Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Einfach statisch unbestimmtes System

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

In diesem Falle ist die Summe der positiven und negativen mit J_c/J reduzierten Momentenflächen aus der vorgeschriebenen Belastung Null. Dasselbe gilt von ihren Momenten bezogen auf die Achsen u und v.

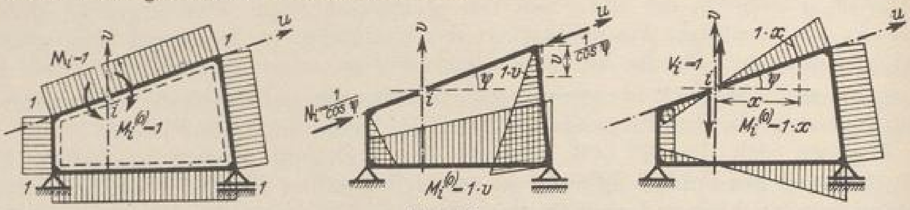

Abb. 153.

Wahl des Hauptsystems. Das Hauptsystem soll nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten, abgesehen von besonderen Ausnahmen, kinematisch starr sein und keine unendlich kleine Beweglichkeit enthalten. Dabei sind die statisch unbestimmten Schnittkräfte derart auszuwählen, daß die Schnittkräfte des Hauptsystems der Größenordnung nach mit denjenigen des vorgelegten Stabwerks übereinstimmen und der dem Ansatz (285) zugrunde liegende Stabzug nach Möglichkeit symmetrisch ist. Zumeist ergeben sich Vorteile für die Lösung, wenn alle überzähligen Größen die gleiche Dimension besitzen, also entweder Momente oder Kräfte darstellen. Die Brauchbarkeit des Hauptsystems zeigt sich im Ansatz durch kleine Verschiebungen δ_{ik} relativ zu δ_{kk}, also durch geringe gegenseitige Abhängigkeit der überzähligen Größen. Die Auflösung des Ansatzes wird um so günstiger, je enger der Bereich ist, in dem sich die Schnittkräfte M_i, M_k aus den einzelnen Belastungszuständen $-X_i = 1$, $-X_k = 1$ überlagern. Je kleiner die Schnittkräfte M_i, M_k des Hauptsystems aus den überzähligen Größen im Verhältnis zu denjenigen sind, welche allein durch die Belastung hervorgerufen werden, um so zweckmäßiger ist das Hauptsystem zur Abminderung der mit jeder Superposition verbundenen Fehlerquellen. Führt die Untersuchung zu Einflußlinien und daher zur Aufzeichnung von Biegelinien des Lastgurtes, so verdient der einfache oder zusammengesetzte Balkenträger durch die einfachen Stützenbedingungen als Hauptsystem den Vorzug.

Pirlet, J.: Fehleruntersuchungen bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Gebilde. Diss. Aachen 1909. — Hertwig, A.: Die Fehlerwirkungen beim Auflösen linearer Gleichungen und die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1917 S. 110. — Worch, G.: Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Bauing. 1925 S. 554.

26. Stabwerke mit wenigen überzähligen Größen.

Um die Methode im einzelnen anzuwenden und die Auflösung der n Elastizitätsgleichungen eines hochgradig statisch unbestimmten Systems vorzubereiten, werden zunächst Stabwerke mit 1 bis 3 überzähligen Größen behandelt.

Einfach statisch unbestimmtes System. Die Schnittkräfte des Hauptsystems aus Belastung $\mathfrak{P}$ und überzähliger Größe X_1 sind nach (288)

$$C = C_0 - X_1 C_1, \quad N = N_0 - X_1 N_1, \quad M = M_0 - X_1 M_1, \quad Q = Q_0 - X_1 Q_1. \tag{339}$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 wird aus der geometrischen Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems und des vorgelegten Systems bestimmt und nach (290) mit $k = 1$ berechnet.

$$1_1 \cdot \delta_1 = 0 = \int N_1 \frac{N_0\, ds}{EF} + \int M_1 \frac{M_0\, ds}{EJ} + \int N_1 \alpha_t t\, ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}\, ds$$
$$- \sum C_{e1} \Delta_e - X_1 \left[\int N_1^2 \frac{ds}{EF} + \int M_1^2 \frac{ds}{EJ} \right]. \tag{340}$$

Die Superposition der Formänderung des Hauptsystems aus den vorhandenen äußeren Ursachen nach (293) liefert folgende Bedingung:

$$\delta_1 = 0 = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} - X_1 \delta_{11} = \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11}. \tag{341}$$

Nach dem erweiterten Ansatz vom Minimum der Formänderungsarbeit ist die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach X_1 Null.

$$\frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 = \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N\,ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M\,ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t\,ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e.$$

In dieser ist $\partial C_e/\partial X_1 = -C_1$, $\partial N/\partial X_1 = -N_1$, $\partial M/\partial X_1 = -M_1$, so daß der Ansatz mit (340) übereinstimmt.

$$X_1 = \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11}}$$

$$= \frac{\frac{J_c}{F_c}\int N_1 N_0 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1 M_0 \frac{J_c}{J} ds + E J_c \left[\int N_1 \alpha_t t\,ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum C_{e1} \Delta_e\right]}{\frac{J_c}{F_c}\int N_1^2 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_c}{J} ds}. \tag{342}$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 besteht aus drei Anteilen. Die Belastung $\mathfrak{P}$ erzeugt im statisch bestimmten Hauptsystem die Schnittkräfte N_0, M_0, die Temperaturänderung ist mit $(t, \Delta t)$, die Stützenverschiebung durch gemessene oder geschätzte Beträge Δ_e vorgeschrieben. Die Gleichung der Einflußlinie von X_1 wird nach

$$X_1 = \delta_{m1}/\delta_{11} \tag{343}$$

berechnet oder aufgezeichnet.

Zweifach statisch unbestimmtes System. Die Stütz- und Schnittkräfte entstehen durch Superposition der Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den überzähligen Größen X_1 und X_2.

$$\left.\begin{aligned} C = C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2, \quad N = N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2, \\ M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2. \end{aligned}\right\} \tag{344}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_1, X_2 machen nach S. 164 die erweiterte Funktion der Formänderungsarbeit A_i^{**} zum Minimum, so daß deren partielle Ableitungen nach X_1 und X_2 Null sind.

$$\frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 = \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N\,ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M\,ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t\,ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e,$$

$$\frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_2} = 0 = \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \frac{N\,ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{M\,ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \alpha_t t\,ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_2} \Delta_e,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_1} = -N_1, \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -M_1, \quad \frac{\partial C}{\partial X_1} = -C_1,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_2} = -N_2, \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = -M_2, \quad \frac{\partial C}{\partial X_2} = -C_2.$$

Der Ansatz ist hier wegen seiner grundsätzlichen Bedeutung für die Elastizitätstheorie wiederholt worden, obwohl das Ergebnis nach (293) in integrierter Form an-