Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Fehlerempfindlichkeit der Lösung

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Werden an Stelle der Vorzahlen δ_{ik} der geometrischen Bedingungsgleichungen (319) zur Vereinfachung der Zahlenrechnung Vielfache dieser Werte, also $c\delta_{ik}$ verwendet, so ist

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta'_{ki}(c\,\delta_{i0}) \qquad (k = 1 \ldots n). \tag{327}$$

Die Glieder der konjugierten Matrix $\beta'_{ki} = \beta_{ki}/c$ $(k = 1 \ldots n)$ werden dann für $(c\delta_{i0}) = 1$ berechnet.

Steht eine wandernde Last $P_m = 1$ in einem beliebigen Punkte m des Lastgurtes, so ist $\delta_{k0} = \delta_{km}$ die Ordinate der Einflußlinie der gegenseitigen Verschiebung (k) des Hauptsystems. Sie wird nach Maxwell als Biegelinie des Lastgurtes für $-X_k = 1$ berechnet. Demnach entsteht die Einflußlinie

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\,\delta_{mi} \qquad (k = 1 \ldots n) \tag{328}$$

durch Überlagerung der mit den Vorzahlen β_{ki} erweiterten Ordinaten der Biegelinien δ_{mi} $(i = 1 \ldots n)$ oder als einzelne Biegelinie des Lastgurtes unter der gemeinsamen Wirkung der überzähligen Größen

$$-X_1 = \beta_{1k}, \qquad \ldots - X_i = \beta_{ik}, \qquad \ldots - X_n = \beta_{nk}$$

am Hauptsystem.

Die Auflösung der Matrix wird durch Einsetzen der einer vorgeschriebenen Belastung zugeordneten Wurzeln X_k in die geometrischen Bedingungen (319) nachgeprüft. Dasselbe gilt von den Vorzahlen β_{ki}. Sie müssen den Ansatz (319) mit dem Leitwert i, also mit den Belastungsgliedern $\delta_{10} = 0, \ldots \delta_{i0} = 1, \ldots \delta_{n0} = 0$ identisch erfüllen.

Fehlerempfindlichkeit der Lösung. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung kann entweder nach dem Einfluß von Fehlern in den Vorzahlen δ_{ik} aus ungenauen Annahmen oder nach dem Einfluß von Abrundungsfehlern in der Zwischenrechnung beurteilt werden. Sie unterliegen gleichen mathematischen Kennzeichen, da die Abrundungsfehler als ungenaue Vorzahlen des Ansatzes gelten können.

Die Wurzeln der Lösung werden nach S. 166 mit $X_k = D_k/D$ angegeben, so daß mit der Nennerdeterminante D auch deren Fehler allen überzähligen Größen X_k gemeinsam sind. Daher untersucht A. Hertwig den Einfluß der um $\pm p_{ik}\delta_{ik}$ von dem wahren Betrag δ_{ik} abweichenden Vorzahlen $(\delta_{ik} \pm p_{ik}\delta_{ik})$ auf die Nennerdeterminante D. Wird $p_{ik} = p$ konstant angenommen und darunter ein größter oder mittlerer Fehler verstanden, um den sich alle Vorzahlen von den wirklichen Werten unterscheiden, so ist mit $D' = D + \Delta D$ für $(\delta_{ik} \pm p\delta_{ik})$ an Stelle von δ_{ik}

$$X'_k = \frac{D_k}{D'} = \frac{D_k}{D + \Delta D} = \frac{D_k}{D} - \frac{D_k}{D}\frac{\Delta D}{D'} = X_k\left(1 - \frac{\Delta D}{D'}\right) = X_k(1 - \varphi). \tag{329}$$

Der Fehler p der Vorzahlen ist eine kleine Zahl, so daß die Entwicklung der Nennerdeterminante D' als Reihe von Potenzen in p mit dem linearen Gliede abgebrochen werden kann. In diesem Falle ist

$$\frac{\Delta D}{D'} = \frac{\Sigma p\,\delta_{ik} D_{ik}}{D'} = \Sigma p\,\delta_{ik}\beta_{ik}. \tag{330}$$

Der Unterschied φX_k wird im Vergleich zum wahren Wert der Wurzeln X_k am größten, wenn die Summe nur aus positiven Gliedern besteht. Die Fehlerempfindlichkeit der Lösung wird daher unter der Annahme eines Betrages $\pm p$, also eines Fehlers

$$\varphi = \pm p\,\frac{\Sigma|\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} = \pm p \sum_i \sum_k |\beta_{ik}\delta_{ik}| \tag{331}$$

beurteilt. Der Zähler ist die Summe der n^2 Produkte der n^2 Unterdeterminanten D_{ik} von $(n-1)$ter Ordnung mit den ihnen zugeordneten Vorzahlen δ_{ik}.

Da nun die Nennerdeterminante D' als die Summe der positiven und negativen Produkte $\delta_{ik} D_{ik}$ jeder Spalte angeschrieben wird, ist φ um so größer, je mehr sich die Summe bei gegebenen p von dem $n$fachen Betrage der Nennerdeterminante D' unterscheidet, je kleiner also D' wird. Ist $D' = 0$, $p \neq 0$, so ist φ unendlich groß. Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn zwei Zeilen oder Spalten einander gleich sind oder mit konstantem Faktor ineinander übergehen. Der optimale Grenzwert liegt bei $\varphi = (\pm p) n$.

Die Empfindlichkeit der Wurzeln gegen Abrundungsfehler kann unter Umständen durch Transformation der Unbekannten X_k abgeändert werden. Der Ansatz erhält auf diese Weise eine größere Nennerdeterminante. Die Empfindlichkeit des Ansatzes gegen Fehler in den Vorzahlen bleibt dabei bestehen. Beide Ursachen der Fehlerempfindlichkeit können gleichzeitig nur durch Änderung des Hauptsystems gemildert oder beseitigt werden.

Die Stützwiderstände C und die Schnittkräfte N, M, Q des Stabwerks entstehen nach (288) durch numerische oder graphische Superposition der Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den überzähligen Größen X_k des Hauptsystems. Das Ergebnis ist als Summe von positiven und negativen Beiträgen wiederum durch Fehlerempfindlichkeit gefährdet. Diese wird durch das Hauptsystem bestimmt und kann daher nur durch dessen Abänderung beseitigt werden. Sie verliert um so mehr an Bedeutung, je kleiner die überzähligen Größen durch geeignete Anordnung und Belastung des Hauptsystems sind. Am besten werden sie überhaupt nur als Unterschiede gegenüber plausiblen Annahmen der überzähligen Größen berechnet.

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks. Die statisch überzähligen Schnittkräfte X_k aus den vorgeschriebenen Ursachen $(\mathfrak{P}, t, \Delta_e)$ sind neben der Belastung $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte des Hauptsystems. Die Schnittkräfte und Verschiebungen lassen sich daher nach den Abschnitten 13ff. und 17ff. wie bei jedem statisch bestimmten Stabwerk für eine Belastung aus $\mathfrak{P}$ und X_k $(k = 1 \ldots n)$ berechnen. Sie können aber auch nach (288) und (289) durch die gruppenweise Überlagerung einzelner statisch bestimmter Beiträge C_0, M_0 usw. mit $C_k \cdot X_k$, $M_k \cdot X_k$ usw. oder einzelner Verschiebungen w_0 usw. mit $w_k \cdot X_k$ usw. angeschrieben werden. Die statisch bestimmten Schnittkräfte M_0, M_k usw. sind einzeln und daher auch nach der Gruppenbildung im Sinne von (284) im Gleichgewicht.

Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach denselben Regeln aufgezeichnet. Sie entstehen entweder durch die unmittelbare Überlagerung der Anteile M_0 mit $M_k \cdot X_k$ nach (288) oder durch die Verwendung der Ansätze (324ff.) für X_k. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} M &= M_0 - \sum_k M_k X_k \quad; & Q &= Q_0 - \sum_k Q_k X_k \quad; \\ &= M_0 - \sum_k [M_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}]; & &= Q_0 - \sum_k [Q_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}]; \\ &= M_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k M_k \beta_{ki}]; & &= Q_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k Q_k \beta_{ki}]. \end{aligned} \qquad (332)$$

Die Einflußlinien setzen sich darnach aus dem statisch bestimmten Anteil M_0, Q_0 und einer resultierenden Biegelinie zusammen, die entweder durch Überlagerung von n Biegelinien oder ebenso wie auf S. 167 als einzelne Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für Kräfte $-X_i = \sum_k M_k \beta_{ki}$ $(i = 1 \ldots n)$ gefunden wird.

Nachprüfung der Kontinuität des Stabzugs als Rechenprobe für die Schnittkräfte. Da die statischen Bedingungen durch die Art der Untersuchung an jedem Abschnitt des Stabwerks von vornherein erfüllt sind, können die Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks (C, N, M, Q) nur durch die