Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der virtuellen Belastung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

müssen. Da die Abschätzung von Verhältniszahlen einfacher ist, wird ein EJ_cfacher Betrag der Vorzahlen und Belastungszahlen berechnet. J_c ist ein Vergleichswert, durch welchen das Verhältnis J_c/J in möglichst einfachen Zahlen angegeben werden kann. Dasselbe gilt von der Einführung eines Vergleichsquerschnitts F_c, so daß der EJ_cfache, vollständige Betrag einer Vorzahl folgendermaßen lautet:

$$E J_c \delta_{k i} = \frac{J_c}{F_c} \int N_k N_i \frac{F_c}{F} d s + \int M_k M_i \frac{J_c}{J} d s + \frac{E J_c}{G F_c} \int \varkappa Q_k Q_i \frac{F_c}{F} d s \approx \int M_k M_i \frac{J_c}{J} d s. \tag{299}$$

Da der EJ_cfache Betrag der Formänderungen aus diesem Grunde bei der Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke die Regel ist, werden in Zukunft zur Abkürzung des Ansatzes die EJ_c-fachen Beträge der Verschiebungen oder Verdrehungen mit δ_{ik}, δ_{kk}, $\delta_{k\otimes}$ bezeichnet. Der absolute Betrag von J_c ist nur zur Berechnung von δ_{kt} und δ_{ks} notwendig.

Die analytische Berechnung der Vorzahlen und Belastungszahlen zwingt in der Regel zur Aufteilung des Integrationsbereiches in einzelne Strecken l_h, deren elastische Eigenschaften durch ein mittleres Trägheitsmoment J_h und eine die Querschnittsgestaltung bestimmende Funktion $J_h/J = \zeta_h$ beschrieben werden.

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{k k} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int\limits_h M_k^2 \frac{J_h}{J} d s; \qquad \delta_{i k} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int\limits_h M_i M_k \frac{J_h}{J} d s; \qquad \delta_{k 0} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int\limits_h M_k M_0 \frac{J_h}{J} d s, \\ &\delta_{k t} = E J_c \Sigma \left(\int\limits_h N_k \alpha_t t \, d s + \int\limits_h M_k \frac{\alpha_t \Delta t}{h} d s \right); \qquad \delta_{k s} = -E J_c \Sigma C_{e k} \Delta_e. \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

Die Integrale werden nur dann formal integriert, wenn J_h/J und F_h/F konstant sind oder durch eine leicht zu integrierende algebraische Funktion ersetzt werden können.

In vielen Fällen ist $\zeta_h = J_h/J = 1$ oder $J_h/J \cos\alpha = 1$. Die Rechnung ist dann besonders einfach. Sie wird mit Hilfe der Tabellen 12 und 16 ausgeführt. Andere Annahmen über die Funktionen J_h/J und $J_h/J \cos\alpha$ sind in Abschn. 18 und in den Tabellen 13 bis 15 ausführlich erörtert worden. Dasselbe gilt von der numerischen oder graphischen Lösung des Integrals.

Die Einflußlinien der überzähligen Größen setzen sich aus den erweiterten Biegelinien $\delta_{m k} (k = 1 \ldots n)$ zusammen, welche für den Lastgurt des Hauptsystems berechnet werden. Dies geschieht nach den Angaben in den Abschnitten 20 und 21. Sie werden je nach der Richtung der wandernden Last $P_m = 1\,t$ in senkrechter, waagerechter oder beliebig schräger Richtung aufgetragen.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der virtuellen Belastung. Die Vorzahlen $\delta_{ki}^{(n-h)}$, $\delta_{kk}^{(n-h)}$ und die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ der Elastizitätsgleichungen für das $(n-h) = r$fach statisch unbestimmte Hauptsystem werden nach S. 158 als Ausdruck für die Arbeit einer virtuellen Belastung 1_k bestimmt. Sie bedeuten geometrisch den EJ_cfachen Betrag der gegenseitigen Verschiebung und Verdrehung der Ufer eines ausgezeichneten Querschnitts k des Hauptsystems im Sinne von $-X_k$. Der Einfluß der Längs- und Querkräfte wird auch hier nach Abschn. 18 vernachlässigt, so daß nach (289), (291) und S. 160 die Ansätze eines $(n-h) = r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &1_k^{(r)} \delta_{kk}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int\limits_h M_k^{(r)2} \frac{J_h}{J} d s; \qquad 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int\limits_h M_k^{(r)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J} d s; \\ &\qquad\qquad 1_k^{(r)} \delta_{k0}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h} \int\limits_h M_k^{(r)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J} d s, \end{aligned}\right\} \tag{301a}$$

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int_h N_k^{(r)} N_t^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds + \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(r)} M_t^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds \\ &\quad + E J_c \sum\left[\int_h N_k^{(r)} \alpha_t\, t\, ds + \int_h M_k^{(r)} \frac{\alpha_t\, \Delta t}{h}\,ds\right], \\ 1_k^{(r)}\,\delta_{ks}^{(r)} &= \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int_h N_k^{(r)} N_s^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds + \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(r)} M_s^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds - E J_c \sum C_{ek}^{(r)} \Delta_e. \end{aligned}\right\} \quad (301\text{b})$$

Die Rechenvorschrift (301) läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems durch die ihr äquivalenten äußeren Kräfte $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ eines darin enthaltenen, beliebigen, statisch bestimmten Hauptsystems mit den Überzähligen Y_H ersetzt wird.

$$1_k^{(r)} \equiv (1_k^{(0)},\ Y_{Hk}^{(0)}), \qquad (H = 1 \ldots r). \quad (302)$$

In derselben Weise können auch die Komponenten $\delta_{ki}^{(r)}$, $\delta_{k\otimes}^{(r)} \ldots$ des Verschiebungszustandes des statisch unbestimmten Hauptsystems als Funktion der vorgeschriebenen Belastung $\mathfrak{P}$ und aller übrigen äußeren Ursachen aus der Formänderung eines statisch bestimmten Hauptsystems abgeleitet werden. Die Formänderung wird, abgesehen von der Temperaturänderung und Stützenbewegung, von einer Gruppe von äußeren Kräften hervorgerufen, die aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den ihr zugeordneten statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H0}^{(0)}$ besteht. Diese enthalten unter Umständen auch Anteile aus Temperatur- und Stützenänderung.

$$\left.\begin{aligned} \delta_{k\otimes}^{(r)} &= \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum_{H=1}^{r} \delta_{kH}^{(0)}\, Y_{H\otimes}^{(0)}; \qquad \delta_{ki}^{(r)} = \delta_{ki}^{(0)} - \sum_{H=1}^{r} \delta_{kH}^{(0)}\, Y_{Hi}^{(0)}; \\ \delta_{k\otimes}^{(0)} &= \delta_{k0}^{(0)} + \delta_{kt}^{(0)} + \delta_{ks}^{(0)}; \qquad Y_{H\otimes}^{(0)} = Y_{H0}^{(0)} + Y_{Ht}^{(0)} + Y_{Hs}^{(0)}. \end{aligned}\right\} \quad (303)$$

In Verbindung mit (302) ist

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H\otimes}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)}, \qquad (H = 1 \ldots r), \\ 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(r)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{Hi}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(r)}, \qquad (H = 1 \ldots r), \end{aligned}\right| \quad (304)$$

da die relativen Verschiebungen $\delta_{H\otimes}^{(r)}$, $\delta_{Hi}^{(r)}$ der Querschnitte H des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind. Die Ansätze (301) zur Berechnung der Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks werden daher nach der folgenden Rechenvorschrift abgekürzt:

$$\left.\begin{aligned} 1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{kk}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(0)} M_k^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(0)} M_i^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds, \\ 1_k^{(r)}\,\delta_{k0}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{k0}^{(r)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(0)} M_0^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{kt}^{(r)} = \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int_h N_k^{(0)} N_t^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds \\ &\quad + \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(0)} M_t^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds + E J_c \sum\left[\int_h N_k^{(0)} \alpha_t\, t\, ds + \int_h M_k^{(0)} \frac{\alpha_t\, \Delta t}{h}\,ds\right]; \\ 1_k^{(r)}\,\delta_{ks}^{(r)} &= 1_k^{(0)}\,\delta_{ks}^{(r)} = \frac{J_c}{F_c}\sum \frac{F_c}{F_h}\int_h N_k^{(0)} N_s^{(r)} \frac{F_h}{F}\,ds + \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(0)} M_s^{(r)} \frac{J_h}{J}\,ds - E J_c \sum C_{ek}^{(0)} \Delta_e. \end{aligned}\right\} \quad (305)$$

Die virtuelle Belastung $-X_k = 1$ wirkt hier an einem beliebigen, in dem $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystem enthaltenen statisch bestimmten Stabwerk und erzeugt in diesem die Schnittkräfte $N_k^{(0)}$, $M_k^{(0)}$. Sie treten in den Integralen an die Stelle von $N_k^{(r)}$, $M_k^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems. Der

Integrationsbereich wird auf diese Weise kleiner, daher sind auch die Ansätze für $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ einfacher und im Ergebnis genauer.

Der Ansatz (b) zur Berechnung von h überzähligen Größen X_k $(k = 1 \ldots h)$ aus einem $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystem kann hiernach folgendermaßen entwickelt werden:

$$X_1\,\delta_{k1}^{(r)} \quad + \cdots X_k\,\delta_{kk}^{(r)} \quad + \cdots X_h\,\delta_{kh}^{(r)} \quad = \delta_{k\otimes}^{(r)},$$

$$X_1(1_k^{(0)}\,\delta_{k1}^{(r)}) + \cdots X_k(1_k^{(0)}\,\delta_{kk}^{(r)}) + \cdots X_h(1_k^{(0)}\,\delta_{kh}^{(r)}) = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)},$$

$$\left.\begin{aligned}
&X_1\left[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)}\,N_1^{(n-h)}\,\frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)}\,M_1^{(n-h)}\,\frac{J_c}{J}\,ds\right] + \cdots\\
&+ X_k\left[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)}\,N_k^{(n-h)}\,\frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)}\,M_k^{(n-h)}\,\frac{J_c}{J}\,ds\right] + \cdots\\
&+ X_h\left[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)}\,N_h^{(n-h)}\,\frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)}\,M_h^{(n-h)}\,\frac{J_c}{J}\,ds\right]\\
&= \frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(0)}(N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)})\,\frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(0)}(M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)})\,\frac{J_c}{J}\,ds\\
&\qquad + E J_c\left[\int N_k^{(0)}\,\alpha_t\,t\,ds + \int M_k^{(0)}\,\frac{\alpha_t\,\Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(0)}\,\Delta_e\right].
\end{aligned}\right\} \quad (306)$$

Werden die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Stabwerks aus $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ oder aus $-X_i = 1$ nach (305) in einem statisch bestimmten Hauptsystem abgeleitet, so ist

$$1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \qquad 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(0)} + 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)}. \quad (307)$$

Der erste Anteil kann als die Arbeit einer virtuellen Belastung nach Abschnitt 18 berechnet werden. Der zweite Anteil ist, nach Maxwell umgeformt,

$$1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = -\sum Y_{H\otimes}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(0)}; \quad 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)} = -\sum Y_{Hi}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(0)}, \quad (H = 1 \ldots r) \quad (308)$$

die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems aus den vorgeschriebenen äußeren Ursachen mit den Komponenten $\delta_{Hk}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems aus $-X_k = 1$.

Die Vorzahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{ki}^{(r)}$ und die Belastungszahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{k\otimes}^{(r)}$ werden daher nach (306) als Funktion von inneren, nach (308) als Funktion von äußeren Kräften berechnet, so daß mit dem Vergleich eine Nachprüfung der Ergebnisse erreicht wird.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der Verschiebungen. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ der Querschnitte (k) eines $r$fach statisch unbestimmten Stabwerks kann ebenso wie die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ in (302) auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen werden. Sie besteht dann aus einem Anteil $\delta_{k\otimes}^{(0)}$, welcher von der Belastung $\mathfrak{P}$, der Temperaturänderung und der Stützenverschiebung herrührt, und einem zweiten Anteil aus den diesen Ursachen zugeordneten r statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H\otimes}^{(0)}$ des Hauptsystems.

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(r)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} + 1_k^{(r)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)}. \quad (309)$$

Da nun auch die Belastung $1_k^{(r)}$ auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen und durch eine äquivalente Belastung $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ ersetzt werden kann, so ist nach Maxwell

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)}\,\delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{H\otimes}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(r)},$$

$$1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hi}^{(0)}\,\delta_{Hk}^{(r)}.$$