UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Auflösung und konjugierte Matrix

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Visual Library

sieben- und neungliedrige Gleichungen. Aus dem gleichen Grunde enthalten die ersten und letzten Gleichungen des Ansatzes im Vergleich zu den mittleren eine geringere Anzahl von Unbekannten.

Auflösung und konjugierte Matrix. Die Auflösung einer Gruppe von n linearen Gleichungen begegnet in formaler Beziehung keinen Schwierigkeiten. Jede Unbekannte kann mit den aus der Determinantentheorie bekannten Symbolen unmittelbar angegeben werden.

$$X_k = \frac{D_k}{D} = \frac{D_{1k}}{D}\,\delta_{10} + \frac{D_{2k}}{D}\,\delta_{20} + \cdots \frac{D_{nk}}{D}\,\delta_{n0}. \tag{322}$$

In diesem Ausdruck ist D_{ik} die Adjunkte zu der Vorzahl δ_{ik} der Matrix. Sie entsteht aus der Nennerdeterminante durch Streichung der $i$ten Zeile und der $k$ten Spalte. Ihr Vorzeichen wird durch $(-1)^{i+k}$ bestimmt. Dem Bruch $D_{ik}/D = \beta_{ik}$ liegt ein ausgezeichnetes Hauptsystem zugrunde. Er ist von der Belastung unabhängig und allein durch die geometrischen und elastischen Eigenschaften des Stabwerks bestimmt.

$$X_k = \beta_{1k}\delta_{10} + \cdots \beta_{ik}\delta_{i0} + \cdots \beta_{kk}\delta_{k0} + \cdots \beta_{nk}\delta_{n0}. \tag{323}$$

Mit $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ wird nach einer Vertauschung der Zeilen und Spalten der Determinante ebenfalls $D_{ik} = D_{ki}$, damit auch $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ und

$$X_k = \beta_{k1}\delta_{10} + \cdots \beta_{ki}\delta_{i0} + \cdots \beta_{kk}\delta_{k0} + \cdots \beta_{kn}\delta_{n0}. \tag{324}$$

Hiernach erhält β_{ki} die Bedeutung der überzähligen Größe X_k, wenn die Belastungszahl δ_{i0} allein gleich 1 und alle übrigen δ_{h0} Null gesetzt werden. Der Index i durchläuft dabei die Zahlenreihe 1, 2 über k bis n. Bei n überzähligen Größen X_k entstehen auf diese Weise der Zahl nach n^2 Vorzahlen β_{ik}, von denen jedoch nur $1/2 \cdot n(n+1)$ untereinander verschieden sind. Sie werden auch hier unabhängig von der Belastung allein aus den elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und bilden, als Spalten einer Tabelle angeschrieben, die konjugierte, zur Hauptdiagonale symmetrische Matrix zu (319)

	δ_{10}	δ_{20}		$\delta_{(k-1)0}$	δ_{k0}	$\delta_{(k+1)0}$		$\delta_{(n-1)0}$	δ_{n0}
X_1	β_{11}	β_{12}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}
X_2	β_{21}	β_{22}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}
⋮									
X_k	β_{k1}	β_{k2}		$\beta_{k(k-1)}$	β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}
⋮									
X_{n-1}	$\beta_{(n-1)1}$	$\beta_{(n-1)2}$		$\beta_{(n-1)(k-1)}$	$\beta_{(n-1)k}$	$\beta_{(n-1)(k+1)}$		$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$
X_n	β_{n1}	β_{n2}		$\beta_{n(k-1)}$	β_{nk}	$\beta_{n(k+1)}$		$\beta_{n(n-1)}$	β_{nn}

(325)

Die Auflösung der geometrischen Bedingungsgleichungen mit Determinanten ist nur bei einer Verknüpfung von wenigen Unbekannten möglich. Bei größeren Ansätzen wird stets nach den Vorschriften des Abschnitts 29 gerechnet. Dies geschieht bei vorgeschriebener Belastung unter Einbeziehung der Belastungszahlen. Bei mehreren Belastungsfällen wird in der Regel die konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ki} (325) verwendet

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\delta_{i0} \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{326}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Werden an Stelle der Vorzahlen δ_{ik} der geometrischen Bedingungsgleichungen (319) zur Vereinfachung der Zahlenrechnung Vielfache dieser Werte, also $c\delta_{ik}$ verwendet, so ist

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki}(c\,\delta_{i0}) \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{327}$$

Die Glieder der konjugierten Matrix $\beta'_{ki} = \beta_{ki}/c$ $(k = 1 \ldots n)$ werden dann für $(c\delta_{i0}) = 1$ berechnet.

Steht eine wandernde Last $P_m = 1$ in einem beliebigen Punkte m des Lastgurtes, so ist $\delta_{k0} = \delta_{km}$ die Ordinate der Einflußlinie der gegenseitigen Verschiebung (k) des Hauptsystems. Sie wird nach Maxwell als Biegelinie des Lastgurtes für $-X_k = 1$ berechnet. Demnach entsteht die Einflußlinie

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\,\delta_{mi} \qquad (k = 1 \ldots n) \tag{328}$$

durch Überlagerung der mit den Vorzahlen β_{ki} erweiterten Ordinaten der Biegelinien δ_{mi} $(i = 1 \ldots n)$ oder als einzelne Biegelinie des Lastgurtes unter der gemeinsamen Wirkung der überzähligen Größen

$$-X_1 = \beta_{1k}, \qquad \ldots - X_i = \beta_{ik}, \qquad \ldots - X_n = \beta_{nk}$$

am Hauptsystem.

Die Auflösung der Matrix wird durch Einsetzen der einer vorgeschriebenen Belastung zugeordneten Wurzeln X_k in die geometrischen Bedingungen (319) nachgeprüft. Dasselbe gilt von den Vorzahlen β_{ki}. Sie müssen den Ansatz (319) mit dem Leitwert i, also mit den Belastungsgliedern $\delta_{10} = 0, \ldots \delta_{i0} = 1, \ldots \delta_{n0} = 0$ identisch erfüllen.

Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung kann entweder nach dem Einfluß von Fehlern in den Vorzahlen δ_{ik} aus ungenauen Annahmen oder nach dem Einfluß von Abrundungsfehlern in der Zwischenrechnung beurteilt werden. Sie unterliegen gleichen mathematischen Kennzeichen, da die Abrundungsfehler als ungenaue Vorzahlen des Ansatzes gelten können.

Die Wurzeln der Lösung werden nach S. 166 mit $X_k = D_k/D$ angegeben, so daß mit der Nennerdeterminante D auch deren Fehler allen überzähligen Größen X_k gemeinsam sind. Daher untersucht A. Hertwig den Einfluß der um $\pm\, p_{ik}\delta_{ik}$ von dem wahren Betrag δ_{ik} abweichenden Vorzahlen $(\delta_{ik} \pm p_{ik}\delta_{ik})$ auf die Nennerdeterminante D. Wird $p_{ik} = p$ konstant angenommen und darunter ein größter oder mittlerer Fehler verstanden, um den sich alle Vorzahlen von den wirklichen Werten unterscheiden, so ist mit $D' = D + \Delta D$ für $(\delta_{ik} \pm p\,\delta_{ik})$ an Stelle von δ_{ik}

$$X'_k = \frac{D_k}{D'} = \frac{D_k}{D + \Delta D} = \frac{D_k}{D} - \frac{D_k}{D}\,\frac{\Delta D}{D'} = X_k\left(1 - \frac{\Delta D}{D'}\right) = X_k(1 - \varphi). \tag{329}$$

Der Fehler p der Vorzahlen ist eine kleine Zahl, so daß die Entwicklung der Nennerdeterminante D' als Reihe von Potenzen in p mit dem linearen Gliede abgebrochen werden kann. In diesem Falle ist

$$\frac{\Delta D}{D'} = \frac{\Sigma\, p\,\delta_{ik} D_{ik}}{D'} = \Sigma\, p\,\delta_{ik}\beta_{ik}. \tag{330}$$

Der Unterschied φX_k wird im Vergleich zum wahren Wert der Wurzeln X_k am größten, wenn die Summe nur aus positiven Gliedern besteht. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung wird daher unter der Annahme eines Betrages $\pm\, p$, also eines Fehlers

$$\varphi = \pm\, p\,\frac{\Sigma\,|\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} = \pm\, p \sum_i \sum_k |\beta_{ik}\,\delta_{ik}| \tag{331}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN