Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Nachprüfung der Kontinuität des Stabzugs als Rechenprobe für die Schnittkräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

beurteilt. Der Zähler ist die Summe der n^2 Produkte der n^2 Unterdeterminanten D_{ik} von $(n-1)$ter Ordnung mit den ihnen zugeordneten Vorzahlen δ_{ik}.

Da nun die Nennerdeterminante D' als die Summe der positiven und negativen Produkte $\delta_{ik} D_{ik}$ jeder Spalte angeschrieben wird, ist φ um so größer, je mehr sich die Summe bei gegebenen p von dem $n$fachen Betrage der Nennerdeterminante D' unterscheidet, je kleiner also D' wird. Ist $D' = 0$, $p \neq 0$, so ist φ unendlich groß. Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn zwei Zeilen oder Spalten einander gleich sind oder mit konstantem Faktor ineinander übergehen. Der optimale Grenzwert liegt bei $\varphi = (\pm p) n$.

Die Empfindlichkeit der Wurzeln gegen Abrundungsfehler kann unter Umständen durch Transformation der Unbekannten X_k abgeändert werden. Der Ansatz erhält auf diese Weise eine größere Nennerdeterminante. Die Empfindlichkeit des Ansatzes gegen Fehler in den Vorzahlen bleibt dabei bestehen. Beide Ursachen der Fehlerempfindlichkeit können gleichzeitig nur durch Änderung des Hauptsystems gemildert oder beseitigt werden.

Die Stützwiderstände C und die Schnittkräfte N, M, Q des Stabwerks entstehen nach (288) durch numerische oder graphische Superposition der Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den überzähligen Größen X_k des Hauptsystems. Das Ergebnis ist als Summe von positiven und negativen Beiträgen wiederum durch Fehlerempfindlichkeit gefährdet. Diese wird durch das Hauptsystem bestimmt und kann daher nur durch dessen Abänderung beseitigt werden. Sie verliert um so mehr an Bedeutung, je kleiner die überzähligen Größen durch geeignete Anordnung und Belastung des Hauptsystems sind. Am besten werden sie überhaupt nur als Unterschiede gegenüber plausiblen Annahmen der überzähligen Größen berechnet.

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks. Die statisch überzähligen Schnittkräfte X_k aus den vorgeschriebenen Ursachen $(\mathfrak{P}, t, \Delta_e)$ sind neben der Belastung $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte des Hauptsystems. Die Schnittkräfte und Verschiebungen lassen sich daher nach den Abschnitten 13ff. und 17ff. wie bei jedem statisch bestimmten Stabwerk für eine Belastung aus $\mathfrak{P}$ und X_k $(k = 1 \ldots n)$ berechnen. Sie können aber auch nach (288) und (289) durch die gruppenweise Überlagerung einzelner statisch bestimmter Beiträge C_0, M_0 usw. mit $C_k \cdot X_k$, $M_k \cdot X_k$ usw. oder einzelner Verschiebungen w_0 usw. mit $w_k \cdot X_k$ usw. angeschrieben werden. Die statisch bestimmten Schnittkräfte M_0, M_k usw. sind einzeln und daher auch nach der Gruppenbildung im Sinne von (284) im Gleichgewicht.

Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach denselben Regeln aufgezeichnet. Sie entstehen entweder durch die unmittelbare Überlagerung der Anteile M_0 mit $M_k \cdot X_k$ nach (288) oder durch die Verwendung der Ansätze (324ff.) für X_k. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned}
M &= M_0 - \sum_k M_k X_k & ; \qquad Q &= Q_0 - \sum_k Q_k X_k & ; \\
&= M_0 - \sum_k [M_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}]; & &= Q_0 - \sum_k [Q_k \sum_i \beta_{ki} \delta_{mi}]; & \\
&= M_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k M_k \beta_{ki}]; & &= Q_0 - \sum_i [\delta_{mi} \sum_k Q_k \beta_{ki}]. & \qquad (332)
\end{aligned}$$

Die Einflußlinien setzen sich darnach aus dem statisch bestimmten Anteil M_0, Q_0 und einer resultierenden Biegelinie zusammen, die entweder durch Überlagerung von n Biegelinien oder ebenso wie auf S. 167 als einzelne Biegelinie des Lastgurtes des Hauptsystems für Kräfte $-X_i = \sum_k M_k \beta_{ki}$ $(i = 1 \ldots n)$ gefunden wird.

Nachprüfung der Kontinuität des Stabzugs als Rechenprobe für die Schnittkräfte. Da die statischen Bedingungen durch die Art der Untersuchung an jedem Abschnitt des Stabwerks von vornherein erfüllt sind, können die Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks (C, N, M, Q) nur durch die

Untersuchung des zugeordneten Verschiebungszustandes als richtig festgestellt werden. Dies geschieht durch Nachprüfung der Randbedingungen des freien Stabwerks, welche durch die Abstützung vorgeschrieben sind und durch Nachrechnung der relativen Bewegung $\delta_i^{(n)}$ der Ufer von n Querschnitten. Das Ergebnis $\delta_i^{(n)} = 0$ $(i = 1 \ldots n)$ bestätigt die Richtigkeit der Rechnung. In der Regel begnügt man sich mit einzelnen für die Nachprüfung geeigneten Ansätzen. Dabei sollen die Biegungsmomente $\overline{M}_i$ (171) in einem möglichst großen Bereich des Stabwerks vorhanden sein und sich von den Biegungsmomenten M_i wesentlich unterscheiden.

Ergeben sich die $\delta_i^{(n)} \neq 0$, so muß die Rechnung wiederholt werden. Eine Abschätzung des Fehlers $\delta_i^{(n)} = \Delta$ in seiner Bedeutung für den Spannungszustand genügt nur bei kleinen Unterschieden. Sind die Vorzahlen δ_{ik} der Elastizitätsgleichungen richtig, so können die $\delta_i^{(n)} = \Delta$ zugeordneten Unterschiede ΔX_k der überzähligen Größen mit den Vorzahlen der konjugierten Matrix ausgerechnet werden. Um sich jedoch von allen Voraussetzungen der vorhandenen Lösung frei zu machen, wird die dem Fehler $\delta_i^{(n)} = \Delta$ zugeordnete Änderung der Stütz- oder Schnittkraft Z_i in einem $(n - 1)$fach statisch unbestimmten Hauptsystem festgestellt. Bezeichnet Z_i die genaue Stütz- oder Schnittkraft, Z_i^* ihren fehlerhaften Wert in der vorhandenen Lösung, so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\delta_{i0}^{(n-1)} - Z_i \, \delta_{ii}^{(n-1)} = 0,$$

$$\delta_{i0}^{(n-1)} - Z_i^* \, \delta_{ii}^{(n-1)} = \Delta.$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen liefert den Fehler

$$\Delta Z_i = Z_i - Z_i^* = \Delta / \delta_{ii}^{(n-1)}. \tag{333}$$

Er läßt sich zur Vereinfachung der Rechnung mit

$$\overline{\Delta Z_i} = \Delta / \delta_{ii}^{(0)} < \Delta Z_i \tag{334}$$

abschätzen.

Das System wird daher von den Stützen gelöst oder an einer geeigneten Stelle durchschnitten, um die ihrer Größe nach bekannten gegenseitigen Verschiebungen oder Verdrehungen als Funktion der nachgewiesenen Schnittkräfte nach Abschnitt 13ff. zu berechnen. Die virtuelle Arbeit $1_i^{(n)} \cdot \delta_i^{(n)}$ ist dabei Null oder vorgeschrieben. Sie kann nach (293) als Funktion äußerer Kräfte angegeben werden:

$$1_i^{(n)} \delta_{i0}^{(n)} = 1_i^{(0)} \delta_{i0}^{(n)} = 1_i^{(0)} \delta_{i0}^{(0)} - \sum_{k=1}^{n} X_{k0}^{(0)} \delta_{ik}^{(0)}. \tag{335}$$

In der Regel wird jedoch die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte nachgeprüft, so daß mit der üblichen Abkürzung folgende Gleichung identisch erfüllt sein muß:

$$1_i^{(n)} \delta_{i0}^{(n)} = 1_{i,}^{(0)} \delta_{i0}^{(n)} = \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_0^{(n)} \frac{F_c}{F} \, ds + \int M_i^{(0)} M_0^{(n)} \frac{J_c}{J} \, ds = 0. \tag{336}$$

Für die Schnittkräfte aus Temperatur- und Stützenbewegung ist

$$\left.\begin{aligned} 1_i^{(0)} \delta_{it}^{(n)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_t^{(n)} \frac{F_c}{F} \, ds + \int M_i^{(0)} M_t^{(n)} \frac{J_c}{J} \, ds \\ &\qquad + E J_c \left[\int N_i^{(0)} \alpha_t t \, ds + \int M_i^{(0)} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \, ds \right] = 0, \\ 1_i^{(0)} \delta_{is}^{(n)} &= \frac{J_c}{F_c} \int N_i^{(0)} N_s^{(n)} \frac{F_c}{F} \, ds + \int M_i^{(0)} M_s^{(n)} \frac{J_c}{J} \, ds - E J_c \sum C_{ci}^{(0)} \Delta_c = 0. \end{aligned}\right\} \tag{337}$$

Die Schnittkräfte $M_i^{(0)}$ eines geschlossenen oder beiderseits eingespannten Stabzugs sind in Abb. 153 eingetragen, so daß durch die Kontinuität des Stabwerks am Querschnitt i die folgenden drei Bedingungen nachgewiesen werden müssen:

$$\sum \int 1 M_0^{(3)} \frac{J_c}{J} \, ds = 0; \quad \sum \int v M_0^{(3)} \frac{J_c}{J} \, ds = 0; \quad \sum \int x M_0^{(3)} \frac{J_c}{J} \, ds = 0. \tag{338}$$

In diesem Falle ist die Summe der positiven und negativen mit J_c/J reduzierten Momentenflächen aus der vorgeschriebenen Belastung Null. Dasselbe gilt von ihren Momenten bezogen auf die Achsen u und v.

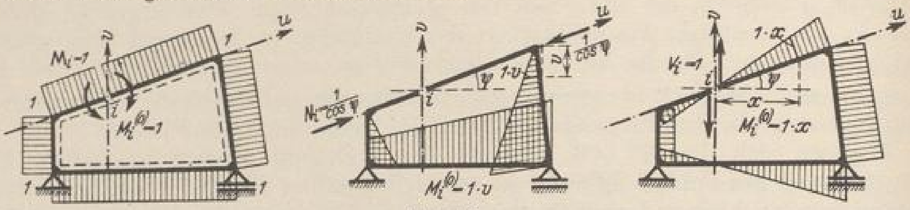

Abb. 153.

Wahl des Hauptsystems. Das Hauptsystem soll nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, abgesehen von besonderen Ausnahmen, kinematisch starr sein und keine unendlich kleine Beweglichkeit enthalten. Dabei sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte derart auszuwählen, daß die Schnittkräfte des Hauptsystems der Größenordnung nach mit denjenigen des vorgelegten Stabwerks übereinstimmen und der dem Ansatz (285) zugrunde liegende Stabzug nach Möglichkeit symmetrisch ist. Zumeist ergeben sich Vorteile für die Lösung, wenn alle überzähligen Größen die gleiche Dimension besitzen, also entweder Momente oder Kräfte darstellen. Die Brauchbarkeit des Hauptsystems zeigt sich im Ansatz durch kleine Verschiebungen δ_{ik} relativ zu δ_{kk}, also durch geringe gegenseitige Abhängigkeit der überzähligen Größen. Die Auflösung des Ansatzes wird um so günstiger, je enger der Bereich ist, in dem sich die Schnittkräfte M_i, M_k aus den einzelnen Belastungszuständen $-X_i = 1$, $-X_k = 1$ überlagern. Je kleiner die Schnittkräfte M_i, M_k des Hauptsystems aus den überzähligen Größen im Verhältnis zu denjenigen sind, welche allein durch die Belastung hervorgerufen werden, um so zweckmäßiger ist das Hauptsystem zur Abminderung der mit jeder Superposition verbundenen Fehlerquellen. Führt die Untersuchung zu Einflußlinien und daher zur Aufzeichnung von Biegelinien des Lastgurtes, so verdient der einfache oder zusammengesetzte Balkenträger durch die einfachen Stützenbedingungen als Hauptsystem den Vorzug.

Pirlet, J.: Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Gebilde. Diss. Aachen 1909. — Hertwig, A.: Die Fehlerwirkungen beim Auflösen linearer Gleichungen und die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1917 S. 110. — Worch, G.: Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Bauing. 1925 S. 554.

26. Stabwerke mit wenigen überzähligen Größen.

Um die Methode im einzelnen anzuwenden und die Auflösung der n Elastizitätsgleichungen eines hochgradig statisch unbestimmten Systems vorzubereiten, werden zunächst Stabwerke mit 1 bis 3 überzähligen Größen behandelt.

Einfach statisch unbestimmtes System. Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus Belastung $\mathfrak{P}$ und überzähliger Größe X_1 sind nach (288)

$$C = C_0 - X_1 C_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \quad M = M_0 - X_1 M_1, \quad Q = Q_0 - X_1 Q_1. \tag{339}$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 wird aus der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems und des vorgelegten Systems bestimmt und nach (290) mit $k = 1$ berechnet.

$$\begin{aligned} 1_1 \cdot \delta_1 = 0 = \int N_1 \frac{N_0\,ds}{EF} + \int M_1 \frac{M_0\,ds}{EJ} + \int N_1 \alpha_t t\,ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\,ds \\ - \sum C_{e1} \Delta_e - X_1 \left[\int N_1^2 \frac{ds}{EF} + \int M_1^2 \frac{ds}{EJ} \right]. \end{aligned} \tag{340}$$