Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Entwicklung der Elastizitätsgleichung aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

übrigen können die überzähligen Größen X_k nach Art, Lage und Richtungssinn grundsätzlich beliebig ausgewählt werden. Ist das Hauptsystem jedoch aus besonderen Gründen beweglich, so sind zum Gleichgewicht ausgezeichnete Eigenschaften der Belastung $\mathfrak{P}$ und der statisch unbestimmten äußeren Kräfte X_k notwendig.

Geometrische Verträglichkeit und Superpositionsgesetz im kinematisch starren Hauptsystem. Die Gleichgewichtsbedingungen werden bei jeder Annahme über die Größe der statisch unbestimmten Kräfte X_k erfüllt. Dagegen ist nach (279) nur eine durch Größe und Richtungssinn ausgezeichnete Gruppe vorhanden, die in Verbindung mit der Belastung $\mathfrak{P}$ die mit dem vorgelegten Stabwerk verträgliche Formänderung des Hauptsystems erzeugt. Diese ist durch die Stützung und durch die Dehnung und Biegung der Stäbe, also durch die Schnittkräfte bestimmt. Spannung und Formänderung sind im Bereiche des zulässigen Tragvermögens durch das Hookesche Gesetz linear miteinander verknüpft. Daher entstehen zwischen der Belastung $\mathfrak{P}(P_1 \ldots P_n)$, den Schnittkräften und der Verschiebung oder Verdrehung ausgezeichneter Querschnitte k lineare algebraische Gleichungen oder lineare Differentialgleichungen, welche durch Superposition der Absolutglieder, also durch Superposition der äußeren Kräfte $\mathfrak{P}$ und der anderen äußeren Ursachen gelöst werden können. Das Hookesche Gesetz ist also die Voraussetzung für die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, nach dem irgend eine mechanische oder geometrische Wirkung W_h (Kraft oder Verschiebung) eines statisch unbestimmten Tragwerks als

$$W_h = \sum_{k=1}^{k=n} W_{hk} P_k \tag{284}$$

angegeben werden kann.

Die statisch überzähligen Stütz- und Schnittkräfte $X_k (k = 1 \ldots n)$ des Stabwerks sind als innere Kräfte stets Doppelkräfte und neben der Belastung $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte des Hauptsystems. Ihr Richtungssinn und ihre Größe werden derart bestimmt, daß die Formänderung des Hauptsystems aus seiner Belastung $\mathfrak{P}, X_k (k = 1 \ldots n)$, aus seiner Temperaturänderung $t, \Delta t$ und seinen Stützenverschiebungen Δ_e mit der Formänderung des vorgelegten Tragwerks übereinstimmt. Dies gilt insbesondere auch an denjenigen Querschnitten k, an welchen Schnittkräfte zur Bildung des Hauptsystems als statisch überzählig angesehen und durch äußere Kräfte X_k ersetzt worden sind. Die relativen elastischen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_k^{(n)} = \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(0)}$ der Ufer dieser Querschnitte k des Hauptsystems sind daher Null. Damit treten zu den Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}, X_k (k = 1 \ldots n)$ noch geometrische Verträglichkeitsbedingungen für den Verschiebungszustand des Hauptsystems. In diesem werden die Komponenten δ_k, die stets als gerichtete Größen anzusehen sind, in der Regel nach Vereinbarung entgegen dem Richtungssinn von X_k positiv gerechnet. Die Verträglichkeitsbedingungen werden nach (281) in der folgenden Form angeschrieben:

$$\left.\begin{aligned} & 1_k^{(0)} \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(0)} = 1_k^{(0)} \delta_k \quad = 0\,, \qquad (k = 1, \ldots, n) \\ \text{oder} \quad & \\ & 1_k^{(n-h)} \delta_{k(\mathfrak{P}, \Sigma X)}^{(n-h)} = 1_k^{(n-h)} \delta_k = 0\,, \qquad (k = 1, \ldots, h)\,. \end{aligned}\right\} \tag{285}$$

Die Anzahl der Verträglichkeitsbedingungen stimmt mit der Anzahl n oder h der überzähligen Größen X_k überein, so daß die notwendige und hinreichende Grundlage zu ihrer Berechnung vorhanden ist.

Entwicklung der Elastizitätsgleichung aus den geometrischen Verträglichkeitsbedingungen. Die relative Verschiebung δ_k der Ufer k eines ebenen, statisch bestimmten oder $(n - h)$ fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch äußere Kräfte $\mathfrak{P}, X_k$, durch Temperaturänderung und Stützenbewegung im Sinne von $-X_k$ wird nach (35) aus dem Vergleich mit einem dem vorhandenen Kräftebild benachbarten Spannungszustande abgeleitet. Hierbei entstehen die Ansätze (285) mit der Arbeit aus einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(0)}$ oder $-X_k = 1_k^{(n-h)}$

und den Komponenten des vorgeschriebenen statisch unbestimmten Verschiebungszustandes $(\delta_k, \varepsilon_0, \delta\psi)$.

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad 1_k^{(0)}\delta_k &= \int N_k^{(0)}\frac{N\,ds}{EF} + \int M_k^{(0)}\frac{M\,ds}{EJ} + \int Q_k^{(0)}\varkappa\frac{Q\,ds}{GF}\\
&\quad + \int N_k^{(0)}\alpha_t\,t\,ds + \int M_k^{(0)}\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(0)}\Delta_e = 0. \qquad (286)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad 1_k^{(n-h)}\delta_k &= \int N_k^{(n-h)}\frac{N\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)}\frac{M\,ds}{EJ} + \int Q_k^{(n-h)}\varkappa\frac{Q\,ds}{GF}\\
&\quad + \int N_k^{(n-h)}\alpha_t\,t\,ds + \int M_k^{(n-h)}\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)}\Delta_e = 0. \qquad (287)
\end{aligned}
$$

Diese werden nach (281) durch Superposition in die Anteile aus den überzähligen Größen X_k und in die Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ (Index 0), aus der Temperaturänderung $t, \Delta t$ (Index t), aus den Stützenverschiebungen Δ_e (Index s) zerlegt. Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems aus allen äußeren Ursachen $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ zusammen $(k = 1 \ldots n)$ oder $(k = 1 \ldots h)$ erhalten die Bezeichnung $C_\otimes, N_\otimes, M_\otimes, Q_\otimes$. Die Definition der positiven Richtung des Vektors δ_k des Hauptsystems nach S. 156 bestimmt mit den Schnittkräften $C_k^{(0)}, N_k^{(0)}, M_k^{(0)}, Q_k^{(0)}$ oder $C_k^{(n-h)}, N_k^{(n-h)}, M_k^{(n-h)}, Q_k^{(n-h)}$ aus $-X_k = 1$ die Form der Superposition.

a) Superposition im statisch bestimmten Hauptsystem:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
C_\otimes^{(0)} = C_0^{(0)}; \quad N_\otimes^{(0)} = N_0^{(0)}; & M_\otimes^{(0)} = M_0^{(0)}; \quad Q_\otimes^{(0)} = Q_0^{(0)};\\
C = C_0^{(0)} - \sum X_k C_k^{(0)}; & N = N_0^{(0)} - \sum X_k N_k^{(0)};\\
M = M_0^{(0)} - \sum X_k M_k^{(0)}; & Q = Q_0^{(0)} - \sum X_k Q_k^{(0)};\\
\multicolumn{2}{c}{(k = 1, \ldots, n)}
\end{array}
\right| \qquad (288)
$$

b) Superposition im $(n-h)$fach statisch unbestimmten Hauptsystem:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
C_\otimes^{(n-h)} = C_0^{(n-h)} + C_t^{(n-h)} + C_s^{(n-h)}; & C = C_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k C_k^{(n-h)};\\
N_\otimes^{(n-h)} = N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)}; & N = N_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k N_k^{(n-h)};\\
M_\otimes^{(n-h)} = M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)}; & M = M_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k M_k^{(n-h)};\\
Q_\otimes^{(n-h)} = Q_0^{(n-h)} + Q_t^{(n-h)} + Q_s^{(n-h)}; & Q = Q_\otimes^{(n-h)} - \sum X_k Q_k^{(n-h)};\\
\multicolumn{2}{c}{(k = 1, \ldots, h).}
\end{array}
\right| \qquad (289)
$$

Die Verträglichkeitsbedingungen (286) und (287) lassen sich darnach folgendermaßen entwickeln:

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form a:

$$
\left.
\begin{aligned}
1_k^{(0)}\delta_k = 0 &= \int N_k\frac{N_0\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_0\,ds}{EJ} + \int\varkappa Q_k\frac{Q_0\,ds}{GF} + \int N_k\alpha_t t\,ds + \int M_k\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds\\
&\quad - \sum C_{ek}\Delta_e - X_1\left[\int N_k\frac{N_1\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_1\,ds}{EJ} + \int\varkappa Q_k\frac{Q_1\,ds}{GF}\right] - \cdots\\
&\quad - X_k\left[\int\frac{N_k^2\,ds}{EF} + \int\frac{M_k^2\,ds}{EJ} + \int\varkappa\frac{Q_k^2\,ds}{GF}\right] - \cdots\\
&\quad - X_n\left[\int N_k\frac{N_n\,ds}{EF} + \int M_k\frac{M_n\,ds}{EJ} + \int\varkappa Q_k\frac{Q_n\,ds}{GF}\right].
\end{aligned}
\right| \qquad (290)
$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form a:

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(n-h)}\delta_k = 0 = &\int N_k^{(n-h)} \frac{N_{\otimes}^{(n-h)}\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M_{\otimes}^{(n-h)}\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)} \frac{Q_{\otimes}^{(n-h)}\,ds}{GF} \\ + &\int N_k^{(n-h)} \alpha_t t\,ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \Delta_e \\ - X_1 &\left[\int N_k^{(n-h)} \frac{N_1^{(n-h)}\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M_1^{(n-h)}\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)} \frac{Q_1^{(n-h)}\,ds}{GF}\right] - \cdots \\ - X_k &\left[\int \frac{N_k^{(n-h)^2}\,ds}{EF} + \int \frac{M_k^{(n-h)^2}\,ds}{EJ} + \int \varkappa \frac{Q_k^{(n-h)^2}\,ds}{GF}\right] - \cdots \\ - X_h &\left[\int N_k^{(n-h)} \frac{N_h^{(n-h)}\,ds}{EF} + \int M_k^{(n-h)} \frac{M_h^{(n-h)}\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k^{(n-h)} \frac{Q_h^{(n-h)}\,ds}{GF}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (291)$$

Das erste Glied des Ansatzes (290)

$$\int N_k \frac{N_0\,ds}{EF} + \int M_k \frac{M_0\,ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k \frac{Q_0\,ds}{GF} + \int N_k \alpha_t t\,ds + \int M_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds$$
$$- \sum C_{ek} \Delta_e = 1_k(\delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}) = 1_k \delta_{k\otimes}$$

ist der Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems durch eine Belastung $\mathfrak{P}$, die Temperaturänderung $(t, \Delta t)$ und durch Stützenverschiebungen Δ_e. Das positive Ergebnis bedeutet daher die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung des Punkte- oder Geradenpaares k des Hauptsystems aus diesen äußeren Ursachen im Sinne von $-X_k$. Der Ansatz

$$\int N_k N_1 \frac{ds}{EF} + \int M_k M_1 \frac{ds}{EJ} + \int \varkappa Q_k Q_1 \frac{ds}{GF} = 1_k \delta_{k1} \qquad (292)$$

wird als Arbeit der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems durch $-X_1 = 1$ erkannt. Das positive Ergebnis ist die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung des Punkte- oder Geradenpaares k des Hauptsystems infolge $-X_1 = 1$. Die entsprechenden Teilwerte von (291) sind Arbeiten einer virtuellen Belastung $-X_k = 1_k^{(n-h)}$ bei einer Formänderung des statisch unbestimmten Hauptsystems. Das positive Ergebnis bedeutet daher auch die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$, $\delta_{k1}^{(n-h)}$ im Sinne von $-X_k$. Die Ansätze (290) und (291) können damit folgendermaßen verwendet werden:

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form b:

$$\delta_k = 0 = \delta_{k\otimes} - X_1 \delta_{k1} - X_2 \delta_{k2} - \cdots - X_k \delta_{kk} - \cdots - X_n \delta_{kn}. \qquad (293)$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form b:

$$\delta_k = 0 = \delta_{k\otimes}^{(n-h)} - X_1 \delta_{k1}^{(n-h)} - \cdots - X_k \delta_{kk}^{(n-h)} - \cdots - X_h \delta_{kh}^{(n-h)}. \qquad (294)$$

Die Form b bestätigt das Superpositionsgesetz (284) für die Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Systems und kann daher auch unmittelbar angeschrieben und nach (290) entwickelt werden. Sie bildet durch ihre übersichtliche geometrische Bedeutung die einfachste Grundlage für die unmittelbare Berechnung der statisch überzähligen Schnittkräfte $(X_1 \ldots X_n)$.

Die von der Belastung unabhängigen Verschiebungen δ_{ki}, $\delta_{ki}^{(n-h)}$ des Hauptsystems werden im Rahmen der algebraischen Lösung als Vorzahlen der überzähligen

Größen bezeichnet. Die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}$, $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ des Hauptsystems aus Belastung, Temperaturänderung und Stützensenkungen sind die Absolutglieder des Ansatzes und heißen Belastungszahlen. Sie werden bei einer in dem beliebigen Punkte m des Lastgurtes wirkenden Einzellast $P_m = 1$ t mit δ_{km}, $\delta_{km}^{(n-h)}$ bezeichnet und bedeuten dann die Ordinaten der Einflußlinien der gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung der Ufer des Querschnitts k im Sinne von $-X_k$.

In den Sätzen von Betti und Maxwell (38) wird die virtuelle Arbeit einer Kräftegruppe P_m bei der Verschiebung $\delta_{mk}^{(n)}$ eines $n$fach statisch unbestimmten Stabwerks infolge der Belastung durch eine Kräftegruppe P_k mit derjenigen der Kräftegruppe P_k bei der Verschiebung $\delta_{km}^{(n)}$ durch die Belastung P_m verglichen.

$$\sum P_m \delta_{mk}^{(n)} = \sum P_k \delta_{km}^{(n)}. \tag{295}$$

Daher ist in einem statisch bestimmten Hauptsystem

$$1_k \delta_{k\Sigma(P,X)} = \sum P_m \delta_{mk} - X_1 \delta_{1k} - \cdots - X_k \delta_{kk} - \cdots - X_n \delta_{nk} = 0, \tag{296}$$

so daß noch eine dritte Form c der Elastizitätsgleichung entsteht.

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$X_1 \delta_{1k} + X_2 \delta_{2k} + \cdots + X_k \delta_{kk} + \cdots + X_n \delta_{nk} = \sum P_m \delta_{mk} + \delta_{kt} + \delta_{ks}. \tag{297}$$

Elastizitätsgleichung (k) für das $(n-h)$fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$\left.\begin{aligned} X_1 \delta_{1k}^{(n-h)} + X_2 \delta_{2k}^{(n-h)} + \cdots + X_k \delta_{kk}^{(n-h)} + \cdots + X_h \delta_{hk}^{(n-h)} \\ = \sum P_m \delta_{mk}^{(n-h)} + \delta_{kt}^{(n-h)} + \delta_{ks}^{(n-h)}. \end{aligned}\right\} \tag{298}$$

Die Vorzahlen δ_{ik} jeder Gleichung (k) sind jetzt Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte i des Hauptsystems im Sinne von $-X_i$ durch die Belastung $-X_k = 1$. Die Belastungszahlen δ_{mk} und $\delta_{mk}^{(n-h)}$ sind Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes im Sinne der Last P_m infolge $-X_k = 1$. Besteht die Gruppe ΣP_m aus gleichgerichteten Lasten, so sind δ_{mk}, $\delta_{mk}^{(n-h)}$ Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für $-X_k = 1$. Sie werden bei einer graphischen Untersuchung nach den Abschnitten 20, 21 zusammen mit den Vorzahlen aus einem Verschiebungsplan des Hauptsystems für $-X_k = 1$ erhalten.

Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen. Die Ansätze a bis c unterscheiden sich nur durch die Form der Rechenvorschrift. Die Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes a werden als Ausdrücke für die Arbeit einer virtuellen Belastung angeschrieben und durch Integration mathematisch gewonnen. Die Vorzahlen δ_{ki}, δ_{kk} und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}$ der Ansätze b und c sind relative Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Sie werden nach den Tabellen des Abschn. 19 eingesetzt, nach Abschn. 18 berechnet oder zeichnerisch gefunden.

Die vollständigen Vorzahlen und Belastungszahlen bestehen im allgemeinen aus drei Summanden, welche den Einfluß der Längs- und Querkräfte und denjenigen der Biegungsmomente getrennt zum Ausdruck bringen. Der Anteil der Querkräfte ist stets unbedeutend und kann gegenüber dem Fehler aus anderen ungenauen Annahmen der Rechnung vernachlässigt werden. Dasselbe gilt bei biegungssteifen Stäben zumeist auch von dem Anteil der Längskräfte. Daher werden in der Regel die Vorzahlen und Belastungszahlen, abgesehen von Temperaturwirkung und Stützensenkung, auf den Anteil der Biegungsmomente beschränkt. Dies gilt besonders bei neu zu entwerfenden Bauwerken, deren Querschnitte zunächst auf Grund von Schätzungen oder überschlägigen Berechnungen angenommen werden