UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Elastizitätsgleichung als Minimalbbedingung der Formänderungsenergie

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Visual Library

Da ferner die Verschiebungen $\delta_{Hk}^{(r)}$ des statisch unbestimmten Hauptsystems nach Vorschrift Null sind, so ist auch die Arbeit der Kräfte $Y_{H\otimes}^{(0)}, Y_{Hi}^{(0)}$ Null und damit

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)}. \tag{310}$$

Die Verschiebungen eines statisch unbestimmten Stabwerks können daher im Vergleich zu (305) auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned}
&1_k^{(r)}\delta_{kk}^{(r)} = 1_k^{(r)}\delta_{kk}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(r)} M_k^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\delta_{ki}^{(r)} = 1_k^{(r)}\delta_{ki}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_{h_i} M_k^{(r)} M_i^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds;\\
&1_k^{(r)}\delta_{k0}^{(r)} = 1_k^{(r)}\delta_{k0}^{(0)} = \sum \frac{J_c}{J_h}\int\limits_h M_k^{(r)} M_0^{(0)} \frac{J_h}{J}\,ds; \quad 1_k^{(r)}\delta_{ks}^{(r)} = -EJ_c \sum C_{ek}^{(r)} \varDelta_e;\\
&1_k^{(r)}\delta_{kt}^{(r)} = 1_k^{(r)}\delta_{kt}^{(0)} = EJ_c \sum\Big[\int\limits_h N_k^{(r)}\alpha_t t\,ds + \int\limits_h M_k^{(r)} \frac{\alpha_t \varDelta t}{h}\,ds\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Die vollständige Elastizitätsgleichung (k) eines in der Form b nach (294) angeschriebenen Ansatzes läßt sich ebenso umformen:

$$\begin{aligned}
&X_1\,\delta_{k1}^{(r)} \quad + \cdots X_k\,\delta_{kk}^{(r)} \quad + \cdots X_h\,\delta_{kh}^{(r)} \quad = \delta_{k\otimes}^{(r)},\\
&X_1(1_k^{(r)}\delta_{k1}^{(0)}) + \cdots X_k(1_k^{(r)}\delta_{kk}^{(0)}) + \cdots X_h(1_k^{(r)}\delta_{kh}^{(0)}) = 1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)}.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&X_1\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_1^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_1^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] + \cdots\\
&+ X_k\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_k^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_k^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big] + \cdots\\
&+ X_h\Big[\frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_h^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_h^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\Big]\\
&\quad = \frac{J_c}{F_c}\int N_k^{(n-h)} N_0^{(0)} \frac{F_c}{F}\,ds + \int M_k^{(n-h)} M_0^{(0)} \frac{J_c}{J}\,ds\\
&+ EJ_c\Big[\int N_k^{(n-h)} \alpha_t t\,ds + \int M_k^{(n-h)} \frac{\alpha_t \varDelta t}{h}\,ds - \sum C_{ek}^{(n-h)} \varDelta_e\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{312}$$

Da die virtuelle Belastung $1_k^{(r)}$ nach (302) durch $1_k^{(0)}$, $Y_{Hk}^{(0)}$ $(H = 1 \ldots r)$ äquivalent ersetzt werden kann, ist

$$1_k^{(r)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{k\otimes}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{H\otimes}^{(0)}; \qquad 1_k^{(r)}\,\delta_{ki}^{(0)} = 1_k^{(0)}\,\delta_{ki}^{(0)} - \sum Y_{Hk}^{(0)}\,\delta_{Hi}^{(0)}. \tag{313}$$

Der erste Anteil der Ansätze besteht aus Verschiebungen eines statisch bestimmten Hauptsystems durch $(\mathfrak{P}, t, \varDelta t, \varDelta_e)$ oder $-X_i = 1$, die nach Abschnitt **18** berechnet oder aus Tabellen **12** ff. entnommen werden können. Der zweite Anteil ist die Arbeit der statisch unbestimmten Schnittkräfte Y_{Hk} $(H = 1 \ldots r)$ aus der virtuellen Belastung $-X_k = 1$ mit den Komponenten $\delta_{H\otimes}^{(0)}, \delta_{Hi}^{(0)}$ des Verschiebungszustandes des statisch bestimmten Hauptsystems. Die Vorzahlen werden auf diese Weise als virtuelle Arbeit von äußeren Kräften angegeben. Der Vergleich mit (311) bildet wiederum eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung.

Die Elastizitätsgleichung als Minimalbedingung der Formänderungsenergie. Die Formänderungsenergie A_i, die Ergänzungsenergie A_i^* eines Stabwerks oder die erweiterte Funktion A_i^{**} ist nach (37) bei Gleichgewicht der inneren und äußeren Kräfte ein Minimum. Da nun die statischen Bedingungen durch beliebige Annahmen über die Selbstspannungszustände X_k $(k = 1 \ldots n)$ erfüllt werden, erhalten diese in den Funktionen A_i, A_i^*, A_i^{**} die Eigenschaft von unabhängigen veränderlichen Größen, nach denen die Funktionen partiell abgeleitet werden können. Nach dem Minimalprinzip E. Castiglianos entstehen daher bei n statisch überzähligen Größen mit n partiellen Ableitungen nach X_k die folgenden n Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial A_i}{\partial X_k} = 0; \qquad \frac{\partial A_i^*}{\partial X_k} = 0; \qquad \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_k} = 0, \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{314}$$

Diese genügen, abgesehen vom Ausnahmefall, zur eindeutigen Berechnung der n überzähligen Größen X_k, die hier nicht mehr auf den Begriff der einzelnen Schnittkräfte beschränkt werden müssen, sondern beliebig aus ihnen zusammengesetzt sein können, wenn die Gruppen unabhängig voneinander bleiben.

Die Ergänzungsenergie eines Stabwerks, dessen Symmetrieebene mit der Kraftebene zusammenfällt und dessen Spannungen nach den Regeln der technischen Biegelehre berechnet werden, ist nach (158) und (163) mit den vorgeschriebenen Stützenverschiebungen

$$A_i^* = \frac{1}{2} \int \left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{\varkappa Q_z^2}{GF} \right) ds - \sum C_e \Delta_e. \tag{315}$$

Soll außerdem eine Temperaturänderung des Baustoffes berücksichtigt werden, so tritt hierfür die Funktion

$$A_i^{**} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{N^2}{EF} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{\varkappa Q_z^2}{GF} \right) + \int \left(N \alpha_t t + M \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) ds - \sum C_e \Delta_e. \tag{316}$$

Die Stütz- und Schnittkräfte sind nach dem Superpositionsgesetz Funktionen der unbekannten X_k. Als Ansatz wird (288) gewählt.

$$\begin{aligned}
C &= C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2 - \cdots - X_k C_k - \cdots - X_n C_n, \\
N &= N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2 - \cdots - X_k N_k - \cdots - X_n N_n, \\
M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - \cdots - X_k M_k - \cdots - X_n M_n, \\
Q &= Q_0 - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - \cdots - X_k Q_k - \cdots - X_n Q_n.
\end{aligned}$$

Die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach X_k und damit die Minimalbedingung k ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial X_k} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_k} ds + \int \varkappa \frac{Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial X_k} ds + \int \frac{\partial N}{\partial X_k} \alpha_t t \, ds \\
+ \int \frac{\partial M}{\partial X_k} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_k} \Delta_e = 0.
\end{aligned} \tag{317}$$

Mit

$$\frac{\partial N}{\partial X_k} = -N_k, \qquad \frac{\partial M}{\partial X_k} = -M_k, \qquad \frac{\partial Q}{\partial X_k} = -Q_k, \qquad \frac{\partial C}{\partial X_k} = -C_k \tag{318}$$

wird dieselbe Elastizitätsbedingung erhalten wie unter (286), welche mit dem Ansatz (288) weiter entwickelt worden ist.

Die Ableitung der Elastizitätsgleichungen mit dem Prinzip E. Castiglianos nimmt im Gegensatz zu der anschaulichen geometrischen Methode nach (293) die Zwangläufigkeit der mathematischen Behandlung als Vorteil für sich in Anspruch und bietet die Möglichkeit, aus statisch unbestimmten Schnittkräften Y_H neue überzählige Größen X_k zu bilden, mit denen Ansatz und Lösung vereinfacht werden können. Dies wirkt sich jedoch meist nur in einzelnen Ausnahmefällen aus, so daß die Lösung nach E. Castigliano in der Regel einen Umweg bedeutet, da der Ansatz (293) und seine Ergänzung durch den Abschnitt **19** die Elastizitätsgleichungen bereits in integrierter Form bieten.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wird jede Elastizitätsgleichung in Zukunft nach dem Ansatz (293) oder (294) entwickelt.

Worch, G.: Beispiele zur Anwendung des Reduktionssatzes. Beton u. Eisen 1924 S. 39. — Pasternack: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN