Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Statisch überzählige Größen Xk und Hauptsystem

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

einander unabhängige, statisch nicht bestimmbare Stützenwiderstände C oder Schnittkräfte N, M, Q ausgezeichneter Querschnitte bekannt sind. Sie werden in Zukunft unabhängig von ihrer Eigenschaft als Kraft oder Kräftepaar mit $X_k (k = 1 \ldots n)$ bezeichnet. Die Ansätze (281) stützen sich allein auf das Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte und werden daher durch jede Annahme über die Größe und den Richtungssinn der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt.

Statisch überzählige Größen X_k und Hauptsystem. Wird eine Anzahl der n statisch nicht bestimmbaren Stütz- und Schnittkräfte X_k Null gesetzt, so entsteht ein Hauptsystem des vorgelegten Stabwerks. Es ist statisch bestimmt oder statisch unbestimmt, je nachdem alle statisch nicht bestimmbaren Schnittkräfte oder nur eine Anzahl h von ihnen als „überzählig" ausgeschieden werden. Das Hauptsystem heißt in diesem Falle $(n - h)$fach statisch unbestimmt. Als statisch überzählige Größen lassen sich einzelne Komponenten einer Stützkraft oder einzelne Komponenten der einem ausgezeichneten Querschnitt k zugeordneten inneren Kraft $\int_k (\sigma \mp \tau)\, dF$ verwenden. Selbstverständlich können auch zwei oder alle drei Komponenten (N, M, Q) eines Querschnitts gleichzeitig Null gesetzt werden.

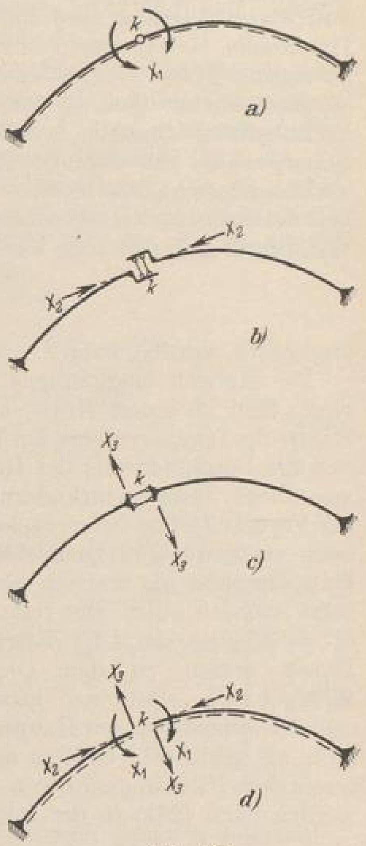

Abb. 152.

Dieser Eingriff in den Spannungszustand des vorgelegten Tragwerks kann durch reibungslose Gelenke, Führungen oder durch die vollkommene Trennung des Stabes verwirklicht werden, ohne damit das Kräftebild des Hauptsystems zu ändern.

a) $X_1 = M_k = \int_k \sigma z\, df$.

Mit $X_1 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einer Längs- nnd Querkraft, die von einem Gelenk Abb. 152a übertragen werden können.

b) $X_2 = N_k = \int_k \sigma\, df$.

Mit $X_2 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einem Biegungsmoment und einer Querkraft, die von einer F ü h r u n g Abb. 152b übertragen werden können.

c) $X_3 = Q_k = \int_k \tau\, df$.

Mit $X_3 = 0$ bestehen die inneren Kräfte im Querschnitt k nur aus einem Biegungsmoment und einer Längskraft, die von einer F ü h r u n g Abb. 152c übertragen werden können.

d) $X_1 = M_k, \; X_2 = N_k, \; X_3 = Q_k$.

Mit $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ sind alle inneren Kräfte im Querschnitt k Null, so daß das Tragwerk hier u n t e r b r o c h e n werden kann. Das Hauptsystem Abb. 152d ist statisch bestimmt und besteht aus zwei Kragträgern.

Gleichgewicht einer b e l i e b i g e n Gruppe von äußeren Kräften ist nur an einem Hauptsystem mit kinematisch starrem Aufbau möglich. Der Ausnahmefall der unendlich kleinen Beweglichkeit des Hauptsystems ist ebenfalls ausgeschlossen. Im übrigen können die überzähligen Größen X_k nach Art, Lage und Richtungssinn grundsätzlich beliebig ausgewählt werden. Ist das Hauptsystem jedoch aus besonderen Gründen beweglich, so sind zum Gleichgewicht ausgezeichnete Eigenschaften der Belastung $\mathfrak{P}$ und der statisch unbestimmten äußeren Kräfte X_k notwendig.

Geometrische Verträglichkeit und Superpositionsgesetz im kinematisch starren Hauptsystem. Die Gleichgewichtsbedingungen werden bei jeder Annahme über die Größe der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt. Dagegen ist nach (279) nur eine durch Größe und Richtungssinn ausgezeichnete Gruppe vorhanden, die in Verbindung mit der Belastung $\mathfrak{P}$ die mit dem vorgelegten Stabwerk verträgliche Formänderung des Hauptsystems erzeugt. Diese ist durch die Stützung und durch die Dehnung und Biegung der Stäbe, also durch die Schnittkräfte bestimmt. Spannung und Formänderung sind im Bereiche des zulässigen Tragvermögens durch das Hookesche Gesetz linear miteinander verknüpft. Daher entstehen zwischen der Belastung $\mathfrak{P}(P_1 \ldots P_n)$, den Schnittkräften und der Verschiebung oder Verdrehung ausgezeichneter Querschnitte k lineare algebraische Gleichungen oder lineare Differentialgleichungen, welche durch Superposition der Absolutglieder, also durch Superposition der äußeren Kräfte $\mathfrak{P}$ und der anderen äußeren Ursachen gelöst werden können. Das Hookesche Gesetz ist also die Voraussetzung für die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, nach dem irgend eine mechanische oder geometrische Wirkung W_h (Kraft oder Verschiebung) eines statisch unbestimmten Tragwerks als

$$W_h = \sum_{k=1}^{k=n} W_{hk} P_k \tag{284}$$

angegeben werden kann.

Die statisch überzähligen Stütz- und Schnittkräfte $X_k (k = 1 \ldots n)$ des Stabwerks sind als innere Kräfte stets Doppelkräfte und neben der Belastung $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte des Hauptsystems. Ihr Richtungssinn und ihre Größe werden derart bestimmt, daß die Formänderung des Hauptsystems aus seiner Belastung $\mathfrak{P}, X_k (k = 1 \ldots n)$, aus seiner Temperaturänderung $t, \Delta t$ und seinen Stützenverschiebungen Δ_e mit der Formänderung des vorgelegten Tragwerks übereinstimmt. Dies gilt insbesondere auch an denjenigen Querschnitten k, an welchen Schnittkräfte zur Bildung des Hauptsystems als statisch überzählig angesehen und durch äußere Kräfte X_k ersetzt worden sind. Die relativen elastischen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_k^{(n)} = \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(0)}$ der Ufer dieser Querschnitte k des Hauptsystems sind daher Null. Damit treten zu den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}, X_k (k = 1 \ldots n)$ noch geometrische Verträglichkeitsbedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems. In diesem werden die Komponenten δ_k, die stets als gerichtete Größen anzusehen sind, in der Regel nach Vereinbarung entgegen dem Richtungssinn von X_k positiv gerechnet. Die Verträglichkeitsbedingungen werden nach (281) in der folgenden Form angeschrieben:

$$\left.\begin{aligned} & 1_k^{(0)}\,\delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_k \quad = 0\,, && (k = 1, \ldots, n) \\ \text{oder} \quad & \\ & 1_k^{(n-h)}\,\delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(n-h)} = 1_k^{(n-h)}\,\delta_k = 0\,, && (k = 1, \ldots, h)\,. \end{aligned}\right\} \tag{285}$$

Die Anzahl der Verträglichkeitsbedingungen stimmt mit der Anzahl n oder h der überzähligen Größen X_k überein, so daß die notwendige und hinreichende Grundlage zu ihrer Berechnung vorhanden ist.

Entwicklung der Elastizitätsgleichung aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen. Die relative Verschiebung δ_k der Ufer k eines ebenen, statisch bestimmten oder $(n - h)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch äußere Kräfte $\mathfrak{P}, X_k$, durch Temperaturänderung und Stützenbewegung im Sinne von $-X_k$ wird nach (35) aus dem Vergleich mit einem dem vorhandenen Kräftebild benachbarten Spannungszustande abgeleitet. Hierbei entstehen die Ansätze (285) mit der Arbeit aus einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(0)}$ oder $-X_k = 1_k^{(n-h)}$