Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der Verschiebungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Integrationsbereich wird auf diese Weise kleiner, daher sind auch die Ansätze für $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ einfacher und im Ergebnis genauer.

Der Ansatz (b) zur Berechnung von h überzähligen Größen X_k $(k = 1 \ldots h)$ aus einem $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystem kann hiernach folgendermaßen entwickelt werden:

$$X_1 \delta_{k1}^{(r)} + \cdots X_k \delta_{kk}^{(r)} + \cdots X_h \delta_{kh}^{(r)} = \delta_{k\otimes}^{(r)},$$

$$X_1 (1_k^{(0)} \delta_{k1}^{(r)}) + \cdots X_k (1_k^{(0)} \delta_{kk}^{(r)}) + \cdots X_h (1_k^{(0)} \delta_{kh}^{(r)}) = 1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(r)},$$

$$\left.\begin{aligned}
&X_1 \left[\frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} N_1^{(n-h)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} M_1^{(n-h)} \frac{J_c}{J} ds\right] + \cdots \\
&+ X_k \left[\frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} N_k^{(n-h)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} M_k^{(n-h)} \frac{J_c}{J} ds\right] + \cdots \\
&+ X_h \left[\frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} N_h^{(n-h)} \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} M_h^{(n-h)} \frac{J_c}{J} ds\right] \\
&= \frac{J_c}{F_c} \int N_k^{(0)} (N_0^{(n-h)} + N_t^{(n-h)} + N_s^{(n-h)}) \frac{F_c}{F} ds + \int M_k^{(0)} (M_0^{(n-h)} + M_t^{(n-h)} + M_s^{(n-h)}) \frac{J_c}{J} ds \\
&\qquad + E J_c \left[\int N_k^{(0)} \alpha_t t \, ds + \int M_k^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{ek}^{(0)} \Delta_e\right].
\end{aligned}\right\} \quad (306)$$

Werden die Verschiebungen $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ des $r$fach statisch unbestimmten Stabwerks aus $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ oder aus $-X_i = 1$ nach (305) in einem statisch bestimmten Hauptsystem abgeleitet, so ist

$$1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(0)} \delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)} \delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \qquad 1_k^{(0)} \delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(0)} \delta_{ki}^{(0)} + 1_k^{(0)} \delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)}. \quad (307)$$

Der erste Anteil kann als die Arbeit einer virtuellen Belastung nach Abschnitt 18 berechnet werden. Der zweite Anteil ist, nach Maxwell umgeformt,

$$1_k^{(0)} \delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = -\sum Y_{H\otimes}^{(0)} \delta_{Hk}^{(0)}; \quad 1_k^{(0)} \delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)} = -\sum Y_{Hi}^{(0)} \delta_{Hk}^{(0)}, \quad (H = 1 \ldots r) \quad (308)$$

die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte des $r$fach statisch unbestimmten Hauptsystems aus den vorgeschriebenen äußeren Ursachen mit den Komponenten $\delta_{Hk}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems aus $-X_k = 1$.

Die Vorzahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{ki}^{(r)}$ und die Belastungszahlen $1_k^{(0)} \cdot \delta_{k\otimes}^{(r)}$ werden daher nach (306) als Funktion von inneren, nach (308) als Funktion von äußeren Kräften berechnet, so daß mit dem Vergleich eine Nachprüfung der Ergebnisse erreicht wird.

Berechnung der virtuellen Arbeit in statisch unbestimmten Systemen mit einer Zerlegung der Verschiebungen. Die gegenseitige Verschiebung oder Verdrehung $\delta_{k\otimes}^{(r)}$, $\delta_{ki}^{(r)}$ der Querschnitte (k) eines $r$fach statisch unbestimmten Stabwerks kann ebenso wie die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ in (302) auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen werden. Sie besteht dann aus einem Anteil $\delta_{k\otimes}^{(0)}$, welcher von der Belastung $\mathfrak{P}$, der Temperaturänderung und der Stützenverschiebung herrührt, und einem zweiten Anteil aus den diesen Ursachen zugeordneten r statisch unbestimmten Schnittkräften $Y_{H\otimes}^{(0)}$ des Hauptsystems.

$$1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(r)} \delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(0)} + 1_k^{(r)} \delta_{k,\Sigma Y_{Hi}}^{(0)}. \quad (309)$$

Da nun auch die Belastung $1_k^{(r)}$ auf ein statisch bestimmtes Hauptsystem bezogen und durch eine äquivalente Belastung $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ ersetzt werden kann, so ist nach Maxwell

$$1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} + 1_k^{(0)} \delta_{k,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)} \delta_{H,\Sigma Y_{H\otimes}}^{(0)} = 1_k^{(r)} \delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{H\otimes}^{(0)} \delta_{Hk}^{(r)},$$

$$1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)} \delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hi}^{(0)} \delta_{Hk}^{(r)}.$$

Da ferner die Verschiebungen $\delta_{Hk}^{(r)}$ des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind, so ist auch die Arbeit der Kräfte $Y_{H\otimes}^{(0)}$, $Y_{Hi}^{(0)}$ Null und damit

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)}. \tag{310}$$

Die Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks können daher im Vergleich zu (305) auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned}
&1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(r)} M_k^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_{h_i} M_k^{(r)} M_i^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds;\\
&1_k^{(r)}\,\delta_{k0}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k0}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int_h M_k^{(r)} M_0^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\,\delta_{ks}^{(r)} = -E J_c \sum C_{ek}^{(r)} \Delta_e;\\
&1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{kt}^{(0)} = E J_c \sum\left[\int_h N_k^{(r)} \alpha_t t\,ds + \int_h M_k^{(r)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds\right].
\end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Die vollständige Elastizitätsgleichung (k) eines in der Form b nach (294) angeschriebenen Ansatzes läßt sich ebenso umformen:

$$\begin{aligned}
&X_1\,\delta_{k1}^{(r)} + \cdots X_k\,\delta_{kk}^{(r)} + \cdots X_h\,\delta_{kh}^{(r)} = \delta_{k\otimes}^{(r)},\\
&X_1(1_k^{(r)}\,\delta_{k1}^{(0)}) + \cdots X_k(1_k^{(r)}\,\delta_{kk}^{(0)}) + \cdots X_h(1_k^{(r)}\,\delta_{kh}^{(0)}) = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)}.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&X_1\left[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_1^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_1^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\right] + \cdots\\
&+ X_k\left[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_k^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\right] + \cdots\\
&+ X_h\left[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_h^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_h^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\right]\\
&= \frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_0^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_0^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\\
&+ E J_c\left[\int N_k^{(n-h)} \alpha_t t\,ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \Delta_e\right].
\end{aligned}\right\} \tag{312}$$

Da die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ nach (302) durch $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ äquivalent ersetzt werden kann, ist

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H\otimes}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{Hi}^{(0)}. \tag{313}$$

Der erste Anteil der Ansätze besteht aus Verschiebungen eines statisch bestimmten Hauptsystems durch $(\mathfrak{P}, t, \Delta t, \Delta_e)$ oder $-X_i = 1$, die nach Abschnitt **18** berechnet oder aus Tabellen **12** ff. entnommen werden können. Der zweite Anteil ist die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_{Hk} $(H = 1 \ldots r)$ aus der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ mit den Komponenten $\delta_{H\otimes}^{(0)}$, $\delta_{Hi}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzahlen werden auf diese Weise als virtuelle Arbeit von äußeren Kräften angegeben. Der Vergleich mit (311) bildet wiederum eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung.

Die Elastizitätsgleichung als Minimalbedingung der Formänderungsenergie. Die Formänderungsenergie A_i, die Ergänzungsenergie A_i^* eines Stabwerks oder die erweiterte Funktion A_i^{**} ist nach (37) bei Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte ein Minimum. Da nun die statischen Bedingungen durch beliebige Annahmen über die Selbstspannungszustände X_k $(k = 1 \ldots n)$ erfüllt werden, erhalten diese in den Funktionen A_i, A_i^*, A_i^{**} die Eigenschaft von unabhängigen veränderlichen Größen, nach denen die Funktionen partiell abgeleitet werden können. Nach dem Minimalprinzip E. Castiglianos entstehen daher bei n statisch überzähligen Größen mit n partiellen Ableitungen nach X_k die folgenden n Be-