystems. Das positive Ergebnis bedeutet daher auch die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$, $\delta_{k1}^{(n-h)}$ im Sinne von $-X_k$. Die Ansätze (290) und (291) können damit folgendermaßen verwendet werden:

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form b:

$$\delta_k = 0 = \delta_{k\otimes} - X_1\,\delta_{k1} - X_2\,\delta_{k2} - \cdots - X_k\delta_{kk} - \cdots - X_n\,\delta_{kn}. \qquad (293)$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form b:

$$\delta_k = 0 = \delta_{k\otimes}^{(n-h)} - X_1\,\delta_{k1}^{(n-h)} - \cdots - X_k\,\delta_{kk}^{(n-h)} - \cdots - X_h\,\delta_{kh}^{(n-h)}. \qquad (294)$$

Die Form b bestätigt das Superpositionsgesetz (284) für die Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Systems und kann daher auch unmittelbar angeschrieben und nach (290) entwickelt werden. Sie bildet durch ihre übersichtliche geometrische Bedeutung die einfachste Grundlage für die unmittelbare Berechnung der statisch überzähligen Schnittkräfte $(X_1 \ldots X_n)$.

Die von der Belastung unabhängigen Verschiebungen δ_{ki}, $\delta_{ki}^{(n-h)}$ des Hauptsystems werden im Rahmen der algebraischen Lösung als Vorzahlen der überzähligen

Größen bezeichnet. Die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}$, $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ des Hauptsystems aus Belastung, Temperaturänderung und Stützensenkungen sind die Absolutglieder des Ansatzes und heißen Belastungszahlen. Sie werden bei einer in dem beliebigen Punkte m des Lastgurtes wirkenden Einzellast $P_m = 1$ t mit δ_{km}, $\delta_{km}^{(n-h)}$ bezeichnet und bedeuten dann die Ordinaten der Einflußlinien der gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung der Ufer des Querschnitts k im Sinne von $-X_k$.

In den Sätzen von Betti und Maxwell (38) wird die virtuelle Arbeit einer Kräftegruppe P_m bei der Verschiebung $\delta_{mk}^{(n)}$ eines $n$fach statisch unbestimmten Stabwerks infolge der Belastung durch eine Kräftegruppe P_k mit derjenigen der Kräftegruppe P_k bei der Verschiebung $\delta_{km}^{(n)}$ durch die Belastung P_m verglichen.

$$\sum P_m \delta_{mk}^{(n)} = \sum P_k \delta_{km}^{(n)} . \tag{295}$$

Daher ist in einem statisch bestimmten Hauptsystem

$$1_k \delta_{k\Sigma(P,X)} = \sum P_m \delta_{mk} - X_1 \delta_{1k} - \cdots - X_k \delta_{kk} - \cdots - X_n \delta_{nk} = 0 , \tag{296}$$

so daß noch eine dritte Form c der Elastizitätsgleichung entsteht.

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$X_1 \delta_{1k} + X_2 \delta_{2k} + \cdots + X_k \delta_{kk} + \cdots + X_n \delta_{nk} = \sum P_m \delta_{mk} + \delta_{kt} + \delta_{ks} . \tag{297}$$

Elastizitätsgleichung (k) für das (n $- h$)fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{1k}^{(n-h)} + X_2 \delta_{2k}^{(n-h)} + \cdots + X_k \delta_{kk}^{(n-h)} + \cdots + X_h \delta_{hk}^{(n-h)} \\ = \sum P_m \delta_{mk}^{(n-h)} + \delta_{kt}^{(n-h)} + \delta_{ks}^{(n-h)} . \end{aligned} \right\} \tag{298}$$

Die Vorzahlen δ_{ik} jeder Gleichung (k) sind jetzt Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte i des Hauptsystems im Sinne von $-X_i$ durch die Belastung $-X_k = 1$. Die Belastungszahlen δ_{mk} und $\delta_{mk}^{(n-h)}$ sind Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes im Sinne der Last P_m infolge $-X_k = 1$. Besteht die Gruppe ΣP_m aus gleichgerichteten Lasten, so sind δ_{mk}, $\delta_{mk}^{(n-h)}$ Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für $-X_k = 1$. Sie werden bei einer graphischen Untersuchung nach den Abschnitten 20, 21 zusammen mit den Vorzahlen aus einem Verschiebungsplan des Hauptsystems für $-X_k = 1$ erhalten.

Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen. Die Ansätze a bis c unterscheiden sich nur durch die Form der Rechenvorschrift. Die Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes a werden als Ausdrücke für die Arbeit einer virtuellen Belastung angeschrieben und durch Integration mathematisch gewonnen. Die Vorzahlen δ_{ki}, δ_{kk} und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}$ der Ansätze b und c sind relative Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Sie werden nach den Tabellen des Abschn. 19 eingesetzt, nach Abschn. 18 berechnet oder zeichnerisch gefunden.

Die vollständigen Vorzahlen und Belastungszahlen bestehen im allgemeinen aus drei Summanden, welche den Einfluß der Längs- und Querkräfte und denjenigen der Biegungsmomente getrennt zum Ausdruck bringen. Der Anteil der Querkräfte ist stets unbedeutend und kann gegenüber dem Fehler aus anderen ungenauen Annahmen der Rechnung vernachlässigt werden. Dasselbe gilt bei biegungssteifen Stäben zumeist auch von dem Anteil der Längskräfte. Daher werden in der Regel die Vorzahlen und Belastungszahlen, abgesehen von Temperaturwirkung und Stützensenkung, auf den Anteil der Biegungsmomente beschränkt. Dies gilt besonders bei neu zu entwerfenden Bauwerken, deren Querschnitte zunächst auf Grund von Schätzungen oder überschlägigen Berechnungen angenommen werden müssen. Da die Abschätzung von Verhältniszahlen einfacher ist, wird ein EJ_cfacher Betrag der Vorzahlen und Belastungszahlen berechnet. J_c ist ein Vergleichswert, durch welchen das Verhältnis J_c/J in möglichst einfachen Zahlen angegeben werden kann. Dasselbe gilt von der Einführung eines Vergleichsquerschnitts F_c, so daß der EJ_cfache, vollständige Betrag einer Vorzahl folgendermaßen lautet:

$$E J_c \delta_{k i} = \frac{J_c}{F_c} \int N_k N_i \frac{F_c}{F} d s + \int M_k M_i \frac{J_c}{J} d s + \frac{E J_c}{G F_c} \int \varkappa Q_k Q_i \frac{F_c}{F} d s \approx \int M_k M_i \frac{J_c}{J} d s. \tag{299}$$

Da der EJ_cfache Betrag der Formänderungen aus diesem Grunde bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke die Regel ist, werden in Zukunft zur Abkürzung des Ansatzes die EJ_c-fachen Beträge der Verschiebungen oder Verdrehungen mit δ_{ik}, δ_{kk}, $\delta_{k\otimes}$ bezeichnet. Der absolute Betrag von J_c ist nur zur Berechnung von δ_{kt} und δ_{ks} notwendig.

Die analytische Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen zwingt in der Regel zur Aufteilung des Integrationsbereiches in einzelne Strecken l_h, deren elastische Eigenschaften durch ein mittleres Trägheitsmoment J_h und eine die Querschnittsgestaltung bestimmende Funktion $J_h/J = \zeta_h$ beschrieben werden.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{kk} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^2 \frac{J_h}{J} d s; \qquad \delta_{ik} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_i M_k \frac{J_h}{J} d s; \qquad \delta_{k0} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k M_0 \frac{J_h}{J} d s, \\ &\delta_{kt} = E J_c \Sigma \left(\int_h N_k \alpha_t t\, d s + \int_h M_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} d s \right); \qquad \delta_{ks} = -E J_c \Sigma C_{ek} \Delta_e. \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

Die Integrale werden nur dann formal integriert, wenn J_h/J und F_h/F konstant sind oder durch eine leicht zu integrierende algebraische Funktion ersetzt werden können.

In vielen Fällen ist $\zeta_h = J_h/J = 1$ oder $J_h/J \cos\alpha = 1$. Die Rechnung ist dann besonders einfach. Sie wird mit Hilfe der Tabellen 12 und 16 ausgeführt. Andere Annahmen über die Funktionen J_h/J und $J_h/J \cos\alpha$ sind in Abschn. 18 und in den Tabellen 13 bis 15 ausführlich erörtert worden. Dasselbe gilt von der numerischen oder graphischen Lösung des Integrals.

Die Einflußlinien der überzähligen Größen setzen sich aus den erweiterten Biegelinien $\delta_{mk} (k = 1 \ldots n)$ zusammen, welche für den Lastgurt des Hauptsystems berechnet werden. Dies geschieht nach den Angaben in den Abschnitten 20 und 21. Sie werden je nach der Richtung der wandernden Last $P_m = 1\,t$ in senkrechter, waagerechter oder beliebig schräger Richtung aufgetragen.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der virtuellen Belastung. Die Vorzahlen $\delta_{ki}^{(n-h)}$, $\delta_{kk}^{(n-h)}$ und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ der Elastizitätsgleichungen für das $(n-h) = r$fach statisch unbestimmte Hauptsystem werden nach S. 158 als Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung 1_k bestimmt. Sie bedeuten geometrisch den EJ_cfachen Betrag der gegenseitigen Verschiebung und Verdrehung der Ufer eines ausgezeichneten Querschnitts k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Der Einfluß der Längs- und Querkräfte wird auch hier nach Abschn. 18 vernachlässigt, so daß nach (289), (291) und S. 160 die Ansätze eines $(n-h) = r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^{(r)2} \frac{J_h}{J} d s; \qquad 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^{(r)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} d s; \\ &\qquad\qquad 1_k^{(r)} \delta_{k0}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^{(r)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J} d s, \end{aligned}\right\} \tag{301a}$$

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int\limits_h N_k^{(r)} N_t^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds + \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(r)} M_t^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds \\ &\quad + E J_c \sum\left[\int\limits_h N_k^{(r)} \alpha_t\, t\, ds + \int\limits_h M_k^{(r)} \frac{\alpha_t\, \Delta t}{h}\,ds\right], \\ 1_k^{(r)}\,\delta_{ks}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int\limits_h N_k^{(r)} N_s^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds + \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(r)} M_s^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds - E J_c \sum C_{ek}^{(r)} \Delta_e . \end{aligned}\right\} \quad (301\text{b})$$

Die Rechenvorschrift (301) läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch die ihr äquivalenten äußeren Kräfte $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ eines darin enthaltenen, beliebigen, statisch bestimmten Hauptsystems mit den Überzähligen Y_H ersetzt wird.

$$1_k^{(r)} \equiv (1_k^{(0)},\ Y_{Hk}^{(0)}), \qquad (H = 1 \ldots r). \tag{302}$$

In derselben Weise können auch die Komponenten $\delta_{kt}^{(r)}$, $\delta_{k\otimes}^{(r)} \ldots$ des Verschiebungszustandes des statisch unbestimmten Hauptsystems als Funktion der vorgeschriebenen Belastung $\mathfrak{P}$ und aller übrigen äußeren Ursachen aus der Formänderung eines statisch bestimmten Hauptsystems abgeleitet werden. Die Formänderung wird, abgesehen von der Temperaturänderung und Stützenbewegung, von einer Gruppe von äußeren Kräften hervorgerufen, die aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den ihr zugeordneten statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H0}^{(0)}$ besteht. Diese enthalten unter Umständen auch Anteile aus Temperatur- und Stützenänderung.

$$\left.\begin{aligned} \delta_{k\otimes}^{(r)} &= \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{H=1}^{r} \delta_{kH}^{(0)}\, Y_{H\otimes}^{(0)}; & \delta_{kt}^{(r)} &= \delta_{kt}^{(0)} - \sum_{H=1}^{r} \delta_{kH}^{(0)}\, Y_{Ht}^{(0)}; \\ \delta_{k\otimes}^{(0)} &= \delta_{k0}^{(0)} + \delta_{kt}^{(0)} + \delta_{ks}^{(0)}; & Y_{H\otimes}^{(0)} &= Y_{H0}^{(0)} + Y_{Ht}^{(0)} + Y_{Hs}^{(0)}. \end{aligned}\right\} \quad (303)$$

In Verbindung mit (302) ist

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H\otimes}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)}, & (H = 1 \ldots r), \\ 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{kt}^{(r)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{Ht}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{kt}^{(r)}, & (H = 1 \ldots r), \end{aligned}\right| \quad (304)$$

da die relativen Verschiebungen $\delta_{H\otimes}^{(r)}$, $\delta_{Ht}^{(r)}$ der Querschnitte H des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind. Die Ansätze (301) zur Berechnung der Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks werden daher nach der folgenden Rechenvorschrift abgekürzt:

$$\left.\begin{aligned} & 1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{kk}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(0)} M_k^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(0)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds, \\ & 1_k^{(r)}\,\delta_{k0}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k0}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(0)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{kt}^{(r)} = \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int\limits_h N_k^{(0)} N_t^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds \\ & \qquad + \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(0)} M_t^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds + E J_c \sum\left[\int\limits_h N_k^{(0)} \alpha_t\, t\, ds + \int\limits_h M_k^{(0)} \frac{\alpha_t\, \Delta t}{h}\,ds\right]; \\ & 1_k^{(r)}\,\delta_{ks}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ks}^{(r)} = \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int\limits_h N_k^{(0)} N_s^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds + \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(0)} M_s^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds - E J_c \sum C_{ek}^{(0)} \Delta_e . \end{aligned}\right\} \quad (305)$$

Die virtuelle Belastung $-X_k = 1$ wirkt hier an einem beliebigen, in dem $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystem enthaltenen statisch bestimmten Stabwerk und erzeugt in diesem die Schnittkräfte $N_k^{(0)}$, $M_k^{(0)}$. Sie treten in den Integralen an die Stelle von $N_k^{(r)}$, $M_k^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der

Integrationsbereich wird auf diese Weise kleiner, daher sind auch die Ansätze für $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ einfacher und im Ergebnis genauer.

Der Ansatz (b) zur Berechnung von h überzähligen Größen X_k $(k = 1 \ldots h)$ aus einem $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystem kann hiernach folgendermaßen entwickelt werden:

$$X_1\,\delta_{k1}^{(r)} + \cdots X_k\,\delta_{kk}^{(r)} + \cdots X_h\,\delta_{kh}^{(r)} = \delta_{k\otimes}^{(r)},$$

$$X_1(1_k^{(0)}\,\delta_{k1}^{(r)}) + \cdots X_k(1_k^{(0)}\,\delta_{kk}^{(r)}) + \cdots X_h(1_k^{(0)}\,\delta_{kh}^{(r)}) = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)},$$

$$\left.\begin{aligned} &X_1\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)} N_1^{(n-h)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)} M_1^{(n-h)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] + \cdots \\ &+ X_k\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)} N_k^{(n-h)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)} M_k^{(n-h)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] + \cdots \\ &+ X_h\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)} N_h^{(n-h)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)} M_h^{(n-h)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] \\ &= \frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)}(N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)}) \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)}(M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)}) \frac{J_c}{J}\,ds \\ &\qquad + E J_c\Big[\int N_k^{(0)} \alpha_t t\,ds + \int M_k^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(0)} \Delta_e\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (306)$$

Werden die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Stabwerks aus $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ oder aus $-X_i = 1$ nach (305) in einem statisch bestimmten Hauptsystem abgeleitet, so ist

$$1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \qquad 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(0)} + 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)}. \quad (307)$$

Der erste Anteil kann als die Arbeit einer virtuellen Belastung nach Abschnitt 18 berechnet werden. Der zweite Anteil ist, nach Maxwell umgeformt,

$$1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = -\sum Y_{H\otimes}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(0)}; \quad 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)} = -\sum Y_{Hi}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(0)}, \quad (H = 1 \ldots r) \quad (308)$$

die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems aus den vorgeschriebenen äußeren Ursachen mit den Komponenten $\delta_{Hk}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems aus $-X_k = 1$.

Die Vorzahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{ki}^{(r)}$ und die Belastungszahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{k\otimes}^{(r)}$ werden daher nach (306) als Funktion von inneren, nach (308) als Funktion von äußeren Kräften berechnet, so daß mit dem Vergleich eine Nachprüfung der Ergebnisse erreicht wird.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der Verschiebungen. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ der Querschnitte (k) eines $r$fach statisch unbestimmten Stabwerks kann ebenso wie die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ in (302) auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen werden. Sie besteht dann aus einem Anteil $\delta_{k\otimes}^{(0)}$, welcher von der Belastung $\mathfrak{P}$, der Temperaturänderung und der Stützenverschiebung herrührt, und einem zweiten Anteil aus den diesen Ursachen zugeordneten r statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H\otimes}^{(0)}$ des Hauptsystems.

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(r)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} + 1_k^{(r)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)}. \quad (309)$$

Da nun auch die Belastung $1_k^{(r)}$ auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen und durch eine äquivalente Belastung $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ ersetzt werden kann, so ist nach Maxwell

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{H\otimes}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(r)},$$

$$1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hi}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(r)}.$$

Da ferner die Verschiebungen $\delta_{Hk}^{(r)}$ des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind, so ist auch die Arbeit der Kräfte $Y_{H\otimes}^{(0)}$, $Y_{Hi}^{(0)}$ Null und damit

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)}. \tag{310}$$

Die Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks können daher im Vergleich zu (305) auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned}
&1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(r)} M_k^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_{h_i} M_k^{(r)} M_i^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds;\\
&1_k^{(r)}\,\delta_{k0}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k0}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(r)} M_0^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{ks}^{(r)} = -E J_c \sum C_{ek}^{(r)} \Delta_e;\\
&1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(0)} = E J_c \sum \Big[\int_h N_k^{(r)} \alpha_t\, t\, ds + \int_h M_k^{(r)} \frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Die vollständige Elastizitätsgleichung (k) eines in der Form b nach (294) angeschriebenen Ansatzes läßt sich ebenso umformen:

$$\begin{aligned}
&X_1\,\delta_{k1}^{(r)} + \cdots X_k\,\delta_{kk}^{(r)} + \cdots X_h\,\delta_{kh}^{(r)} = \delta_{k\otimes}^{(r)},\\
&X_1(1_k^{(r)}\,\delta_{k1}^{(0)}) + \cdots X_k(1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(0)}) + \cdots X_h(1_k^{(r)}\,\delta_{kh}^{(0)}) = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)}.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&X_1\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_1^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_1^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] + \cdots\\
&+ X_k\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_k^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] + \cdots\\
&+ X_h\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_h^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_h^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big]\\
&\quad = \frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_0^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_0^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\\
&+ E J_c\Big[\int N_k^{(n-h)} \alpha_t\, t\, ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \Delta_e\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{312}$$

Da die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ nach (302) durch $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ ($H = 1 \ldots r$) äquivalent ersetzt werden kann, ist

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H\otimes}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{Hi}^{(0)}. \tag{313}$$

Der erste Anteil der Ansätze besteht aus Verschiebungen eines statisch bestimmten Hauptsystems durch ($\mathfrak{P}$, t, Δt, Δ_e) oder $-X_i = 1$, die nach Abschnitt 18 berechnet oder aus Tabellen 12 ff. entnommen werden können. Der zweite Anteil ist die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_{Hk} ($H = 1 \ldots r$) aus der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ mit den Komponenten $\delta_{H\otimes}^{(0)}$, $\delta_{Hi}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzahlen werden auf diese Weise als virtuelle Arbeit von äußeren Kräften angegeben. Der Vergleich mit (311) bildet wiederum eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung.

Die Elastizitätsgleichung als Minimalbedingung der Formänderungsenergie. Die Formänderungsenergie A_i, die Ergänzungsenergie A_i^* eines Stabwerks oder die erweiterte Funktion A_i^{**} ist nach (37) bei Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte ein Minimum. Da nun die statischen Bedingungen durch beliebige Annahmen über die Selbstspannungszustände X_k ($k = 1 \ldots n$) erfüllt werden, erhalten diese in den Funktionen A_i, A_i^*, A_i^{**} die Eigenschaft von unabhängigen veränderlichen Größen, nach denen die Funktionen partiell abgeleitet werden können. Nach dem Minimalprinzip E. Castiglianos entstehen daher bei n statisch überzähligen Größen mit n partiellen Ableitungen nach X_k die folgenden n Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial A_i}{\partial X_k} = 0; \qquad \frac{\partial A_i^*}{\partial X_k} = 0; \qquad \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_k} = 0, \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{314}$$

Diese genügen, abgesehen vom Ausnahmefall, zur eindeutigen Berechnung der n überzähligen Größen X_k, die hier nicht mehr auf den Begriff der einzelnen Schnittkräfte beschränkt werden müssen, sondern beliebig aus ihnen zusammengesetzt sein können, wenn die Gruppen unabhängig voneinander bleiben.

Die Ergänzungsenergie eines Stabwerks, dessen Symmetrieebene mit der Kraftebene zusammenfällt und dessen Spannungen nach den Regeln der technischen Biegelehre berechnet werden, ist nach (158) und (163) mit den vorgeschriebenen Stützenverschiebungen

$$A_i^* = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{\varkappa Q_z^2}{GF}\right) ds - \sum C_e \Delta_e . \tag{315}$$

Soll außerdem eine Temperaturänderung des Baustoffes berücksichtigt werden, so tritt hierfür die Funktion

$$A_i^{**} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{\varkappa Q_z^2}{GF}\right) + \int\left(N\alpha_t t + M\,\frac{\alpha_t \Delta t}{h}\right) ds - \sum C_e \Delta_e . \tag{316}$$

Die Stütz- und Schnittkräfte sind nach dem Superpositionsgesetz Funktionen der unbekannten X_k. Als Ansatz wird (288) gewählt.

$$\begin{aligned}
C &= C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2 - \cdots - X_k C_k - \cdots - X_n C_n ,\\
N &= N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2 - \cdots - X_k N_k - \cdots - X_n N_n ,\\
M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - \cdots - X_k M_k - \cdots - X_n M_n ,\\
Q &= Q_0 - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - \cdots - X_k Q_k - \cdots - X_n Q_n .
\end{aligned}$$

Die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach X_k und damit die Minimalbedingung k ist

$$\begin{aligned}
&\int \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X_k} ds + \int \frac{M}{EJ}\frac{\partial M}{\partial X_k} ds + \int \varkappa \frac{Q}{GF}\frac{\partial Q}{\partial X_k} ds + \int \frac{\partial N}{\partial X_k}\alpha_t t\, ds\\
&\qquad + \int \frac{\partial M}{\partial X_k}\frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_k}\Delta_e = 0 .
\end{aligned} \tag{317}$$

Mit

$$\frac{\partial N}{\partial X_k} = -N_k, \qquad \frac{\partial M}{\partial X_k} = -M_k, \qquad \frac{\partial Q}{\partial X_k} = -Q_k, \qquad \frac{\partial C}{\partial X_k} = -C_k \tag{318}$$

wird dieselbe Elastizitätsbedingung erhalten wie unter (286), welche mit dem Ansatz (288) weiter entwickelt worden ist.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichungen mit dem Prinzip E. Castiglianos nimmt im Gegensatz zu der anschaulichen geometrischen Methode nach (293) die Zwangläufigkeit der mathematischen Behandlung als Vorteil für sich in Anspruch und bietet die Möglichkeit, aus statisch unbestimmten Schnittkräften Y_H neue überzählige Größen X_k zu bilden, mit denen Ansatz und Lösung vereinfacht werden können. Dies wirkt sich jedoch meist nur in einzelnen Ausnahmefällen aus, so daß die Lösung nach E. Castigliano in der Regel einen Umweg bedeutet, da der Ansatz (293) und seine Ergänzung durch den Abschnitt **19** die Elastizitätsgleichungen bereits in integrierter Form bieten.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wird jede Elastizitätsgleichung in Zukunft nach dem Ansatz (293) oder (294) entwickelt.

Worch, G.: Beispiele zur Anwendung des Reduktionssatzes. Beton u. Eisen 1924 S. 39. — Pasternack: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.