



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

26. Stabwerke mit wenigen überzähligen Größen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

In diesem Falle ist die Summe der positiven und negativen mit  $J_e/J$  reduzierten Momentenflächen aus der vorgeschriebenen Belastung Null. Dasselbe gilt von ihren Momenten bezogen auf die Achsen  $u$  und  $v$ .

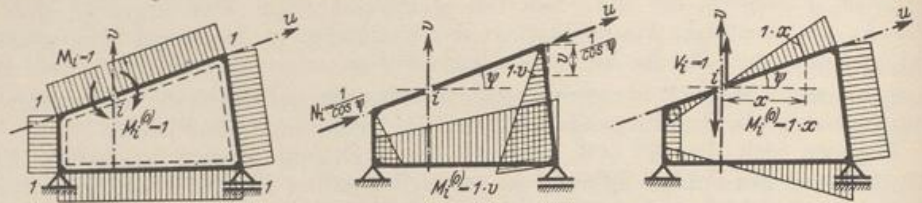


Abb. 153.

**Wahl des Hauptsystems.** Das Hauptsystem soll nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, abgesehen von besonderen Ausnahmen, kinematisch starr sein und keine unendlich kleine Beweglichkeit enthalten. Dabei sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte derart auszuwählen, daß die Schnittkräfte des Hauptsystems der Größenordnung nach mit denjenigen des vorgelegten Stabwerks übereinstimmen und der dem Ansatz (285) zugrunde liegende Stabzug nach Möglichkeit symmetrisch ist. Zumeist ergeben sich Vorteile für die Lösung, wenn alle überzähligen Größen die gleiche Dimension besitzen, also entweder Momente oder Kräfte darstellen. Die Brauchbarkeit des Hauptsystems zeigt sich im Ansatz durch kleine Verschiebungen  $\delta_{ik}$  relativ zu  $\delta_{kk}$ , also durch geringe gegenseitige Abhängigkeit der überzähligen Größen. Die Auflösung des Ansatzes wird um so günstiger, je enger der Bereich ist, in dem sich die Schnittkräfte  $M_i, M_k$  aus den einzelnen Belastungszuständen  $-X_i = 1, -X_k = 1$  überlagern. Je kleiner die Schnittkräfte  $M_i, M_k$  des Hauptsystems aus den überzähligen Größen im Verhältnis zu denjenigen sind, welche allein durch die Belastung hervorgerufen werden, um so zweckmäßiger ist das Hauptsystem zur Abminderung der mit jeder Superposition verbundenen Fehlerquellen. Führt die Untersuchung zu Einflußlinien und daher zur Aufzeichnung von Biegelinien des Lastgurtes, so verdient der einfache oder zusammengesetzte Balkenträger durch die einfachen Stützenbedingungen als Hauptsystem den Vorzug.

Pirlet, J.: Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Gebilde. Diss. Aachen 1909. — Hertwig, A.: Die Fehlerwirkungen beim Auflösen linearer Gleichungen und die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1917 S. 110. — Worch, G.: Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Bauing. 1925 S. 554.

## 26. Stabwerke mit wenigen überzähligen Größen.

Um die Methode im einzelnen anzuwenden und die Auflösung der  $n$  Elastizitätsgleichungen eines hochgradig statisch unbestimmten Systems vorzubereiten, werden zunächst Stabwerke mit 1 bis 3 überzähligen Größen behandelt.

**Einfach statisch unbestimmtes System.** Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus Belastung  $\mathfrak{B}$  und überzähliger Größe  $X_1$  sind nach (288)

$$C = C_0 - X_1 C_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \quad M = M_0 - X_1 M_1, \quad Q = Q_0 - X_1 Q_1. \quad (339)$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft  $X_1$  wird aus der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems und des vorgelegten Systems bestimmt und nach (290) mit  $k = 1$  berechnet.

$$1_1 \cdot \delta_1 = 0 = \int N_1 \frac{N_0 ds}{EF} + \int M_1 \frac{M_0 ds}{EJ} + \int N_1 \alpha_t t ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{e1} \Delta_e - X_1 \left[ \int N_1^2 \frac{ds}{EF} + \int M_1^2 \frac{ds}{EJ} \right]. \quad (340)$$

Die Superposition der Formänderung des Hauptsystems aus den vorhandenen äußeren Ursachen nach (293) liefert folgende Bedingung:

$$\delta_1 = 0 = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} - X_1 \delta_{11} = \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11}. \quad (341)$$

Nach dem erweiterten Ansatz vom Minimum der Formänderungsarbeit ist die partielle Ableitung der Funktion  $A_i^{**}$  nach  $X_1$  Null.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 &= \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t ds \\ &+ \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e. \end{aligned}$$

In dieser ist  $\partial C_e / \partial X_1 = -C_1$ ,  $\partial N / \partial X_1 = -N_1$ ,  $\partial M / \partial X_1 = -M_1$ , so daß der Ansatz mit (340) übereinstimmt.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11}} \\ &= \frac{\frac{J_e}{F_e} \int N_1 N_0 \frac{F_e}{F} ds + \int M_1 M_0 \frac{J_e}{J} ds + EJ_e \left[ \int N_1 \alpha_t t ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{e1} \Delta_e \right]}{\frac{J_e}{F_e} \int N_1^2 \frac{F_e}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_e}{J} ds}. \end{aligned} \quad (342)$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft  $X_1$  besteht aus drei Anteilen. Die Belastung  $\mathfrak{P}$  erzeugt im statisch bestimmten Hauptsystem die Schnittkräfte  $N_0, M_0$ , die Temperaturänderung ist mit  $(t, \Delta t)$ , die Stützenverschiebung durch gemessene oder geschätzte Beträge  $\Delta_e$  vorgeschrieben. Die Gleichung der Einflußlinie von  $X_1$  wird nach

$$X_1 = \delta_{m1} / \delta_{11} \quad (343)$$

berechnet oder aufgezeichnet.

**Zweifach statisch unbestimmtes System.** Die Stütz- und Schnittkräfte entstehen durch Superposition der Anteile aus der Belastung  $\mathfrak{P}$  und den überzähligen Größen  $X_1$  und  $X_2$ .

$$\left. \begin{aligned} C &= C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2, & N &= N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2, \\ M &= M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2. \end{aligned} \right\} \quad (344)$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte  $X_1, X_2$  machen nach S. 164 die erweiterte Funktion der Formänderungsarbeit  $A_i^{**}$  zum Minimum, so daß deren partielle Ableitungen nach  $X_1$  und  $X_2$  Null sind.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 &= \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t ds \\ &+ \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e, \\ \frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_2} = 0 &= \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \frac{N ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{M ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \alpha_t t ds \\ &+ \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_2} \Delta_e, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_1} = -N_1, \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -M_1, \quad \frac{\partial C}{\partial X_1} = -C_1,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_2} = -N_2, \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = -M_2, \quad \frac{\partial C}{\partial X_2} = -C_2.$$

Der Ansatz ist hier wegen seiner grundsätzlichen Bedeutung für die Elastizitätstheorie wiederholt worden, obwohl das Ergebnis nach (293) in integrierter Form an-

geschrieben werden kann. Die Abkürzung verdient durch die anschauliche geometrische Auslegung den Vorzug.

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 = 0 &= \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12}; & \delta_{1\otimes} &= \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s}; \\ \delta_2 = 0 &= \delta_{2\otimes} - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22}; & \delta_{2\otimes} &= \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s}; \\ X_1 &= \frac{\delta_{1\otimes} \delta_{22} - \delta_{2\otimes} \delta_{12}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}} \left( \delta_{1\otimes} - \delta_{2\otimes} \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} \right); \\ X_2 &= \frac{\delta_{2\otimes} \delta_{11} - \delta_{1\otimes} \delta_{21}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}} \left( \delta_{2\otimes} - \delta_{1\otimes} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (345)$$

Dasselbe Ergebnis entsteht nach (324) durch Superposition der Belastungsglieder. Die Lösung des Ansatzes für  $\delta_{10} = 1$  und  $\delta_{20} = 0$  wird mit  $X_1 = \beta_{11}$  und  $X_2 = \beta_{21}$ , die Lösung für  $\delta_{10} = 0$  und  $\delta_{20} = 1$  mit  $X_1 = \beta_{12}$  und  $X_2 = \beta_{22}$  bezeichnet. Dabei ist  $\beta_{21} = \beta_{12}$ .

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1\otimes} = 1 \\ \delta_{2\otimes} = 0 \end{aligned} \right\} \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}}; \quad \beta_{21} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{22}} \beta_{11}, \\ \delta_{2\otimes} = 1 \\ \delta_{1\otimes} = 0 \end{aligned} \right\} \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}; \quad \beta_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \beta_{22}, \quad (346)$$

$$X_1 = \beta_{11} \delta_{1\otimes} + \beta_{12} \delta_{2\otimes}; \quad X_2 = \beta_{21} \delta_{1\otimes} + \beta_{22} \delta_{2\otimes}. \quad (347)$$

Das Ergebnis läßt sich unmittelbar mit (345) vergleichen und bildet die Anweisung für die Berechnung der Einflußlinien der statisch unbestimmten Schnittkräfte. Die Einflußlinie  $X_1$  wird als Biegelinie des Lastgurtes bei der Belastung des Hauptsystems mit  $-X_1 = \beta_{11}$ ,  $-X_2 = \beta_{12}$ , die Einflußlinie  $X_2$  bei der Belastung mit  $-X_1 = \beta_{21}$ ,  $-X_2 = \beta_{22}$  erhalten.

Der Quotient  $\delta_{21}/\delta_{22}$  der Lösung kann als die überzählige Schnittkraft  $X_2$  für  $-X_1 = 1$  angesehen und daher durch  $X_{21}$  bezeichnet werden. Ebenso läßt sich  $\delta_{12}/\delta_{11} = X_{12}$  als der Betrag von  $X_1$  infolge von  $-X_2 = 1$  und  $\delta_{10}/\delta_{11} = X_{10}$ ,  $\delta_{20}/\delta_{22} = X_{20}$  als die überzähligen Größen eines einfach statisch unbestimmten Systems aus der Belastung  $\mathfrak{P}$  deuten. Daher ist (345) auch

$$X_1 = \frac{\delta_{10} - \delta_{12} X_{20}}{\delta_{11} - \delta_{12} X_{21}}; \quad X_2 = \frac{\delta_{20} - \delta_{21} X_{10}}{\delta_{22} - \delta_{21} X_{12}}. \quad (348)$$

Zähler und Nenner sind daher nach dem Superpositions-gesetz die Verschiebungen  $\delta_1^{(1)}$ ,  $\delta_2^{(1)}$  in zwei einfach statisch unbestimmten Hauptsystemen aus der Belastung  $\mathfrak{P}$  und  $-X_1 = 1$  oder  $-X_2 = 1$ . Die überzähligen Größen können daher auch folgendermaßen angeschrieben und berechnet werden:

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(1)}}{\delta_{11}^{(1)}}; \quad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}. \quad (349)$$

**Dreifach statisch unbestimmtes System.** Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems werden nach (288) durch Superposition der Belastung und der überzähligen Größen folgendermaßen zerlegt:

$$\left. \begin{aligned} C &= C_{\otimes} - X_1 C_1 - X_2 C_2 - X_3 C_3, \\ N &= N_{\otimes} - X_1 N_1 - X_2 N_2 - X_3 N_3, \\ M &= M_{\otimes} - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3, \\ Q &= Q_{\otimes} - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - X_3 Q_3. \end{aligned} \right\} \quad (350)$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte  $X_1, X_2, X_3$  sind nach (285) durch die geometrische Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems bestimmt.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 X_1 & X_2 & X_3 \\
 \hline
 (1) & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{10} \\
 (2) & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{20} \\
 (3) & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{30}
 \end{array}
 \end{array} \quad (351)$$

Der Ansatz wird nach S. 166 mit Determinanten aufgelöst.

$$\left. \begin{array}{l}
 X_1 = \frac{\delta_{10}(\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{23}) - \delta_{20}(\delta_{12}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{13}) + \delta_{30}(\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{22}\delta_{13})}{\delta_{11}(\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{23}) - \delta_{21}(\delta_{12}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{13}) + \delta_{31}(\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{22}\delta_{13})}, \\
 X_2 = \frac{-\delta_{10}(\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23}) + \delta_{20}(\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{13}) - \delta_{30}(\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{21}\delta_{13})}{-\delta_{12}(\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23}) + \delta_{22}(\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{13}) - \delta_{32}(\delta_{11}\delta_{23} - \delta_{21}\delta_{13})}, \\
 X_3 = \frac{\delta_{10}(\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{22}) - \delta_{20}(\delta_{11}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{12}) + \delta_{30}(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12})}{\delta_{13}(\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{22}) - \delta_{23}(\delta_{11}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{12}) + \delta_{33}(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12})}.
 \end{array} \right\} (352)$$

Das Ergebnis läßt sich nach (324) auch durch Superposition der Belastungszahlen  $\delta_{h0}$  entwickeln. Dabei ist für

$$\begin{array}{l}
 \delta_{10} = 1, \quad \delta_{20} = 0, \quad \delta_{30} = 0: \quad X_1 = \beta_{11}, \quad X_2 = \beta_{21}, \quad X_3 = \beta_{31}, \\
 \delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = 1, \quad \delta_{30} = 0: \quad X_1 = \beta_{12}, \quad X_2 = \beta_{22}, \quad X_3 = \beta_{32}, \\
 \delta_{10} = 0, \quad \delta_{20} = 0, \quad \delta_{30} = 1: \quad X_1 = \beta_{13}, \quad X_2 = \beta_{23}, \quad X_3 = \beta_{33}.
 \end{array}$$

Die Vorzeichen sind unabhängig von der Belastung und können hier aus (352) mit  $D$  als Bezeichnung für die Nennerdeterminante angeschrieben werden.

$$\left. \begin{array}{l}
 \beta_{11} = \frac{1}{D} (\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{32}\delta_{23}); \quad \beta_{21} = -\frac{1}{D} (\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{31}\delta_{23}); \\
 \beta_{31} = \frac{1}{D} (\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{31}\delta_{22}); \quad \text{usw.}
 \end{array} \right\} (353)$$

Die Zählerdeterminanten  $D_{hk}$  und  $D_{kh}$  sind einander gleich. Damit ist auch die Beziehung  $\beta_{hk} = \beta_{kh}$  nachgeprüft worden.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte aus einer beliebigen Belastung mit  $\delta_{1\otimes}, \delta_{2\otimes}, \delta_{3\otimes}$  sind nunmehr

$$\left. \begin{array}{l}
 X_1 = \beta_{11}\delta_{1\otimes} + \beta_{12}\delta_{2\otimes} + \beta_{13}\delta_{3\otimes}, \\
 X_2 = \beta_{21}\delta_{1\otimes} + \beta_{22}\delta_{2\otimes} + \beta_{23}\delta_{3\otimes}, \\
 X_3 = \beta_{31}\delta_{1\otimes} + \beta_{32}\delta_{2\otimes} + \beta_{33}\delta_{3\otimes}.
 \end{array} \right\} (354)$$

Die Matrix der Lösung ist zu (351) konjugiert und mit  $\beta_{kh} = \beta_{hk}$  außerdem zur Hauptdiagonale symmetrisch.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \delta_{1\otimes} & \delta_{2\otimes} & \delta_{3\otimes} \\
 \hline
 X_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\
 X_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\
 X_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}
 \end{array}
 \end{array} \quad (355)$$

Das Ergebnis muß die Bedingungen (351) identisch erfüllen. Die Nachprüfung für

$\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}$  und  $\delta_{10} = 1$  besteht daher in

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} \delta_{11} + \beta_{21} \delta_{12} + \beta_{31} \delta_{13} &= 1, \\ \beta_{11} \delta_{21} + \beta_{21} \delta_{22} + \beta_{31} \delta_{23} &= 0, \\ \beta_{11} \delta_{31} + \beta_{21} \delta_{32} + \beta_{31} \delta_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (356)$$

Ähnliche Bedingungen gelten für  $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32}$  und  $\delta_{20} = 1$  oder  $\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}$  und  $\delta_{30} = 1$ .

Die Einflußlinien der überzähligen Größen nach (328) werden wieder durch Überlagerung der mit den  $\beta$ -Vorzeichen erweiterten Ordinaten der Biegelinien  $\delta_{mk}$  des Lastgurtes des Hauptsystems oder auch als Biegelinien für ausgezeichnete Gruppen von äußeren Kräften erhalten. Diese bestehen für die Einflußlinie  $X_1$  aus  $-X_1 = \beta_{11}, -X_2 = \beta_{12}, -X_3 = \beta_{13}$ .

**Schnittkräfte.** Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach (288) durch Superposition bestimmt. Die Vorzeichen  $C_k, N_k, M_k, Q_k$  des Ansatzes sind aus den

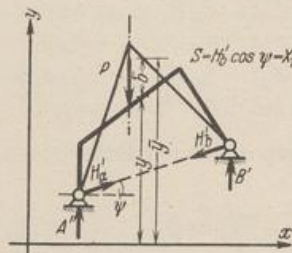


Abb. 154.  
 $M = X_1 \left[ \frac{M_0}{X_1} - M_1 \right]$   
 $= X_1 \bar{b} = X_1 (\bar{y} - y).$

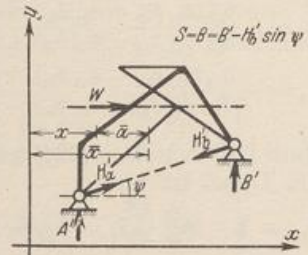


Abb. 155.  
 $M = B \left[ \frac{M_0}{B} - \frac{X_1}{B} M_1 \right]$   
 $= B \bar{a} = B (\bar{x} - x).$

Schaulinien der Schnittkräfte für  $-X_k = 1$  bekannt, mit denen die Verschiebungen  $\delta_{1k}$  usw. berechnet worden sind. Der Ansatz (288) gilt auch für die Schnittkräfte aus einer vorgeschriebenen Belastung. Die statisch unbestimmten Größen  $X_1$  usw. sind in diesem Falle ebenso wie  $\mathfrak{P}$  äußere Kräfte, aus denen die Schnittkräfte numerisch oder zeichnerisch nach den Abschnitten (13 ff.) angegeben werden.

Die graphische Darstellung der Schnittkräfte wird in der Regel auf die Biegemomente beschränkt. Sie werden meist als Ordinaten an der Zugseite des Stabzugs winkelrecht zur Achse aufgetragen, um ein übersichtliches Bild zu gewinnen.

Die Lösung ist bei zahlreichen Aufgaben durch die Entwicklung der Biegemomente nach  $M = S \bar{s}$  einfacher. In dieser bedeutet  $S$  eine Komponente der Mittelkraft der äußeren Kräfte des statisch unbestimmten Tragwerks links von einem beliebigen Querschnitt, die für den ganzen Stabzug oder wenigstens für große Abschnitte konstant ist. Die Strecke  $\bar{s}$  ist die Differenz  $\bar{b} = (\bar{y} - y)$  oder  $\bar{a} = (\bar{x} - x)$  der Koordinaten  $x, y$  der Schwerpunkte oder Kernpunkte der Querschnitte und der Koordinaten  $\bar{x}, \bar{y}$  der Mittelkraftlinie des  $n$ -fach statisch unbestimmten Systems.

a) Einfach statisch unbestimmtes Stabwerk mit  $\mathfrak{P}$  und der überzähligen Größe  $X_1$  eines statisch bestimmten Hauptsystems (Abb. 154 u. 155):

$$M = M_0 - X_1 M_1 = S \left( \frac{M_0}{S} - \frac{X_1}{S} M_1 \right). \quad (357)$$

b) Zwei- und dreifach statisch unbestimmtes Stabwerk mit  $\mathfrak{P}$  und der überzähligen Größe  $X_1$  des ein- oder zweifach statisch unbestimmten Hauptsystems:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} = S \left( \frac{M_0^{(1)}}{S} - \frac{X_1}{S} M_1^{(1)} \right), \\ M &= M_0^{(2)} - X_1 M_1^{(2)} = S \left( \frac{M_0^{(2)}}{S} - \frac{X_1}{S} M_1^{(2)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (358)$$

Diese Formulierung der Schnittkräfte kann mit Vorteil auf die beiderseits eingespannten und die ringsum geschlossenen Stabzüge angewendet und auch auf mehrteilige Tragwerke übertragen werden. Der Abschnitt 60 enthält Beispiele.

**Untersuchung eines Brückenträgers auf 3 Stützen.**

1. Geometrische Grundlagen: Theoretische Stützweite:  $l_1 = l_2 = l = 18,0$  m. Abmessungen nach Abb. 156a, hieraus  $\zeta = J_c/J$  (Abb. 156b)<sup>1</sup>.

$$J_c = J_a = J_b = 0,2 J_k = 0,1150 \text{ m}^4.$$

$x$  und  $\xi = x/l$  werden im Felde  $l_1$  von  $a$  nach  $c$ , im Felde  $l_2$  von  $b$  nach  $c$  gemessen.

$\xi$	0 bis 6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	1,0
$J_c/J$	1,0000	0,9631	0,8406	0,6453	0,4551	0,3016	0,2026

a) Trägerbild

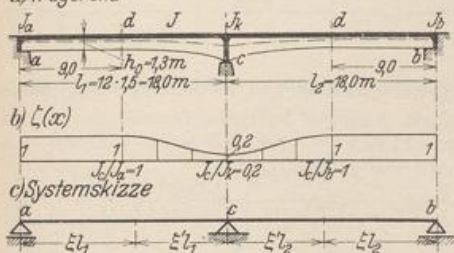


Abb. 156.

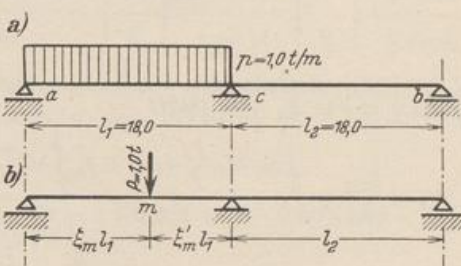


Abb. 157.

Materialkonstanten:  $E_b = 210 \text{ t/cm}^2$ ;  $\alpha_t = 0,00001$ .

2. Belastung: Aus der Anzahl der möglichen Belastungsfälle werden die folgenden herausgegriffen: a) ruhende Last  $p = 1,0 \text{ t}$  (Abb. 157a); b) bewegliche Last  $P = 1,0 \text{ t}$  (Abb. 157b); c) geschätzte Stützensenkung:

$$\Delta_c = 1 \text{ cm}; \quad \Delta_a = \Delta_b = 0;$$

d) ungleichmäßige Erwärmung:

$$\Delta t = t_u - t_0 = -10^0.$$

<sup>1</sup> Zum Vergleich werden auch die Funktionen  $J_c/J$  auf S. 97 verwendet:

Trägerbild:

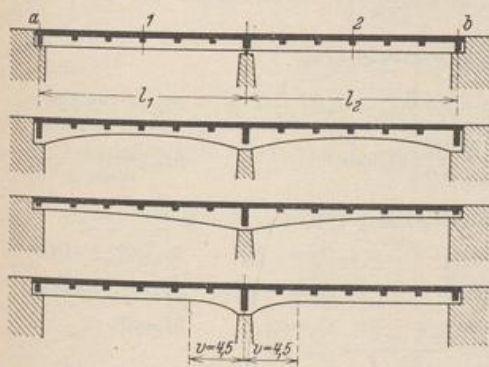


Abb. 158 a-d.

Verlauf der Trägheitsmomente:

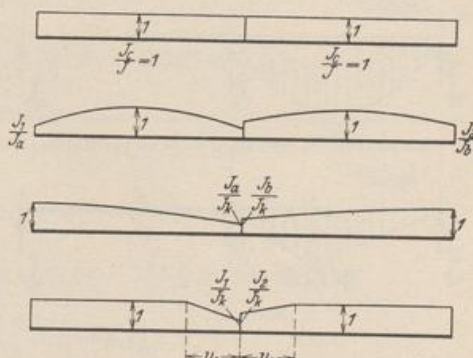


Abb. 159 a-d.

- a)  $\zeta = J_1/J = 1$  { konstantes Trägheitsmoment jedes Stabes  
( $J_c = J_1$  für  $x = 0,5 l$ ).
- b)  $\zeta = J_1/J = 1 - (1 - J_1/J_a)(1 - 2\xi)^2$  { Die Querschnittszunahme ist stetig und symmetrisch zur Feldmitte.
- c)  $\zeta = J_a/J = 1 - (1 - J_a/J_k)(1 - \xi)^2$  { Die Querschnittszunahme ist stetig und unsymmetrisch zur Feldmitte.
- d)  $\zeta = J_1/J = 1 - (1 - J_1/J_k)(1 - \xi'/v_1)$  { Die Querschnittszunahme beschränkt sich auf die Voute ( $v_1 = v_1/l_1$ ).

Die Formeln gelten für den Bereich  $l_1$ .

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist einfach statisch unbestimmt.

Ausbildung des Hauptsystems.

a) Träger auf zwei Stützen.  $X_1$ : Stützkraft der Mittelstütze (Abb. 160a).

b) Auslegerträger.  $X_1$ : Stützkraft einer Seitenstütze (Abb. 160b).

c) Zwei Träger auf zwei Stützen.  $X_1$ : Moment der Normalspannungen in dem der Mittelstütze unmittelbar benachbarten Querschnitt (Abb. 160c).

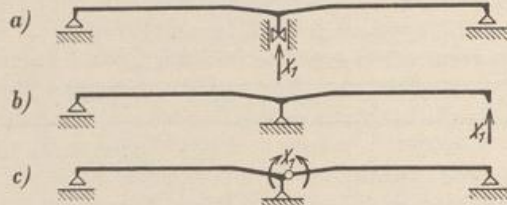


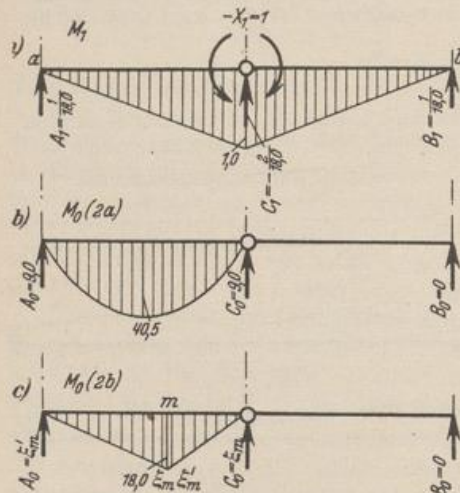
Abb. 160.

Nach den Bemerkungen auf S. 170 verdient das Hauptsystem c) (Abb. 160) den Vorzug. Berechnung von  $X_1$  nach (342):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\int_0^l M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds + E J_c \int_0^l M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - E J_c \sum C_{e1} \Delta e}{\int_0^l M_1^2 \frac{J_c}{J} ds} = \frac{\delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1e}}{\delta_{11}}$$

Die Mitwirkung der Querkraft wird nach S. 159 vernachlässigt, der Einfluß der Längskräfte ist Null.

Stütz- und Schnittkräfte im Hauptsystem (Kräfte in t, Momente in mt) (Abb. 161):



a) Belastung  $-X_1 = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= + \frac{1}{18,0} \\ C_1 &= - \frac{2}{18,0} \\ B_1 &= + \frac{1}{18,0} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_1 &= + \frac{1}{18,0}; & M_1 &= \xi; \\ Q_1 &= - \frac{1}{18,0}; & M_1 &= \xi. \end{aligned}$$

b) Belastung (2a):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= + 9,0 \\ C_0 &= + 9,0 \\ B_0 &= \pm 0,0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_0 &= 18,0 \left( \frac{1}{2} - \xi \right); & M_0 &= 162 \xi \xi'; \\ Q_0 &= 0; & M_0 &= 0. \end{aligned}$$

c) Belastung (2b):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \xi'_m \\ C_0 &= \xi_m \\ B_0 &= 0,0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \div m: & Q_0 = \xi'_m; & M_0 &= \xi'_m \xi \cdot 18,0; \\ m \div c: & Q_0 = -\xi_m; & M_0 &= \xi_m \xi' \cdot 18,0; \\ c \div b: & Q_0 = 0; & M_0 &= 0. \end{aligned}$$

Abb. 161.

$$4. \quad \delta_{11} = \int_a^b M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2l \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi; \quad \xi^2 \frac{J_c}{J} = \eta.$$

Numerische Integration für die punktweise vorgeschriebene Funktion  $J_c/J$  mit Hilfe der Simpsonschen Reihe nach (181) oder (182):

$$\alpha) \quad \delta'_{11} = 2l \int_0^1 \eta d\xi = 2 \frac{\Delta x}{3} (\eta_0 + 4\eta_1 + 2\eta_2 + \dots + 2\eta_{2n-2} + 4\eta_{2n-1} + \eta_{2n}) = 2 \frac{\Delta x}{3} \Sigma_1$$

$$\Delta x = 1,5 \text{ m}; \quad \Sigma_1 = 7,10838; \quad \delta'_{11} = 7,10838.$$



$$\beta) \delta_{11} = 2l \int_0^1 \eta d\xi = 2 \frac{\Delta x}{3} (\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + \dots + 3\eta_{n-2} + 3\eta_{n-1} + \eta_n) = 2 \frac{\Delta x}{3} \Sigma_2,$$

$$\Delta x = 1,5 \text{ m}; \quad \Sigma_2 = 6,32425; \quad \delta_{11} = 7,11477.$$

m	$\xi$	$\xi^2$	$\frac{J_c}{J}$	$\xi^2 \frac{J_c}{J}$	$h_1$	$h_1 \xi^2 \frac{J_c}{J}$	$h_2$	$h_2 \xi^2 \frac{J_c}{J}$
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1	0,00000	1	0,00000
1	0,08333	0,00694	1,00000	0,00694	4	0,02776	3	0,02082
2	0,16667	0,02778	1,00000	0,02778	2	0,05556	3	0,08334
3	0,25000	0,06250	1,00000	0,06250	4	0,25000	2	0,12500
.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	1,00000	1,00000	0,2026	0,20260	1	0,20260	1	0,20260
					$\Sigma_1$	7,10838	$\Sigma_2$	6,32425

Wird die Funktion  $\zeta = J_c/J$  zwischen den Querschnitten  $d$  und  $c$  angenähert linear angenommen, so kann  $\delta_{11}$  formal integriert werden<sup>1</sup>. Nach Tabelle 14b Seite 108 ist mit  $M_a = \bar{M}_a = 1,0 \text{ mt}$ ,  $n = 0,2$ ;  $v = v/l = 0,5$  und  $l' = l = 18,0 \text{ m}$ :

$$\delta_{11} = \int_a^b M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \int_a^c M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \frac{1}{12} 1,0 \{4 - (1 - 0,2) 0,5 [2 + (2 - 0,5)^2]\} 18,0 = 6,9;$$

$$5. \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{1}{7,11477} = 0,14055;$$

6. und 7. Überzählige Schnittkraft  $X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \beta_{11} \delta_{10}$ .

a) Belastung (2a):

$$\delta_{10} = \int_0^l M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \xi^2 \xi' \frac{J_c}{J} d\xi; \quad \left(\xi^2 \frac{J_c}{J}\right) \xi' = \eta \xi' = \eta';$$

Numerische Integration nach Simpson [(181) und (182)] mit  $p = 1,0 \text{ t/m}$ ,  $l = 18,0 \text{ m}$ ;  $\Delta x = 1,5 \text{ m}$ :  $\Sigma_3 = 2,41055$ ;  $\Sigma_4 = 2,1444$ .

$$\alpha) \quad \delta'_{10} = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \eta' d\xi = \frac{p l^3}{2} \frac{\Delta x}{3} \Sigma_3 = 195,25455;$$

<sup>1</sup> Tabellen 12 ff.: S. 175 mit  $l_1 = l_2 = 18,0$ ;  $n_1 = n_2 = 0,2$ ;  $v_1 = v_2 = 0,25$  und Annahmen  $a \div d$  für  $\zeta$  nach

$$a) \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0; \quad \delta_{11} = \frac{1}{3} (l'_1 + l'_2) = 12,0;$$

$$b) \quad \frac{J_1}{J_a} = n_1; \quad \frac{J_2}{J_b} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{3 + 2 n_1}{15} l'_1 + \frac{3 + 2 n_2}{15} l'_2 = 8,16;$$

$$c) \quad \frac{J_a}{J_k} = n_1; \quad \frac{J_b}{J_k} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_a} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_b} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{2 + 3 n_1}{15} l'_1 + \frac{2 + 3 n_2}{15} l'_2 = 6,24;$$

$$d) \quad \frac{J_1}{J_k} = n_1; \quad \frac{J_2}{J_k} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l'_1}{12} \{4 - (1 - n_1) v_1 [2 + (2 - v_1)^2]\} + \frac{l'_2}{12} \{4 - (1 - n_2) v_2 [2 + (2 - v_2)^2]\} = 8,95.$$

$$\beta) \quad \delta_{10} = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \eta' d\xi = \frac{p l^2}{2} \frac{3}{8} \Delta x \Sigma_4 = 195,41210;$$

$$X'_1 = \frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = 27,46822 \text{ mt}; \quad X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 27,46569 \text{ mt}.$$

Die lineare Angleichung<sup>1</sup> der Funktion  $\zeta = J_c/J$  zwischen den Querschnitten  $d$  und  $c$  liefert mit  $M_0 = 162 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 40,5$  und  $M_1 = 1,0$ ;  $n = 0,2$ :

$$\delta_{10} = \frac{1}{15} 1,0 \cdot 40,5 \{5 - (1 - 0,2) \frac{1}{4} (10 - 10 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{4})\} 18 = 187,11; \quad X_1 = 27,11739 \text{ mt}.$$

b) Belastung (2b).

Gleichung der Biegelinie  $\delta_{m1}$ :  $\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = -M \frac{J_c}{J} = -\xi \frac{J_c}{J} = -w_m$ . Berechnung und Vergleich der Ergebnisse aus (206) und (207):

$\alpha)$

$$\mathfrak{B}'_0 = c/6 \cdot (2 w_0 + w_1),$$

$$\mathfrak{B}'_m = c/6 \cdot (w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}),$$

$$\mathfrak{B}'_n = c/6 \cdot (w_{n-1} + 2 w_n).$$

m	$w_m$	$2 w_0$ 4 $w_m$	$6/c \cdot \mathfrak{B}'_0$ $w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}$	$2 w_n$ $6/c \cdot \mathfrak{B}'_n$	$\mathfrak{B}'_m$
0	0,00000	0,00000	0,08333	—	0,02083
1	0,08333	0,33332	—	0,49999	0,12500
.	.	.	.	.	.

$\beta)$

$$\mathfrak{B}_0 = c/24 (7 w_0 + 6 w_1 - w_2),$$

$$\mathfrak{B}_m = c/12 (w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}),$$

$$\mathfrak{B}_n = c/24 (7 w_n + 6 w_{n-1} - w_{n-2}).$$

m	$w_m$	$7 w_0$ $w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}$ $7 w_n$	$6 w_1$ $6 w_{n-1}$	$24/c \mathfrak{B}_0$ $24/c \mathfrak{B}_m$	$\mathfrak{B}_m$
0	0,00000	0,00000	—	—	0,02083
1	0,08333	—	1,00000	—	0,12500
.	.	.	.	.	.

Die Untersuchung wird mit den genaueren Werten  $\mathfrak{B}_m$  fortgesetzt:

$$A_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m \xi'_m; \quad C_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m \xi_m; \quad \text{Probe: } A_w + C_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m; \quad M_w = \delta_{m1}; \quad X_1 = M_w/\delta_{11}.$$

m	$\mathfrak{B}_m$	$\xi'_m$	$\xi_m$	$\mathfrak{B}_m \xi'_m$	$\mathfrak{B}_m \xi$	$Q_{wm}$	$Q_{wm} c$	$M_w$	$X_1$ [mt]
a	(2,63180)	—	—	—	—	—	—	—	—
0	0,02083	1,00000	0,00000	0,02083	0,00000	—	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,12500	0,91667	0,08333	0,11458	0,01042	2,61097	3,91646	3,91646	0,55045
2	0,25000	0,83333	0,16667	0,20833	0,04167	2,48597	3,72896	7,64542	1,07455
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

<sup>1</sup> Mit den Annahmen über  $\zeta = J_c/J$  im Sinne der Anmerkung auf S. 175,  $\delta_{11}$  nach S. 177,  $l_1 = l_2 = 18,0$ ,  $n_1 = n_2 = 0,2$ ;  $\varphi' = l_2/l_1 = 1,0$ ; und  $p_1 = 1,0$  t/m ist:

a)  $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{1}{1 + \varphi'} = 20,25 \text{ mt};$       b)  $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{4 + n_1}{(3 + 2 n_1) + (3 + 2 n_2) \varphi'} = 25,0 \text{ mt};$

c)  $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{3 + 2 n_1}{(2 + 3 n_1) + (2 + 3 n_2) \varphi'} = 26,5 \text{ mt};$

d)  $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{3,61 + 0,38 n_1}{(2,734 + 1,266 n_1) + (2,734 + 1,266 n_2) \varphi'} = 25,0 \text{ mt};$

Lineare Annäherung<sup>1</sup> der Funktion  $\zeta = J_c/J$  zwischen den Querschnitten  $d$  und  $c$  (Abb. 156):

$$X_1 = \delta_{m1}/\delta_{11} = \delta_{m1}/6,9;$$

$$P = 1 \text{ innerhalb der Voute: } \delta_{m1} = 10,8 \xi' \{5,75 - \xi' [(2 + \xi) + 4(1 - \xi^2)]\};$$

$$P = 1 \text{ außerhalb der Voute: } \delta_{m1} = 27,0 \xi [2(1 - \xi^2) - 0,3].$$

Zahlenwerte der Einflußordinaten:

	$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8
$\alpha$ ) Funktion $\zeta = J_c/J$ nach Abb. 156 b (Fall e, Abb. 162)		1,27	2,17	2,35	1,55
$\beta$ ) lineare Annäherung zwischen $d$ und $c$ . . . . .		1,27	2,17	2,30	1,53

c) Belastung (2c) und (2d)<sup>2</sup>.

$$\alpha) \delta_{11} = 7,11477, \quad \Delta_a = 1,0 \text{ cm}, \quad \Delta_b = \Delta_c = 0, \quad C_1 = -\frac{2}{18,0}, \quad \delta_{1s} = -E J_c (C_1 \Delta_c).$$

Die virtuelle Arbeit ( $C_1 \Delta_c$ ) ist für  $C_1 = -\frac{2}{18}$  positiv, daher

$$\delta_{1s} = -2100000 \cdot 0,115 \left(\frac{2}{18} \cdot 0,01\right) = -268,3333;$$

$$X_{1s} = \delta_{1s}/\delta_{11} = -37,71497 \text{ mt};$$

$\beta$ )  $\Delta t = t_u - t_o = -10^\circ$ ;  $\alpha_t = 10^{-5}$ ; Annahme  $\alpha_t \cdot \Delta t/h = \text{const}$ ,  $h = 1,3 \text{ m}$ .

$$\delta_{1t} = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) = -2100000 \cdot 0,115 \cdot \frac{10^{-5} \cdot 10}{1,3} \cdot 18,0 = -334,3846;$$

$$X_{1t} = \delta_{1t}/\delta_{11} = -46,99865 \text{ mt}.$$

<sup>1</sup> Annahmen über  $\zeta = J_c/J$  nach Anmerkung auf S. 175,  $n = J_1/J$ ;  $v_1 = v_1/l_1$ :

$$a) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{6} (\xi - \xi^3); \quad b) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{15} \xi \xi' \left[ \frac{n_1 + 4}{2} (1 + \xi) + (1 - n_1) \xi^2 (3 \xi' - 1) \right];$$

$$c) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{60} \xi \xi' (1 + \xi) [10 - 3(1 - n_1)(1 + \xi^2)];$$

d)  $P$  innerhalb der Voute:

$$\delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{12} \xi \xi' \left\{ 4 - (1 - n_1) [v_1 (2 + (2 - v_1)^2)] - \xi' \left[ 2 n_1 (2 + \xi) + \frac{1 - n_1}{v_1} (1 - \xi^2) \right] \right\};$$

$P$  außerhalb der Voute:

$$\delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{12} \xi [2(1 - \xi^2) - (1 - n_1) v_1^2 (2 - v_1)];$$

Gleichung der Einflußlinie für  $X_1$ :

$$(P = 1; l_1 = l_1' = 18,0 \quad n_1 = 0,2;$$

$$v_1 = 0,25; \delta_{11} \text{ Seite 177}).$$

$$a) X_1 = 4,5 \omega_D;$$

$$b) X_1 = 5,56 \omega_D + 2,12 \xi^3 (2 - 5 \xi + 3 \xi^2);$$

$$c) X_1 = 8,65 \omega_D (0,76 - 0,24 \xi^2);$$

d)  $P$  innerhalb der Voute:

$$X_1 = 3,02 \xi' \{2,98 - \xi' [0,4(2 + \xi) + 3,2(1 - \xi^2)]\};$$

$P$  außerhalb der Voute:

$$X_1 = 3,02 \xi [2(1 - \xi^2) - 0,088].$$

Zahlenwerte der Einflußordinaten (Abb. 162):

$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8
$a$	0,864	1,512	1,728	1,296
$b$	1,077	1,933	2,172	1,512
$c$	1,250	2,100	2,240	1,510
$d$	1,110	1,920	2,160	1,530

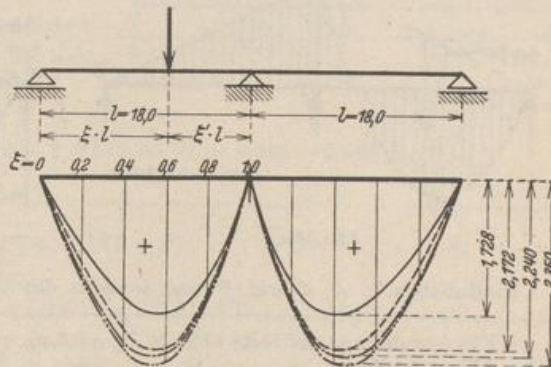


Abb. 162.

Fall a: —  
 Fall b und d: - - - -  
 Fall c: . . . . .  
 Fall e:  $\zeta(x)$  nach Abb. 156 b. - - - - -  
 - Einflußlinie für  $X_1$ .

<sup>2</sup> Mit  $\alpha_t \Delta t/h = \text{const}$  ist  $\delta_{1t}$  ebenso wie  $\delta_{1s}$  unabhängig von  $\zeta = J_c/J$ . Daher ist für alle Querschnittsänderungen:

$$X_{1s} = E J_c \left[ \frac{\Delta_a}{l_1} + \frac{\Delta_b}{l_2} - \Delta_c \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \frac{1}{\delta_{11}}; \quad X_{1t} = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Lineare Annäherung der Funktion  $\zeta = J_c/J$  nach Seite 177:

$$X_{1s} = -\frac{268,3333}{6,9} = -38,8889 \text{ mt}, \quad X_{1t} = -\frac{334,3846}{6,9} = -48,46153 \text{ mt}.$$

8. Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Systems. Die Stütz- oder Schnittkraft  $K$  des einfach statisch unbestimmten Systems ist nach (339):  $K = K_0 - X_1 \cdot K_1$ . Die Kräfte  $K_0$  und  $K_1$  sind in Abb. 161 angegeben.

a) Belastung (2a) (Abb. 163).

$$\begin{aligned} A &= 9,0 - 27,47 \frac{1}{18,0} = 7,47 \text{ t}, & \text{Feld } AC: & \begin{cases} Q = 18,0(0,415 - \xi), \\ M = 1,62\xi(0,83 - \xi), \end{cases} \\ C &= 9,0 + 27,47 \frac{2}{18,0} = 12,06 \text{ t}, & \text{Feld } BC: & \begin{cases} Q = 1,53, \\ M = -27,47\xi, \end{cases} \\ B &= 0,0 - 27,47 \frac{1}{18,0} = -1,53 \text{ t}, \end{aligned}$$

Grenzwerte von  $M$ :  $Q = 0$  für  $\xi = 0,415$ :  $M_{\max} = 27,9 \text{ mt}$ ;  
 $Q = 0$  für  $\xi = 1,0$ :  $M_{\min} = -27,47 \text{ mt}$ ;

b) Belastung (2b) (Abb. 164).

$$A = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0}; \quad C = \xi_m + X_1 \frac{2}{18,0}; \quad B = -X_1 \frac{1}{18,0}.$$

$M$  und  $Q$  für den Schnitt  $x = \xi l$ .

$$\text{Feld } AC: \begin{cases} 0 < \xi < \xi_m: & Q = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0}; & M = \xi(18,0 \xi'_m - X_1); \\ \xi_m < \xi < 1,0: & Q = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0} - 1; & M = \xi \left( 18,0 \frac{\xi'_m \xi_m}{\xi} - X_1 \right); \end{cases}$$

$$\text{Feld } BC: \quad Q = +X_1 \frac{1}{18,0}; \quad M = -\xi X_1.$$

Grenzwerte von  $M$ :  $Q = 0$  für  $\xi = \xi_m$ :  $M_{\max} = \xi_m(18,0 \xi'_m - X_1)$ ;  
 $Q = 0$  für  $\xi = 1,0$ :  $M_{\max} = -X_1$ ;

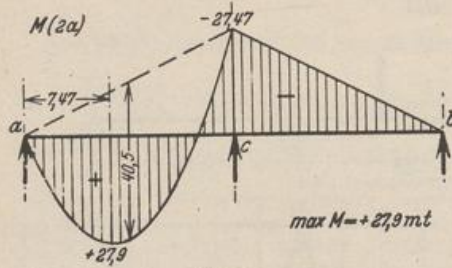


Abb. 163.

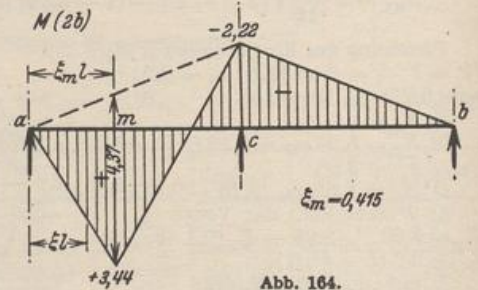


Abb. 164.

Einflußlinien<sup>1</sup>:  $A$ ,  $C$  und  $B$  sind zugleich die Gleichungen der Einflußlinien der Stütz-

<sup>1</sup> Für Annahme a) auf Seite 175 mit  $X_1 = 4,5 \omega_D$  werden die folgenden Einflußlinien erhalten (Abb. 165 und 166):

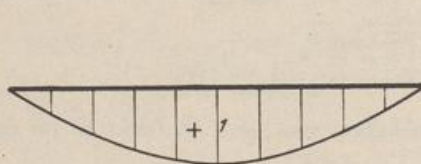


Abb. 165.  
Einflußlinie für  $C$ .

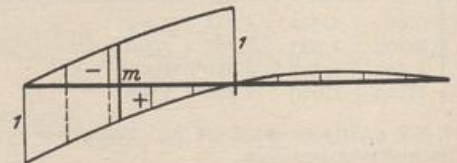


Abb. 166.  
Einflußlinie für  $Q_m$  und  $A$ .

kräfte. Einflußlinien für  $Q_m$  und  $M_m$  im Schnitt  $m$ :

Feld AC:  $0 < \xi < \xi_m : Q_m = -\xi - X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = \xi_m \left( 18,0 \frac{\xi'_m \xi}{\xi_m} - X_1 \right);$

$\xi_m < \xi < 1 : Q_m = -1 - \xi - X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = \xi_m (18,0 (1 - \xi) - X_1);$

Feld CB:  $Q_m = +X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = -\xi_m X_1.$

c) Belastungsfall (2c) und (2d):

	A t	C t	B t	Feld AC		Feld BC	
				Q [t]	M [mt]	Q [t]	M [mt]
$K_s$	+ 2,10	- 4,20	+ 2,10	+ 2,1	+ 37,71 $\xi$	- 2,1	+ 37,71 $\xi$
$K_t$	+ 2,23	- 4,46	+ 2,23	+ 2,23	+ 40,05 $\xi$	- 2,23	+ 40,05 $\xi$

9. Die Schnittkräfte des Stabwerkes ergeben Verschiebungen, die mit den Stützenbedingungen verträglich sein müssen. Dies wird nach (335) geüft durch:

$$\tau = \int M^{(a)} \bar{M}^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 0.$$

Die Funktionen  $\bar{M}^{(0)}$  aller hierfür geeigneten Ansätze zur Nachprüfung der gegenseitigen Verdrehung  $\tau$  der Ufer eines beliebigen Querschnitts  $k$  (Abb. 168 a), der Ufer des Stützenquerschnittes  $c$  (Abb. 168 b) oder der Durchbiegungen  $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$  (Abb. 168 c) unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor  $\mu$ .

$$\bar{M}^{(0)} = \mu \xi, \quad \tau = 0 = \int M^{(a)} \xi \frac{J_c}{J} ds.$$

Belastung (2a):

$M^{(a)}$  wird als Funktion von  $\xi$  angeschrieben. Numerische Integration nach Simpson mit  $J_c/J$  nach 1. S. 175

$$\tau = \int_0^1 \left( A \xi l - \frac{p \xi^2 l^2}{2} \right) \xi \frac{J_c}{J} d\xi + \int_0^1 B \xi l \xi \frac{J_c}{J} d\xi = 9,649 - 9,649 = 0,0.$$

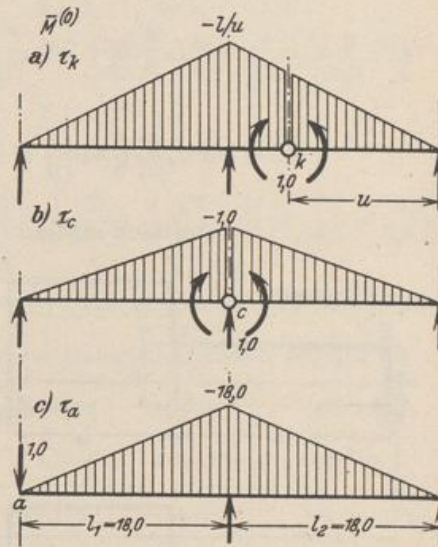


Abb. 168.

$$C = C_0 + 2 \frac{X_1}{l} = \xi + \frac{2 \cdot 4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = \frac{1}{2} (3\xi - \xi^3); \quad M_m = M_{0m} - \xi_m X_1;$$

$$Q_m = Q_{0m} - \frac{X_1}{l} = \begin{cases} -\xi - \frac{4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = -\frac{1}{4} \xi (5 - \xi^2) & \text{links von } m; \\ +1 - \xi - \frac{4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = 1 - \frac{1}{4} \xi (5 - \xi^2) & \text{rechts von } m. \end{cases}$$

Es soll die Einflußlinie für dasjenige Feldmoment berechnet werden, das bei gleichförmiger Belastung am größten wird. An dieser Stelle ist (Fall a):

$$M_m = \begin{cases} \xi'_m l \xi - \xi_m X_1 & \text{links von } m \text{ (Abb. 167),} \\ \xi_m l \xi' - \xi_m X_1 & \text{rechts von } m, \end{cases}$$

$$Q_m = 0 = \frac{p l}{16} (7 - 16 \xi_m); \quad \xi_m = \frac{7}{16}.$$

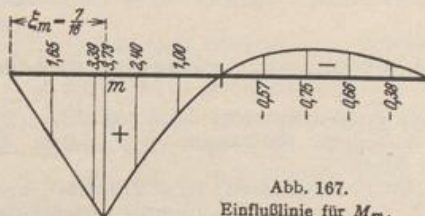


Abb. 167.  
Einflußlinie für  $M_m$ .

Belastung (2c) und (2d):  
Die Verschiebungen aus Temperatur und Stützensenkung im Hauptsystem und aus den zugeordneten überzähligen Schnittkräften sind nach Abb. 168:

$$\tau = \tau_t + \tau_{ot} = 0; \quad \tau = \tau_s + \tau_{os} = 0;$$

$$\tau = 2 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi d\xi + 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 0,$$

$$0 = \frac{1}{2} E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} + X_1 \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 9,28846 - 9,28846,$$

$$\tau_s = \tau_o + \tau_b = E J_c \left\{ \frac{1}{l} \Delta_c + \left( \frac{2}{u} - \frac{1}{l} \right) \Delta_c \right\}; \quad \tau_{os} = 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi,$$

$$\tau = E J_c \frac{2}{u} \Delta_c + 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 0,$$

$$0 = E J_c \Delta_c + X_1 l^2 \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 2415,0 - 2414,9999;$$

Dreifach statisch unbestimmtes System.

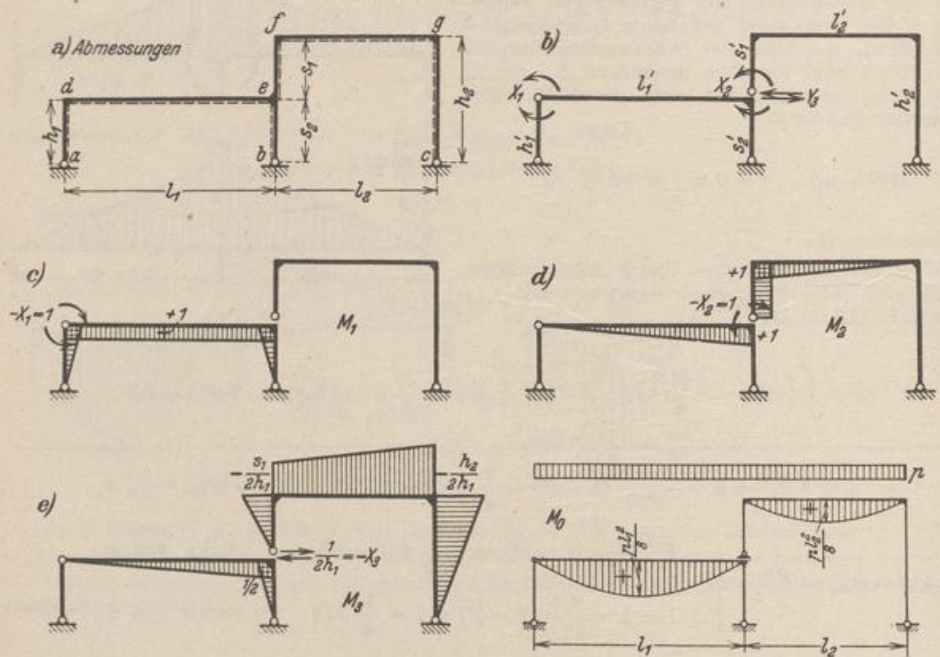


Abb. 169.

1. Geometrische Grundlagen: Abmessungen (Abb. 169a):  $l_1 = 15,0 \text{ m}$ ;  $l_2 = 12,0 \text{ m}$ ;  $h_1 = s_1 = s_2 = 4,5 \text{ m}$ ;  $h_2 = 2h_1 = 9,0 \text{ m}$ .  
 $J_c$  Trägheitsmoment des Riegels  $\bar{d}e$ .  
 Reduzierte Stablängen:  $l'_1 = 15,0 \text{ m}$ ;  $l'_2 = 18,0 \text{ m}$ ;  $h'_1 = 27,0 \text{ m}$ ;  $h'_2 = 18,0 \text{ m}$ ;  $s'_1 = 9,0$ ;  $s'_2 = 9,0 \text{ m}$ .  
 Materialkonstanten:  $E_s = 210 \text{ t/cm}^2$ ;  $\alpha_t = 0,00001$ .
2. Belastung: Gleichförmig verteilte Belastung der beiden Riegel mit  $p \text{ t/m}$ .

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Als überzählige Größen wird neben den beiden Eckmomenten  $X_1$  und  $X_2$ ,  $X_3 = Y_3/2h_1$  verwendet, um die Zahlenrechnungen zu vereinfachen (Abb. 169b).

Ansatz zur Berechnung der überzähligen Kräfte:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} = \delta_{1\otimes},$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s} = \delta_{2\otimes},$$

$$X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = \delta_{30} + \delta_{3t} + \delta_{3s} = \delta_{3\otimes}.$$

4. Die Vorzahlen werden nach (300) berechnet. Der Anteil der Quer- und Längskräfte wird nach Seite 92 und 159 vernachlässigt.

$$\delta_{11} = \frac{h'_1}{3} + \frac{s'_2}{3} + l'_1 = \frac{27}{3} + \frac{9}{3} + 15 = 27,00;$$

$$\delta_{22} = \frac{l'_1}{3} + \frac{l'_2}{3} + s'_1 = \frac{15}{3} + \frac{18}{3} + 9 = 20,00;$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{l'_1}{3} + \frac{s'_2}{3} + \frac{s'_1}{3} \left( \frac{s_1}{h_1} \right)^2 + \frac{h'_2}{3} \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{l'_2}{3} \left[ \left( \frac{s_1}{h_1} \right)^2 + \frac{s_1}{h_1} \frac{h_2}{h_1} + \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{15}{3} + \frac{9}{3} + \frac{9}{3} \left( \frac{4,5}{4,5} \right)^2 + \frac{18}{3} \left( \frac{9}{4,5} \right)^2 + \frac{18}{3} \left[ \left( \frac{4,5}{4,5} \right)^2 + \frac{4,5}{4,5} \cdot \frac{9}{4,5} + \left( \frac{9}{4,5} \right)^2 \right] \right\} \\ &= 19,25; \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \frac{l'_1}{2} = \frac{15}{2} = 7,50; \quad \delta_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{l'_1}{2} + \frac{s'_2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{15}{2} + \frac{9}{3} \right) = 5,25;$$

$$\begin{aligned} \delta_{23} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{l'_1}{3} - \frac{s'_1}{2} \frac{s_1}{h_1} - \frac{l'_2}{6} \cdot \left( 2 \frac{s_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{15}{3} - \frac{9}{2} \frac{4,5}{4,5} - \frac{18}{6} \left( 2 \cdot \frac{4,5}{4,5} + \frac{9}{4,5} \right) \right\} \\ &= -5,75. \end{aligned}$$

Matrix der Elastizitätsgleichungen und Abschätzung der Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes nach (331):

	$X_1$	$X_2$	$X_3$		Matrix der Unterdeterminanten $D_{ik}$ aus 5.			
(1)	27,00	7,50	5,25	$\delta_{10}$	(1)	351,9375	-174,5625	-148,125
(2)	7,50	20,00	-5,75	$\delta_{20}$	(2)	-174,5625	492,1875	194,625
(3)	5,25	-5,75	19,25	$\delta_{30}$	(3)	-148,125	194,625	483,75

Matrix der Produkte  $\delta_{ik} D_{ik}$

(1)	9502,313	-1309,219	-777,656	$\sum_k  \delta_{1k} D_{1k}  = 11589,188,$
(2)	-1309,219	9843,750	-1119,094	$\sum_k  \delta_{2k} D_{2k}  = 12272,063,$
(3)	-777,656	-1119,094	9312,188	$\sum_k  \delta_{3k} D_{3k}  = 11208,938.$

Mit  $D' = 7415,438$  aus 5. und  $\sum_i \sum_k |\delta_{ik} D_{ik}| = 35070,189$  wird

$$\varphi = (\pm p) \frac{\sum |\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} = (\pm p) \frac{35070,189}{7415,438} = (\pm p) 4,73.$$

Für einen mittleren Fehler  $\pm p = 0,01$  der Vorzahlen  $\delta_{ik}$  ist der mögliche Fehler von  $X_k$  aus der Nennerdeterminante ca.  $0,05 \cdot X_k$ .

5. Konjugierte Matrix  $\beta_{ik}$ . Die Vorzahlen  $\beta_{ik}$  werden nach Seite 166 als Quotient zweier Determinanten berechnet. Dabei wird die Nennerdeterminante nach (352) mit 3 verschiedenen Ansätzen angeschrieben:

$$\begin{aligned} D &= 27(20 \cdot 19,25 - 5,75^2) - 7,5(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75) + 5,25(-7,5 \cdot 5,75 - 20 \cdot 5,25) \\ &= -7,5(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75) + 20(27 \cdot 19,25 - 5,25^2) + 5,75(-27 \cdot 5,75 - 7,5 \cdot 5,25) \\ &= 5,25(-7,5 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 20) + 5,75(-27 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 7,5) + 19,25(27 \cdot 20 - 7,5^2) \\ &= 7415,4375 \end{aligned}$$

<p><math>\alpha) \beta_{k1}: \delta_{10} = 1; \delta_{20} = 0; \delta_{30} = 0:</math></p> $\beta_{11} = \frac{1 \cdot (20 \cdot 19,25 - 5,75^2)}{7415,4375} = 0,0474601,$ $\beta_{21} = \frac{-1(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75)}{7415,4375} = -0,0235404,$ $\beta_{31} = \frac{1(-7,5 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 20)}{7415,4375} = -0,0199752,$	<p><math>\beta) \beta_{k2}: \delta_{10} = 0; \delta_{20} = 1; \delta_{30} = 0:</math></p> $\beta_{22} = \frac{1 \cdot (27 \cdot 19,25 - 5,25^2)}{7415,4375} = 0,0663734,$ $\beta_{32} = \frac{(27,0 \cdot 5,75 + 7,5 \cdot 5,25)}{7415,4376} = 0,0262459,$ <p><math>\gamma) \beta_{k3}: \delta_{10} = 0; \delta_{20} = 0; \delta_{30} = 1:</math></p> $\beta_{33} = \frac{+1(27 \cdot 20 - 7,5^2)}{7415,4375} = 0,0652355.$
---	---

Kontrolle (356): Die Werte  $\beta_{ik}$  erfüllen den Ansatz (351) identisch, z. B. ist

$$\beta_{11}\delta_{11} + \beta_{21}\delta_{12} + \beta_{31}\delta_{13} = 0,0474601 \cdot 27 - 0,0235404 \cdot 7,5 - 0,0199752 \cdot 5,25 = 0,9999999 \approx 1,$$

$$\beta_{11}\delta_{21} + \beta_{21}\delta_{22} + \beta_{31}\delta_{23} = 0,0474601 \cdot 7,5 - 0,0235404 \cdot 20 + 0,0199752 \cdot 5,75 = 0,0000001 \approx 0,$$

$$\beta_{11}\delta_{31} + \beta_{21}\delta_{32} + \beta_{31}\delta_{33} = 0,0474601 \cdot 5,25 + 0,0235404 \cdot 5,75 - 0,0199752 \cdot 19,25 = 0,0000002 \approx 0.$$

6. Belastungszahlen nach (300) (Abb. 169):

$$\delta_{10} = \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{12} = p \cdot \frac{15^2}{12} = 281,25 p;$$

$$\delta_{20} = \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{24} + \frac{p \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{24} = p \left[ \frac{281,25}{2} + \frac{12^2 \cdot 18}{24} \right] = 248,625 p;$$

$$\delta_{30} = \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{2 \cdot 24} - \frac{p \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{24} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{s_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) = p \left[ \frac{281,25}{2 \cdot 2} - \frac{108}{2} \left( \frac{4,5}{4,5} + \frac{9}{4,5} \right) \right] = -91,6875 p.$$

7.  $\alpha)$  Ansatz der überzähligen Größen als Funktionen der Belastungszahlen:

$$X_1 = +0,0474601 \delta_{10} - 0,0235404 \delta_{20} - 0,0199752 \delta_{30},$$

$$X_2 = -0,0235404 \delta_{10} + 0,0663734 \delta_{20} + 0,0262459 \delta_{30},$$

$$X_3 = -0,0199752 \delta_{10} + 0,0262459 \delta_{20} + 0,0652355 \delta_{30}.$$

$\beta)$  Lösung für die Belastungszahlen  $\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}$  aus 6.:

$$X_1 = +9,3269 p; \quad X_2 = +7,4746 p; \quad X_3 = -5,0739 p.$$

8. Superposition der Belastung  $p$  und der überzähligen Schnittkräfte zur Bildung der Stütz-

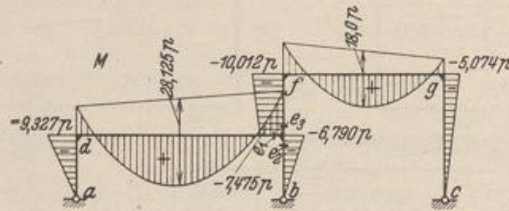


Abb. 170.

und Schnittkräfte nach (350). Schnittkräfte im Hauptsystem nach Abb. 169. Momente  $M$  in den Schnitten  $e_1, e_2, e_3$  (Abb. 170):

$$M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3,$$

$$M_{e,1} = -9,327 p \cdot 1,0 - 7,475 p \cdot 1,0 + 5,074 p \cdot \frac{1}{2} = -14,265 p \text{ [mt]},$$

$$M_{e,2} = -9,327 p \cdot 1,0 + 5,074 p \cdot \frac{1}{2} = -6,790 p \text{ [mt]},$$

$$M_{e,3} = -7,475 p \cdot 1,0 = -7,475 p \text{ [mt]}.$$

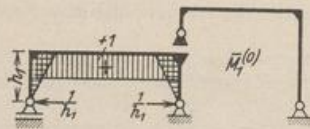


Abb. 171 a.

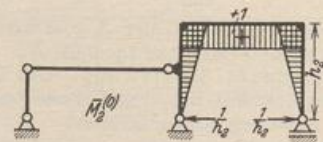


Abb. 171 b.

9. Der Spannungszustand mit  $X_1, \dots, X_3$  nach (350) erfüllt die Stützenbedingungen. Daher sind die gegenseitigen Verschiebungen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  der Stützpunkte  $a, b$  und  $b, c$  für die Ergebnisse



in (8) und Abb. 171 Null. Nachweis durch

$$1 \tau'_1 = \int M^{(3)} \bar{M}_1^{(3)} \frac{J_e}{J} ds = \int M^{(3)} \bar{M}_1^{(0)} \frac{J_e}{J} ds, \quad 1 \tau'_2 = \int M^{(3)} \bar{M}_2^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \quad (\text{Abb. 171 a, b}).$$

$$1 \tau'_1 = -\frac{1}{8} \cdot 9,3269 \cdot 27 - \frac{1}{8} \cdot 6,7899 \cdot 9 + \frac{2}{8} \cdot 15 \cdot 28,125 - 15 \cdot 11,7957 = -0,002.$$

$$1 \tau'_2 = +\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,7899 \cdot 9 - \frac{1}{8} [\frac{1}{2} (2 \cdot 7,4746 + 10,0116) + 1 (7,4746 + 20,0232)] \cdot 9 = 0,004,$$

$$\tau_1 = \tau'_1 \cdot h_1 = -0,002 \cdot 4,5 = -0,009 \approx 0,0; \quad \tau_2 = \tau'_2 \cdot h_2 = 0,004 \cdot 9,0 = 0,036 \approx 0,0.$$

Der Fehler in der Berechnung der Schnittkräfte kann wie in Abschnitt 25, S. 169 bestimmt werden.

## 27. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Tragwerks und Symmetrie oder Antimetrie der Belastung.

Je mehr statisch überzählige Schnittkräfte zur Berechnung eines statisch unbestimmten Tragwerks notwendig sind, um so ungünstiger ist die gegenseitige Abhängigkeit für die Fehlerempfindlichkeit und damit auch für die Brauchbarkeit der Lösung. Man versucht daher die gegenseitige Verknüpfung unabhängig von der Größe der einzelnen statisch unbestimmten Schnittkräfte durch Symmetriebetrachtungen über den vorhandenen Spannungs- und Verschiebungszustand des Tragwerks zu klären und damit die Lösung zu vereinfachen.

Die Symmetrie des Tragwerks ist durch die Anzahl der Symmetrieachsen bestimmt. Man unterscheidet die Symmetrie zu einer Achse, zu mehreren Achsen und zyklische Symmetrie. Die äußeren Kräfte des Tragwerks können symmetrisch oder antimetrisch zu einer Achse zugeordnet oder in allgemeiner Form vorgeschrieben sein. Symmetrie oder Antimetrie der äußeren Kräfte bedeuten

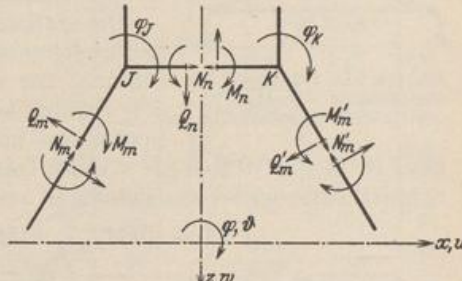


Abb. 172.

auch Symmetrie oder Antimetrie des Spannungs- und Verschiebungszustandes, so daß die Komponenten von Schnittkraft und Verschiebung in symmetrisch zugeordneten Querschnitten gleich groß oder entgegengesetzt gleich sind und einzelne Komponenten in den Querschnitten der Achsen ausgezeichnete Werte annehmen.

Bei Symmetrie der Belastung sind die Längskräfte  $N$ , die Biegemomente  $M$  und die Verschiebungen  $w$  parallel zur Achse in symmetrisch zugeordneten Querschnitten  $m, m'$  gleich groß, die Querkraft  $Q$ , die Verschiebungen  $u$  senkrecht zur Achse und die Verdrehungen  $\varphi$  entgegengesetzt gleich (Abb. 172). Für die Querschnitte  $n$  in der Symmetrieachse sind die Querkraft  $Q$ , die Verschiebungen  $u$  senkrecht zur Achse und die Drehwinkel  $\varphi$  Null oder entgegengesetzt gleich, die Glieder der ersten Gruppe ( $N, M, w$ ) erhalten ausgezeichnete Werte.

Bei Antimetrie der Belastung sind die Querkraft  $Q$ , die Verschiebungen  $u$  senkrecht zur Achse und die Verdrehungen  $\varphi$  in symmetrisch zugeordneten Querschnitten  $m, m'$  gleich groß, die Längskräfte  $N$ , die Biegemomente  $M$  und die Verschiebungen  $w$  parallel zur Achse entgegengesetzt gleich. Für die Querschnitte  $n$  in der Symmetrieachse sind die Längskräfte  $N$ , die Biegemomente  $M$  und die Verschiebungen  $w$  parallel zur Achse Null oder entgegengesetzt gleich, die Glieder der zweiten Gruppe ( $Q, u, \varphi$ ) erhalten ausgezeichnete Werte.

Damit sind bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung eines durch Achsen ausgezeichneten Tragwerks einzelne Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Die Anzahl der statisch überzähligen Schnittkräfte wird