Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

25. Die Grundlagen für die Bildung der Matrix

25. Die Grundlagen für die Bildung der Matrix.

Ansatz. Die n Elastizitätsgleichungen zur Berechnung von n überzähligen Größen X_k aus einem statisch bestimmten Hauptsystem erhalten nach der Begründung in Abschnitt 24 folgende Form:

$$X_1 \delta_{k1} + X_2 \delta_{k2} + \cdots X_k \delta_{kk} + \cdots X_{n-1} \delta_{k(n-1)} + X_n \delta_{kn} = \delta_{k0}.$$

Bei einem $(n-h)$fach statisch unbestimmten Hauptsystem erscheinen nach (294) die Verschiebungen $\delta_{kk}^{(n-h)}$, $\delta_{ki}^{(n-h)}$, $\delta_{k0}^{(n-h)}$. Die n Gleichungen werden zur besseren Übersicht in einer Zahlentafel (319) zusammengefaßt:

X_1	X_2		X_{k-1}	X_k	X_{k+1}		X_{n-1}	X_n	
δ_{11}	δ_{12}		$\delta_{1(k-1)}$	δ_{1k}	$\delta_{1(k+1)}$		$\delta_{1(n-1)}$	δ_{1n}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}		$\delta_{2(k-1)}$	δ_{2k}	$\delta_{2(k+1)}$		$\delta_{2(n-1)}$	δ_{2n}	δ_{20}
									$\vdots$
δ_{k1}	δ_{k2}		$\delta_{k(k-1)}$	δ_{kk}	$\delta_{k(k+1)}$		$\delta_{k(n-1)}$	δ_{kn}	δ_{k0}
									$\vdots$
$\delta_{(n-1)1}$	$\delta_{(n-1)2}$		$\delta_{(n-1)(k-1)}$	$\delta_{(n-1)k}$	$\delta_{(n-1)(k+1)}$		$\delta_{(n-1)(n-1)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}$
δ_{n1}	δ_{n2}		$\delta_{n(k-1)}$	δ_{nk}	$\delta_{n(k+1)}$		$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	δ_{n0}

(319)

Für den allgemeinen Belastungsfall tritt an die Stelle von δ_{k0}

$$\delta_{k\otimes} = \delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}.$$

Die gegenseitigen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_{k1} \ldots \delta_{kh} \ldots$ der Ufer des Querschnitts (k) infolge von $-X_h = 1$ $(h = 1 \ldots n)$ werden als virtuelle Arbeiten $1_k \cdot \delta_{k1} \ldots 1_k \cdot \delta_{kh} \ldots$ der Kräftegruppe $-X_k = 1$ berechnet. Sie erhalten den gleichen Richtungssinn wie die Kräfte $-X_k$. Die Summe der Vorzahlen einer Zeile (k)

$$\delta_{k1} + \delta_{k2} + \cdots \delta_{kh} + \cdots \delta_{kn} = \delta_{k\Sigma}, \tag{320}$$

kann als die virtuelle Arbeit der Kraft $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus dessen Belastung durch $-X_1 = 1 \cdots - X_n = 1$, also durch die Nachrechnung von $1_k \cdot \delta_{k\Sigma}$ geprüft werden. Hieraus entsteht mit $k = 1 \ldots n$

$$\sum_{k=1}^{k=n} 1_k \delta_{k\Sigma} = 1_\Sigma \delta_{\Sigma\Sigma} = (\delta_{11} + \cdots \delta_{1n}) + (\delta_{21} + \cdots \delta_{2n}) + \cdots (\delta_{n1} + \cdots \delta_{nn}) \tag{321}$$

und damit eine allgemeine Rechenprobe für die Richtigkeit des Ansatzes.

Die Matrix der Elastizitätsgleichungen ist mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ zur Hauptdiagonale symmetrisch. Die Tafel (319) kann daher abgekürzt angeschrieben werden. Im Grenzfalle sind entweder die n überzähligen Größen in allen n Gleichungen enthalten oder sie sind unabhängig voneinander. Die Matrix ist dabei voll besetzt oder auf die Hauptdiagonale beschränkt. Die Nebenglieder sind dann Null. Beide Grenzfälle sind Ausnahmen. Der Aufbau der zahlreichen, für das Bauwesen charakteristischen, statisch unbestimmten Stabzüge führt vielmehr zu ausgezeichneten Klassen von mehrgliedrigen Bedingungsgleichungen. Sie unterscheiden sich nach der Anzahl der Unbekannten, die in jeder von ihnen auftreten und den aufeinanderfolgenden Gleichungen gemeinsam sind. Die Zuordnung der überzähligen Größen begründet in der Regel die Zusammenfassung einer ungeraden Anzahl von ihnen, also drei-, fünf-, sieben- und neungliedrige Gleichungen. Aus dem gleichen Grunde enthalten die ersten und letzten Gleichungen des Ansatzes im Vergleich zu den mittleren eine geringere Anzahl von Unbekannten.

Auflösung und konjugierte Matrix. Die Auflösung einer Gruppe von n linearen Gleichungen begegnet in formaler Beziehung keinen Schwierigkeiten. Jede Unbekannte kann mit den aus der Determinantentheorie bekannten Symbolen unmittelbar angegeben werden.

$$X_k = \frac{D_k}{D} = \frac{D_{1k}}{D}\,\delta_{10} + \frac{D_{2k}}{D}\,\delta_{20} + \cdots \frac{D_{nk}}{D}\,\delta_{n0}. \tag{322}$$

In diesem Ausdruck ist D_{ik} die Adjunkte zu der Vorzahl δ_{ik} der Matrix. Sie entsteht aus der Nennerdeterminante durch Streichung der $i$ten Zeile und der $k$ten Spalte. Ihr Vorzeichen wird durch $(-1)^{i+k}$ bestimmt. Dem Bruch $D_{ik}/D = \beta_{ik}$ liegt ein ausgezeichnetes Hauptsystem zugrunde. Er ist von der Belastung unabhängig und allein durch die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks bestimmt.

$$X_k = \beta_{1k}\delta_{10} + \cdots \beta_{ik}\delta_{i0} + \cdots \beta_{kk}\delta_{k0} + \cdots \beta_{nk}\delta_{n0}. \tag{323}$$

Mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ wird nach einer Vertauschung der Zeilen und Spalten der Determinante ebenfalls $D_{ik} = D_{ki}$, damit auch $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ und

$$X_k = \beta_{k1}\delta_{10} + \cdots \beta_{ki}\delta_{i0} + \cdots \beta_{kk}\delta_{k0} + \cdots \beta_{kn}\delta_{n0}. \tag{324}$$

Hiernach erhält β_{ki} die Bedeutung der überzähligen Größe X_k, wenn die Belastungszahl δ_{i0} allein gleich 1 und alle übrigen δ_{h0} Null gesetzt werden. Der Index i durchläuft dabei die Zahlenreihe 1, 2 über k bis n. Bei n überzähligen Größen X_k entstehen auf diese Weise der Zahl nach n^2 Vorzahlen β_{ik}, von denen jedoch nur $1/2 \cdot n(n+1)$ untereinander verschieden sind. Sie werden auch hier unabhängig von der Belastung allein aus den elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und bilden, als Spalten einer Tabelle angeschrieben, die konjugierte, zur Hauptdiagonale symmetrische Matrix zu (319)

	δ_{10}	δ_{20}		$\delta_{(k-1)0}$	δ_{k0}	$\delta_{(k+1)0}$		$\delta_{(n-1)0}$	δ_{n0}
X_1	β_{11}	β_{12}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}
X_2	β_{21}	β_{22}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}
$\vdots$									
X_k	β_{k1}	β_{k2}		$\beta_{k(k-1)}$	β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}
$\vdots$									
X_{n-1}	$\beta_{(n-1)1}$	$\beta_{(n-1)2}$		$\beta_{(n-1)(k-1)}$	$\beta_{(n-1)k}$	$\beta_{(n-1)(k+1)}$		$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$
X_n	β_{n1}	β_{n2}		$\beta_{n(k-1)}$	β_{nk}	$\beta_{n(k+1)}$		$\beta_{n(n-1)}$	β_{nn}

(325)

Die Auflösung der geometrischen Bedingungsgleichungen mit Determinanten ist nur bei einer Verknüpfung von wenigen Unbekannten möglich. Bei größeren Ansätzen wird stets nach den Vorschriften des Abschnitts 29 gerechnet. Dies geschieht bei vorgeschriebener Belastung unter Einbeziehung der Belastungszahlen. Bei mehreren Belastungsfällen wird in der Regel die konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ki} (325) verwendet

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\delta_{i0} \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{326}$$

Werden an Stelle der Vorzahlen δ_{ik} der geometrischen Bedingungsgleichungen (319) zur Vereinfachung der Zahlenrechnung Vielfache dieser Werte, also $c\,\delta_{ik}$ verwendet, so ist

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki}\,(c\,\delta_{i0}) \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{327}$$

Die Glieder der konjugierten Matrix $\beta'_{ki} = \beta_{ki}/c$ $(k = 1 \ldots n)$ werden dann für $(c\,\delta_{i0}) = 1$ berechnet.

Steht eine wandernde Last $P_m = 1$ in einem beliebigen Punkte m des Lastgurtes, so ist $\delta_{k0} = \delta_{km}$ die Ordinate der Einflußlinie der gegenseitigen Verschiebung (k) des Hauptsystems. Sie wird nach Maxwell als Biegelinie des Lastgurtes für $-X_k = 1$ berechnet. Demnach entsteht die Einflußlinie

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\,\delta_{mi} \qquad (k = 1 \ldots n) \tag{328}$$

durch Überlagerung der mit den Vorzahlen β_{ki} erweiterten Ordinaten der Biegelinien δ_{mi} $(i = 1 \ldots n)$ oder als einzelne Biegelinie des Lastgurtes unter der gemeinsamen Wirkung der überzähligen Größen

$$-X_1 = \beta_{1k}, \qquad \ldots - X_i = \beta_{ik}, \qquad \ldots - X_n = \beta_{nk}$$

am Hauptsystem.

Die Auflösung der Matrix wird durch Einsetzen der einer vorgeschriebenen Belastung zugeordneten Wurzeln X_k in die geometrischen Bedingungen (319) nachgeprüft. Dasselbe gilt von den Vorzahlen β_{ki}. Sie müssen den Ansatz (319) mit dem Leitwert i, also mit den Belastungsgliedern $\delta_{10} = 0, \ldots \delta_{i0} = 1, \ldots \delta_{n0} = 0$ identisch erfüllen.

Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung kann entweder nach dem Einfluß von Fehlern in den Vorzahlen δ_{ik} aus ungenauen Annahmen oder nach dem Einfluß von Abrundungsfehlern in der Zwischenrechnung beurteilt werden. Sie unterliegen gleichen mathematischen Kennzeichen, da die Abrundungsfehler als ungenaue Vorzahlen des Ansatzes gelten können.

Die Wurzeln der Lösung werden nach S. 166 mit $X_k = D_k/D$ angegeben, so daß mit der Nennerdeterminante D auch deren Fehler allen überzähligen Größen X_k gemeinsam sind. Daher untersucht A. Hertwig den Einfluß der um $\pm\, p_{ik}\delta_{ik}$ von dem wahren Betrag δ_{ik} abweichenden Vorzahlen $(\delta_{ik} \pm p_{ik}\delta_{ik})$ auf die Nennerdeterminante D. Wird $p_{ik} = p$ konstant angenommen und darunter ein größter oder mittlerer Fehler verstanden, um den sich alle Vorzahlen von den wirklichen Werten unterscheiden, so ist mit $D' = D + \Delta D$ für $(\delta_{ik} \pm p\,\delta_{ik})$ an Stelle von δ_{ik}

$$X'_k = \frac{D_k}{D'} = \frac{D_k}{D + \Delta D} = \frac{D_k}{D} - \frac{D_k}{D}\,\frac{\Delta D}{D'} = X_k\left(1 - \frac{\Delta D}{D'}\right) = X_k\,(1 - \varphi). \tag{329}$$

Der Fehler p der Vorzahlen ist eine kleine Zahl, so daß die Entwicklung der Nennerdeterminante D' als Reihe von Potenzen in p mit dem linearen Gliede abgebrochen werden kann. In diesem Falle ist

$$\frac{\Delta D}{D'} = \frac{\Sigma\, p\,\delta_{ik}\,D_{ik}}{D'} = \Sigma\, p\,\delta_{ik}\,\beta_{ik}. \tag{330}$$

Der Unterschied φX_k wird im Vergleich zum wahren Wert der Wurzeln X_k am größten, wenn die Summe nur aus positiven Gliedern besteht. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung wird daher unter der Annahme eines Betrages $\pm\, p$, also eines Fehlers

$$\varphi = \pm\, p\,\frac{\Sigma\,|\,\delta_{ik}\,D_{ik}\,|}{D'} = \pm\, p \sum_i \sum_k |\,\beta_{ik}\,\delta_{ik}\,| \tag{331}$$

beurteilt. Der Zähler ist die Summe der n^2 Produkte der n^2 Unterdeterminanten D_{ik} von $(n-1)$ter Ordnung mit den ihnen zugeordneten Vorzahlen δ_{ik}.

Da nun die Nennerdeterminante D' als die Summe der positiven und negativen Produkte $\delta_{ik} D_{ik}$ jeder Spalte angeschrieben wird, ist φ um so größer, je mehr sich die Summe bei gegebenen p von dem $n$fachen Betrage der Nennerdeterminante D' unterscheidet, je kleiner also D' wird. Ist $D' = 0$, $p \neq 0$, so ist φ unendlich groß. Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn zwei Zeilen oder Spalten einander gleich sind oder mit konstantem Faktor ineinander übergehen. Der optimale Grenzwert liegt bei $\varphi = (\pm p) n$.

Die Empfindlichkeit der Wurzeln gegen Abrundungsfehler kann unter Umständen durch Transformation der Unbekannten X_k abgeändert werden. Der Ansatz erhält auf diese Weise eine größere Nennerdeterminante. Die Empfindlichkeit des Ansatzes gegen Fehler in den Vorzahlen bleibt dabei bestehen. Beide Ursachen der Fehlerempfindlichkeit können gleichzeitig nur durch Änderung des Hauptsystems gemildert oder beseitigt werden.

Die Stützwiderstände C und die Schnittkräfte N, M, Q des Stabwerks entstehen nach (288) durch numerische oder graphische Superposition der Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den überzähligen Größen X_k des Hauptsystems. Das Ergebnis ist als Summe von positiven und negativen Beiträgen wiederum durch Fehlerempfindlichkeit gefährdet. Diese wird durch das Hauptsystem bestimmt und kann daher nur durch dessen Abänderung beseitigt werden. Sie verliert um so mehr an Bedeutung, je kleiner die überzähligen Größen durch geeignete Anordnung und Belastung des Hauptsystems sind. Am besten werden sie überhaupt nur als Unterschiede gegenüber plausiblen Annahmen der überzähligen Größen berechnet.

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks. Die statisch überzähligen Schnittkräfte X_k aus den vorgeschriebenen Ursachen $(\mathfrak{P}, t, \Delta_e)$ sind neben der Belastung $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte des Hauptsystems. Die Schnittkräfte und Verschiebungen lassen sich daher nach den Abschnitten 13ff. und 17ff. wie bei jedem statisch bestimmten Stabwerk für eine Belastung aus $\mathfrak{P}$ und X_k $(k = 1 \ldots n)$ berechnen. Sie können aber auch nach (288) und (289) durch die gruppenweise Überlagerung einzelner statisch bestimmter Beiträge C_0, M_0 usw. mit $C_k \cdot X_k$, $M_k \cdot X_k$ usw. oder einzelner Verschiebungen w_0 usw. mit $w_k \cdot X_k$ usw. angeschrieben werden. Die statisch bestimmten Schnittkräfte M_0, M_k usw. sind einzeln und daher auch nach der Gruppenbildung im Sinne von (284) im Gleichgewicht.

Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach denselben Regeln aufgezeichnet. Sie entstehen entweder durch die unmittelbare Überlagerung der Anteile M_0 mit $M_k \cdot X_k$ nach (288) oder durch die Verwendung der Ansätze (324ff.) für X_k. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} M &= M_0 - \sum_k M_k X_k \quad ; & Q &= Q_0 - \sum_k Q_k X_k \quad ; \\ &= M_0 - \sum_k [M_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}]; & &= Q_0 - \sum_k [Q_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}]; \\ &= M_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k M_k \beta_{ki}]; & &= Q_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k Q_k \beta_{ki}]. \end{aligned} \tag{332}$$

Die Einflußlinien setzen sich darnach aus dem statisch bestimmten Anteil M_0, Q_0 und einer resultierenden Biegelinie zusammen, die entweder durch Überlagerung von n Biegelinien oder ebenso wie auf S. 167 als einzelne Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für Kräfte $-X_i = \sum_k M_k \beta_{ki}$ $(i = 1 \ldots n)$ gefunden wird.

Nachprüfung der Kontinuität des Stabzugs als Rechenprobe für die Schnittkräfte. Da die statischen Bedingungen durch die Art der Untersuchung an jedem Abschnitt des Stabwerks von vornherein erfüllt sind, können die Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks (C, N, M, Q) nur durch die

Untersuchung des zugeordneten Verschiebungszustandes als richtig festgestellt werden. Dies geschieht durch Nachprüfung der Randbedingungen des freien Stabwerks, welche durch die Abstützung vorgeschrieben sind und durch Nachrechnung der relativen Bewegung $\delta_i^{(n)}$ der Ufer von n Querschnitten. Das Ergebnis $\delta_i^{(n)} = 0$ $(i = 1 \ldots n)$ bestätigt die Richtigkeit der Rechnung. In der Regel begnügt man sich mit einzelnen für die Nachprüfung geeigneten Ansätzen. Dabei sollen die Biegungsmomente $\overline{M}_i$ (171) in einem möglichst großen Bereich des Stabwerks vorhanden sein und sich von den Biegungsmomenten M_i wesentlich unterscheiden.

Ergeben sich die $\delta_i^{(n)} \neq 0$, so muß die Rechnung wiederholt werden. Eine Abschätzung des Fehlers $\delta_i^{(n)} = \Delta$ in seiner Bedeutung für den Spannungszustand genügt nur bei kleinen Unterschieden. Sind die Vorzahlen δ_{ik} der Elastizitätsgleichungen richtig, so können die $\delta_i^{(n)} = \Delta$ zugeordneten Unterschiede ΔX_k der überzähligen Größen mit den Vorzahlen der konjugierten Matrix ausgerechnet werden. Um sich jedoch von allen Voraussetzungen der vorhandenen Lösung frei zu machen, wird die dem Fehler $\delta_i^{(n)} = \Delta$ zugeordnete Änderung der Stütz- oder Schnittkraft Z_i in einem $(n-1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystem festgestellt. Bezeichnet Z_i die genaue Stütz- oder Schnittkraft, Z_i^* ihren fehlerhaften Wert in der vorhandenen Lösung, so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\delta_{i0}^{(n-1)} - Z_i\, \delta_{ii}^{(n-1)} = 0\,,$$
$$\delta_{i0}^{(n-1)} - Z_i^*\, \delta_{ii}^{(n-1)} = \Delta\,.$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen liefert den Fehler

$$\Delta Z_i = Z_i - Z_i^* = \Delta / \delta_{ii}^{(n-1)}\,. \tag{333}$$

Er läßt sich zur Vereinfachung der Rechnung mit

$$\overline{\Delta Z_i} = \Delta / \delta_{ii}^{(0)} < \Delta Z_i \tag{334}$$

abschätzen.

Das System wird daher von den Stützen gelöst oder an einer geeigneten Stelle durchschnitten, um die ihrer Größe nach bekannten gegenseitigen Verschiebungen oder Verdrehungen als Funktion der nachgewiesenen Schnittkräfte nach Abschnitt 13ff. zu berechnen. Die virtuelle Arbeit $1_i^{(n)} \cdot \delta_i^{(n)}$ ist dabei Null oder vorgeschrieben. Sie kann nach (293) als Funktion äußerer Kräfte angegeben werden:

$$1_i^{(n)}\, \delta_{i0}^{(n)} = 1_i^{(0)}\, \delta_{i0}^{(n)} = 1_i^{(0)}\, \delta_{i0}^{(0)} - \sum_{k=1}^{n} X_{k0}^{(0)}\, \delta_{ik}^{(0)}\,. \tag{335}$$

In der Regel wird jedoch die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte nachgeprüft, so daß mit der üblichen Abkürzung folgende Gleichung identisch erfüllt sein muß:

$$1_i^{(n)}\, \delta_{i0}^{(n)} = 1_{i,}^{(0)}\, \delta_{i0}^{(n)} = \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_0^{(n)} \frac{F_c}{F}\, ds + \int M_i^{(0)} M_0^{(n)} \frac{J_c}{J}\, ds = 0\,. \tag{336}$$

Für die Schnittkräfte aus Temperatur- und Stützenbewegung ist

$$\left.\begin{aligned}
1_i^{(0)}\, \delta_{it}^{(n)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_t^{(n)} \frac{F_c}{F}\, ds + \int M_i^{(0)} M_t^{(n)} \frac{J_c}{J}\, ds \\
&\qquad + E J_c \left[\int N_i^{(0)} \alpha_t t\, ds + \int M_i^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\, ds \right] = 0, \\
1_i^{(0)}\, \delta_{is}^{(n)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_s^{(n)} \frac{F_c}{F}\, ds + \int M_i^{(0)} M_s^{(n)} \frac{J_c}{J}\, ds - E J_c \sum C_{ei}^{(0)} \Delta_c = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{337}$$

Die Schnittkräfte $M_i^{(0)}$ eines geschlossenen oder beiderseits eingespannten Stabzugs sind in Abb. 153 eingetragen, so daß durch die Kontinuität des Stabwerks am Querschnitt i die folgenden drei Bedingungen nachgewiesen werden müssen:

$$\sum \int 1 M_0^{(3)} \frac{J_c}{J}\, ds = 0; \qquad \sum \int v M_0^{(3)} \frac{J_c}{J}\, ds = 0; \qquad \sum \int x M_0^{(3)} \frac{J_c}{J}\, ds = 0\,. \tag{338}$$

In diesem Falle ist die Summe der positiven und negativen mit J_c/J reduzierten Momentenflächen aus der vorgeschriebenen Belastung Null. Dasselbe gilt von ihren Momenten bezogen auf die Achsen u und v.

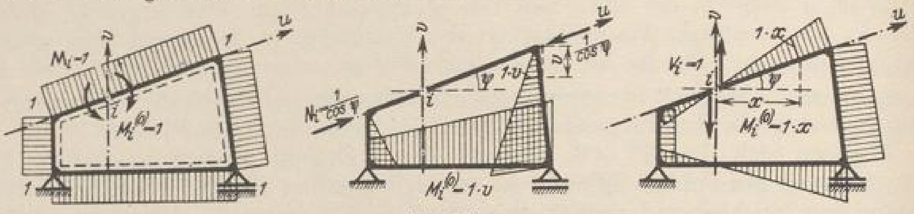

Abb. 153.

Wahl des Hauptsystems. Das Hauptsystem soll nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, abgesehen von besonderen Ausnahmen, kinematisch starr sein und keine unendlich kleine Beweglichkeit enthalten. Dabei sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte derart auszuwählen, daß die Schnittkräfte des Hauptsystems der Größenordnung nach mit denjenigen des vorgelegten Stabwerks übereinstimmen und der dem Ansatz (285) zugrunde liegende Stabzug nach Möglichkeit symmetrisch ist. Zumeist ergeben sich Vorteile für die Lösung, wenn alle überzähligen Größen die gleiche Dimension besitzen, also entweder Momente oder Kräfte darstellen. Die Brauchbarkeit des Hauptsystems zeigt sich im Ansatz durch kleine Verschiebungen δ_{ik} relativ zu δ_{kk}, also durch geringe gegenseitige Abhängigkeit der überzähligen Größen. Die Auflösung des Ansatzes wird um so günstiger, je enger der Bereich ist, in dem sich die Schnittkräfte M_i, M_k aus den einzelnen Belastungszuständen $-X_i = 1$, $-X_k = 1$ überlagern. Je kleiner die Schnittkräfte M_i, M_k des Hauptsystems aus den überzähligen Größen im Verhältnis zu denjenigen sind, welche allein durch die Belastung hervorgerufen werden, um so zweckmäßiger ist das Hauptsystem zur Abminderung der mit jeder Superposition verbundenen Fehlerquellen. Führt die Untersuchung zu Einflußlinien und daher zur Aufzeichnung von Biegelinien des Lastgurtes, so verdient der einfache oder zusammengesetzte Balkenträger durch die einfachen Stützenbedingungen als Hauptsystem den Vorzug.

Pirlet, J.: Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Gebilde. Diss. Aachen 1909. — Hertwig, A.: Die Fehlerwirkungen beim Auflösen linearer Gleichungen und die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1917 S. 110. — Worch, G.: Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Bauing. 1925 S. 554.

26. Stabwerke mit wenigen überzähligen Größen.

Um die Methode im einzelnen anzuwenden und die Auflösung der n Elastizitätsgleichungen eines hochgradig statisch unbestimmten Systems vorzubereiten, werden zunächst Stabwerke mit 1 bis 3 überzähligen Größen behandelt.

Einfach statisch unbestimmtes System. Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus Belastung $\mathfrak{P}$ und überzähliger Größe X_1 sind nach (288)

$$C = C_0 - X_1 C_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \quad M = M_0 - X_1 M_1, \quad Q = Q_0 - X_1 Q_1. \tag{339}$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 wird aus der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems und des vorgelegten Systems bestimmt und nach (290) mit $k = 1$ berechnet.

$$\begin{aligned} 1_1 \cdot \delta_1 = 0 = \int N_1 \frac{N_0\, ds}{EF} + \int M_1 \frac{M_0\, ds}{EJ} + \int N_1 \alpha_t t\, ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\, ds \\ - \sum C_{e1} \Delta_e - X_1 \left[\int N_1^2 \frac{ds}{EF} + \int M_1^2 \frac{ds}{EJ} \right]. \end{aligned} \tag{340}$$