Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Größen bezeichnet. Die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}$, $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ des Hauptsystems aus Belastung, Temperaturänderung und Stützensenkungen sind die Absolutglieder des Ansatzes und heißen Belastungszahlen. Sie werden bei einer in dem beliebigen Punkte m des Lastgurtes wirkenden Einzellast $P_m = 1$ t mit δ_{km}, $\delta_{km}^{(n-h)}$ bezeichnet und bedeuten dann die Ordinaten der Einflußlinien der gegenseitigen Verschiebung oder Verdrehung der Ufer des Querschnitts k im Sinne von $-X_k$.

In den Sätzen von Betti und Maxwell (38) wird die virtuelle Arbeit einer Kräftegruppe P_m bei der Verschiebung $\delta_{mk}^{(n)}$ eines $n$fach statisch unbestimmten Stabwerks infolge der Belastung durch eine Kräftegruppe P_k mit derjenigen der Kräftegruppe P_k bei der Verschiebung $\delta_{km}^{(n)}$ durch die Belastung P_m verglichen.

$$\sum P_m \delta_{mk}^{(n)} = \sum P_k \delta_{km}^{(n)} . \tag{295}$$

Daher ist in einem statisch bestimmten Hauptsystem

$$1_k \delta_{k\Sigma(P,X)} = \sum P_m \delta_{mk} - X_1 \delta_{1k} - \cdots - X_k \delta_{kk} - \cdots - X_n \delta_{nk} = 0 , \tag{296}$$

so daß noch eine dritte Form c der Elastizitätsgleichung entsteht.

Elastizitätsgleichung (k) für das statisch bestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$X_1 \delta_{1k} + X_2 \delta_{2k} + \cdots + X_k \delta_{kk} + \cdots + X_n \delta_{nk} = \sum P_m \delta_{mk} + \delta_{kt} + \delta_{ks} . \tag{297}$$

Elastizitätsgleichung (k) für das (n $- h$)fach statisch unbestimmte Hauptsystem:

Form c:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{1k}^{(n-h)} + X_2 \delta_{2k}^{(n-h)} + \cdots + X_k \delta_{kk}^{(n-h)} + \cdots + X_h \delta_{hk}^{(n-h)} \\ = \sum P_m \delta_{mk}^{(n-h)} + \delta_{kt}^{(n-h)} + \delta_{ks}^{(n-h)} . \end{aligned} \right\} \tag{298}$$

Die Vorzahlen δ_{ik} jeder Gleichung (k) sind jetzt Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte i des Hauptsystems im Sinne von $-X_i$ durch die Belastung $-X_k = 1$. Die Belastungszahlen δ_{mk} und $\delta_{mk}^{(n-h)}$ sind Verschiebungen der Punkte m des Lastgurtes im Sinne der Last P_m infolge $-X_k = 1$. Besteht die Gruppe ΣP_m aus gleichgerichteten Lasten, so sind δ_{mk}, $\delta_{mk}^{(n-h)}$ Ordinaten der Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für $-X_k = 1$. Sie werden bei einer graphischen Untersuchung nach den Abschnitten 20, 21 zusammen mit den Vorzahlen aus einem Verschiebungsplan des Hauptsystems für $-X_k = 1$ erhalten.

Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen. Die Ansätze a bis c unterscheiden sich nur durch die Form der Rechenvorschrift. Die Vorzahlen und Belastungszahlen des Ansatzes a werden als Ausdrücke für die Arbeit einer virtuellen Belastung angeschrieben und durch Integration mathematisch gewonnen. Die Vorzahlen δ_{ki}, δ_{kk} und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}$ der Ansätze b und c sind relative Verschiebungen oder Verdrehungen ausgezeichneter Querschnitte k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Sie werden nach den Tabellen des Abschn. 19 eingesetzt, nach Abschn. 18 berechnet oder zeichnerisch gefunden.

Die vollständigen Vorzahlen und Belastungszahlen bestehen im allgemeinen aus drei Summanden, welche den Einfluß der Längs- und Querkräfte und denjenigen der Biegungsmomente getrennt zum Ausdruck bringen. Der Anteil der Querkräfte ist stets unbedeutend und kann gegenüber dem Fehler aus anderen ungenauen Annahmen der Rechnung vernachlässigt werden. Dasselbe gilt bei biegungssteifen Stäben zumeist auch von dem Anteil der Längskräfte. Daher werden in der Regel die Vorzahlen und Belastungszahlen, abgesehen von Temperaturwirkung und Stützensenkung, auf den Anteil der Biegungsmomente beschränkt. Dies gilt besonders bei neu zu entwerfenden Bauwerken, deren Querschnitte zunächst auf Grund von Schätzungen oder überschlägigen Berechnungen angenommen werden müssen. Da die Abschätzung von Verhältniszahlen einfacher ist, wird ein EJ_cfacher Betrag der Vorzahlen und Belastungszahlen berechnet. J_c ist ein Vergleichswert, durch welchen das Verhältnis J_c/J in möglichst einfachen Zahlen angegeben werden kann. Dasselbe gilt von der Einführung eines Vergleichsquerschnitts F_c, so daß der EJ_cfache, vollständige Betrag einer Vorzahl folgendermaßen lautet:

$$E J_c \delta_{k i} = \frac{J_c}{F_c} \int N_k N_i \frac{F_c}{F} d s + \int M_k M_i \frac{J_c}{J} d s + \frac{E J_c}{G F_c} \int \varkappa Q_k Q_i \frac{F_c}{F} d s \approx \int M_k M_i \frac{J_c}{J} d s. \tag{299}$$

Da der EJ_cfache Betrag der Formänderungen aus diesem Grunde bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke die Regel ist, werden in Zukunft zur Abkürzung des Ansatzes die EJ_c-fachen Beträge der Verschiebungen oder Verdrehungen mit δ_{ik}, δ_{kk}, $\delta_{k\otimes}$ bezeichnet. Der absolute Betrag von J_c ist nur zur Berechnung von δ_{kt} und δ_{ks} notwendig.

Die analytische Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen zwingt in der Regel zur Aufteilung des Integrationsbereiches in einzelne Strecken l_h, deren elastische Eigenschaften durch ein mittleres Trägheitsmoment J_h und eine die Querschnittsgestaltung bestimmende Funktion $J_h/J = \zeta_h$ beschrieben werden.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{k k} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^2 \frac{J_h}{J} d s; \qquad \delta_{i k} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_i M_k \frac{J_h}{J} d s; \qquad \delta_{k 0} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k M_0 \frac{J_h}{J} d s, \\ &\delta_{k t} = E J_c \Sigma \left(\int_h N_k \alpha_t t \, d s + \int_h M_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} d s \right); \qquad \delta_{k s} = - E J_c \Sigma C_{e k} \Delta_e. \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

Die Integrale werden nur dann formal integriert, wenn J_h/J und F_h/F konstant sind oder durch eine leicht zu integrierende algebraische Funktion ersetzt werden können.

In vielen Fällen ist $\zeta_h = J_h/J = 1$ oder $J_h/J \cos\alpha = 1$. Die Rechnung ist dann besonders einfach. Sie wird mit Hilfe der Tabellen 12 und 16 ausgeführt. Andere Annahmen über die Funktionen J_h/J und $J_h/J \cos\alpha$ sind in Abschn. 18 und in den Tabellen 13 bis 15 ausführlich erörtert worden. Dasselbe gilt von der numerischen oder graphischen Lösung des Integrals.

Die Einflußlinien der überzähligen Größen setzen sich aus den erweiterten Biegelinien $\delta_{m k} (k = 1 \ldots n)$ zusammen, welche für den Lastgurt des Hauptsystems berechnet werden. Dies geschieht nach den Angaben in den Abschnitten 20 und 21. Sie werden je nach der Richtung der wandernden Last $P_m = 1\,t$ in senkrechter, waagerechter oder beliebig schräger Richtung aufgetragen.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der virtuellen Belastung. Die Vorzahlen $\delta_{ki}^{(n-h)}$, $\delta_{kk}^{(n-h)}$ und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ der Elastizitätsgleichungen für das $(n-h) = r$fach statisch unbestimmte Hauptsystem werden nach S. 158 als Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung 1_k bestimmt. Sie bedeuten geometrisch den EJ_cfachen Betrag der gegenseitigen Verschiebung und Verdrehung der Ufer eines ausgezeichneten Querschnitts k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Der Einfluß der Längs- und Querkräfte wird auch hier nach Abschn. 18 vernachlässigt, so daß nach (289), (291) und S. 160 die Ansätze eines $(n-h) = r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^{(r)2} \frac{J_h}{J} d s; \qquad 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^{(r)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} d s; \\ &\qquad 1_k^{(r)} \delta_{k0}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int_h M_k^{(r)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J} d s, \end{aligned}\right\} \tag{301a}$$