Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Ansatz

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

25. Die Grundlagen für die Bildung der Matrix.

Ansatz. Die n Elastizitätsgleichungen zur Berechnung von n überzähligen Größen X_k aus einem statisch bestimmten Hauptsystem erhalten nach der Begründung in Abschnitt 24 folgende Form:

$$X_1\,\delta_{k1} + X_2\,\delta_{k2} + \cdots X_k\,\delta_{kk} + \cdots X_{n-1}\,\delta_{k(n-1)} + X_n\,\delta_{kn} = \delta_{k0}\,.$$

Bei einem $(n-h)$fach statisch unbestimmten Hauptsystem erscheinen nach (294) die Verschiebungen $\delta_{kk}^{(n-h)}$, $\delta_{ki}^{(n-h)}$, $\delta_{k0}^{(n-h)}$. Die n Gleichungen werden zur besseren Übersicht in einer Zahlentafel (319) zusammengefaßt:

X_1	X_2		X_{k-1}	X_k	X_{k+1}		X_{n-1}	X_n		
δ_{11}	δ_{12}		$\delta_{1(k-1)}$	δ_{1k}	$\delta_{1(k+1)}$		$\delta_{1(n-1)}$	δ_{1n}	δ_{10}	
δ_{21}	δ_{22}		$\delta_{2(k-1)}$	δ_{2k}	$\delta_{2(k+1)}$		$\delta_{2(n-1)}$	δ_{2n}	δ_{20}	
									$\cdot$	
δ_{k1}	δ_{k2}		$\delta_{k(k-1)}$	δ_{kk}	$\delta_{k(k+1)}$		$\delta_{k(n-1)}$	δ_{kn}	δ_{k0}	(319)
									$\cdot$	
$\delta_{(n-1)1}$	$\delta_{(n-1)2}$		$\delta_{(n-1)(k-1)}$	$\delta_{(n-1)k}$	$\delta_{(n-1)(k+1)}$		$\delta_{(n-1)(n-1)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}$	
δ_{n1}	δ_{n2}		$\delta_{n(k-1)}$	δ_{nk}	$\delta_{n(k+1)}$		$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	δ_{n0}	

Für den allgemeinen Belastungsfall tritt an die Stelle von δ_{k0}

$$\delta_{k\otimes} = \delta_{k0} + \delta_{kt} + \delta_{ks}\,.$$

Die gegenseitigen Verschiebungen oder Verdrehungen $\delta_{k1}\ldots\delta_{kh}\ldots$ der Ufer des Querschnitts (k) infolge von $-X_h = 1$ ($h = 1\ldots n$) werden als virtuelle Arbeiten $1_k\cdot\delta_{k1}\ldots 1_k\cdot\delta_{kh}\ldots$ der Kräftegruppe $-X_k = 1$ berechnet. Sie erhalten den gleichen Richtungssinn wie die Kräfte $-X_k$. Die Summe der Vorzahlen einer Zeile (k)

$$\delta_{k1} + \delta_{k2} + \cdots \delta_{kh} + \cdots \delta_{kn} = \delta_{k\Sigma}\,, \tag{320}$$

kann als die virtuelle Arbeit der Kraft $-X_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus dessen Belastung durch $-X_1 = 1\cdots - X_n = 1$, also durch die Nachrechnung von $1_k\cdot\delta_{k\Sigma}$ geprüft werden. Hieraus entsteht mit $k = 1\ldots n$

$$\sum_{k=1}^{k=n} 1_k\,\delta_{k\Sigma} = 1_\Sigma\,\delta_{\Sigma\Sigma} = (\delta_{11} + \cdots \delta_{1n}) + (\delta_{21} + \cdots \delta_{2n}) + \cdots (\delta_{n1} + \cdots \delta_{nn}) \tag{321}$$

und damit eine allgemeine Rechenprobe für die Richtigkeit des Ansatzes.

Die Matrix der Elastizitätsgleichungen ist mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ zur Hauptdiagonale symmetrisch. Die Tafel (319) kann daher abgekürzt angeschrieben werden. Im Grenzfalle sind entweder die n überzähligen Größen in allen n Gleichungen enthalten oder sie sind unabhängig voneinander. Die Matrix ist dabei voll besetzt oder auf die Hauptdiagonale beschränkt. Die Nebenglieder sind dann Null. Beide Grenzfälle sind Ausnahmen. Der Aufbau der zahlreichen, für das Bauwesen charakteristischen, statisch unbestimmten Stabzüge führt vielmehr zu ausgezeichneten Klassen von mehrgliedrigen Bedingungsgleichungen. Sie unterscheiden sich nach der Anzahl der Unbekannten, die in jeder von ihnen auftreten und den aufeinanderfolgenden Gleichungen gemeinsam sind. Die Zuordnung der überzähligen Größen begründet in der Regel die Zusammenfassung einer ungeraden Anzahl von ihnen, also drei-, fünf-, sieben- und neungliedrige Gleichungen. Aus dem gleichen Grunde enthalten die ersten und letzten Gleichungen des Ansatzes im Vergleich zu den mittleren eine geringere Anzahl von Unbekannten.

Auflösung und konjugierte Matrix. Die Auflösung einer Gruppe von n linearen Gleichungen begegnet in formaler Beziehung keinen Schwierigkeiten. Jede Unbekannte kann mit den aus der Determinantentheorie bekannten Symbolen unmittelbar angegeben werden.

$$X_k = \frac{D_k}{D} = \frac{D_{1k}}{D}\,\delta_{10} + \frac{D_{2k}}{D}\,\delta_{20} + \cdots \frac{D_{nk}}{D}\,\delta_{n0}. \tag{322}$$

In diesem Ausdruck ist D_{ik} die Adjunkte zu der Vorzahl δ_{ik} der Matrix. Sie entsteht aus der Nennerdeterminante durch Streichung der $i$ten Zeile und der $k$ten Spalte. Ihr Vorzeichen wird durch $(-1)^{i+k}$ bestimmt. Dem Bruch $D_{ik}/D = \beta_{ik}$ liegt ein ausgezeichnetes Hauptsystem zugrunde. Er ist von der Belastung unabhängig und allein durch die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks bestimmt.

$$X_k = \beta_{1k}\delta_{10} + \cdots \beta_{ik}\delta_{i0} + \cdots \beta_{kk}\delta_{k0} + \cdots \beta_{nk}\delta_{n0}. \tag{323}$$

Mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ wird nach einer Vertauschung der Zeilen und Spalten der Determinante ebenfalls $D_{ik} = D_{ki}$, damit auch $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ und

$$X_k = \beta_{k1}\delta_{10} + \cdots \beta_{ki}\delta_{i0} + \cdots \beta_{kk}\delta_{k0} + \cdots \beta_{kn}\delta_{n0}. \tag{324}$$

Hiernach erhält β_{ki} die Bedeutung der überzähligen Größe X_k, wenn die Belastungszahl δ_{i0} allein gleich 1 und alle übrigen δ_{h0} Null gesetzt werden. Der Index i durchläuft dabei die Zahlenreihe 1, 2 über k bis n. Bei n überzähligen Größen X_k entstehen auf diese Weise der Zahl nach n^2 Vorzahlen β_{ik}, von denen jedoch nur $1/2 \cdot n(n+1)$ untereinander verschieden sind. Sie werden auch hier unabhängig von der Belastung allein aus den elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und bilden, als Spalten einer Tabelle angeschrieben, die konjugierte, zur Hauptdiagonale symmetrische Matrix zu (319)

	δ_{10}	δ_{20}		$\delta_{(k-1)0}$	δ_{k0}	$\delta_{(k+1)0}$		$\delta_{(n-1)0}$	δ_{n0}
X_1	β_{11}	β_{12}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}
X_2	β_{21}	β_{22}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}
$\vdots$									
X_k	β_{k1}	β_{k2}		$\beta_{k(k-1)}$	β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}
$\vdots$									
X_{n-1}	$\beta_{(n-1)1}$	$\beta_{(n-1)2}$		$\beta_{(n-1)(k-1)}$	$\beta_{(n-1)k}$	$\beta_{(n-1)(k+1)}$		$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$
X_n	β_{n1}	β_{n2}		$\beta_{n(k-1)}$	β_{nk}	$\beta_{n(k+1)}$		$\beta_{n(n-1)}$	β_{nn}

(325)

Die Auflösung der geometrischen Bedingungsgleichungen mit Determinanten ist nur bei einer Verknüpfung von wenigen Unbekannten möglich. Bei größeren Ansätzen wird stets nach den Vorschriften des Abschnitts 29 gerechnet. Dies geschieht bei vorgeschriebener Belastung unter Einbeziehung der Belastungszahlen. Bei mehreren Belastungsfällen wird in der Regel die konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ki} (325) verwendet

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\delta_{i0} \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{326}$$