Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zweifach statisch unbestimmtes System

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Die Superposition der Formänderung des Hauptsystems aus den vorhandenen äußeren Ursachen nach (293) liefert folgende Bedingung:

$$\delta_1 = 0 = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} - X_1 \delta_{11} = \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11}. \tag{341}$$

Nach dem erweiterten Ansatz vom Minimum der Formänderungsarbeit ist die partielle Ableitung der Funktion A_i^{**} nach X_1 Null.

$$\frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 = \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N\,ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M\,ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t\,ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e.$$

In dieser ist $\partial C_e/\partial X_1 = -C_1$, $\partial N/\partial X_1 = -N_1$, $\partial M/\partial X_1 = -M_1$, so daß der Ansatz mit (340) übereinstimmt.

$$X_1 = \frac{\delta_{1\otimes}}{\delta_{11}}$$

$$= \frac{\frac{J_c}{F_c}\int N_1 N_0 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1 M_0 \frac{J_c}{J} ds + E J_c \left[\int N_1 \alpha_t t\,ds + \int M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \Sigma C_{e1} \Delta_e\right]}{\frac{J_c}{F_c}\int N_1^2 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_c}{J} ds}. \tag{342}$$

Die statisch unbestimmte Schnittkraft X_1 besteht aus drei Anteilen. Die Belastung $\mathfrak{P}$ erzeugt im statisch bestimmten Hauptsystem die Schnittkräfte N_0, M_0, die Temperaturänderung ist mit $(t, \Delta t)$, die Stützenverschiebung durch gemessene oder geschätzte Beträge Δ_e vorgeschrieben. Die Gleichung der Einflußlinie von X_1 wird nach

$$X_1 = \delta_{m1}/\delta_{11} \tag{343}$$

berechnet oder aufgezeichnet.

Zweifach statisch unbestimmtes System. Die Stütz- und Schnittkräfte entstehen durch Superposition der Anteile aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und den überzähligen Größen X_1 und X_2.

$$\left.\begin{aligned} C = C_0 - X_1 C_1 - X_2 C_2, \quad N = N_0 - X_1 N_1 - X_2 N_2, \\ M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2. \end{aligned}\right\} \tag{344}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_1, X_2 machen nach S. 164 die erweiterte Funktion der Formänderungsarbeit A_i^{**} zum Minimum, so daß deren partielle Ableitungen nach X_1 und X_2 Null sind.

$$\frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_1} = 0 = \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{N\,ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{M\,ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_1} \alpha_t t\,ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_1} \Delta_e,$$

$$\frac{\partial A_i^{**}}{\partial X_2} = 0 = \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \frac{N\,ds}{EF} + \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{M\,ds}{EJ} + \int \frac{\partial N}{\partial X_2} \alpha_t t\,ds + \int \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - \sum \frac{\partial C_e}{\partial X_2} \Delta_e,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_1} = -N_1, \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -M_1, \quad \frac{\partial C}{\partial X_1} = -C_1,$$

$$\frac{\partial N}{\partial X_2} = -N_2, \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = -M_2, \quad \frac{\partial C}{\partial X_2} = -C_2.$$

Der Ansatz ist hier wegen seiner grundsätzlichen Bedeutung für die Elastizitätstheorie wiederholt worden, obwohl das Ergebnis nach (293) in integrierter Form angeschrieben werden kann. Die Abkürzung verdient durch die anschauliche geometrische Auslegung den Vorzug.

$$\delta_1 = 0 = \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12}; \qquad \delta_{1\otimes} = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s};$$

$$\delta_2 = 0 = \delta_{2\otimes} - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22}; \qquad \delta_{2\otimes} = \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s};$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{1\otimes}\delta_{22} - \delta_{2\otimes}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{22}}}\left(\delta_{1\otimes} - \delta_{2\otimes}\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}\right); \\ X_2 &= \frac{\delta_{2\otimes}\delta_{11} - \delta_{1\otimes}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}\left(\delta_{2\otimes} - \delta_{1\otimes}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{345}$$

Dasselbe Ergebnis entsteht nach (324) durch Superposition der Belastungsglieder. Die Lösung des Ansatzes für $\delta_{10} = 1$ und $\delta_{20} = 0$ wird mit $X_1 = \beta_{11}$ und $X_2 = \beta_{21}$, die Lösung für $\delta_{10} = 0$ und $\delta_{20} = 1$ mit $X_1 = \beta_{12}$ und $X_2 = \beta_{22}$ bezeichnet. Dabei ist $\beta_{21} = \beta_{12}$.

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\delta_{1\otimes} &= 1\\ \delta_{2\otimes} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{22}}}; \qquad \beta_{21} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}\beta_{11}, \\ &\left.\begin{aligned}\delta_{2\otimes} &= 1\\ \delta_{1\otimes} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}; \qquad \beta_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\beta_{22}, \end{aligned}\right\} \tag{346}$$

$$X_1 = \beta_{11}\delta_{1\otimes} + \beta_{12}\delta_{2\otimes}; \qquad X_2 = \beta_{21}\delta_{1\otimes} + \beta_{22}\delta_{2\otimes}. \tag{347}$$

Das Ergebnis läßt sich unmittelbar mit (345) vergleichen und bildet die Anweisung für die Berechnung der Einflußlinien der statisch unbestimmten Schnittkräfte. Die Einflußlinie X_1 wird als Biegelinie des Lastgurtes bei der Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = \beta_{11}$, $-X_2 = \beta_{12}$, die Einflußlinie X_2 bei der Belastung mit $-X_1 = \beta_{21}$, $-X_2 = \beta_{22}$ erhalten.

Der Quotient δ_{21}/δ_{22} der Lösung kann als die überzählige Schnittkraft X_2 für $-X_1 = 1$ angesehen und daher durch X_{21} bezeichnet werden. Ebenso läßt sich $\delta_{12}/\delta_{11} = X_{12}$ als der Betrag von X_1 infolge von $-X_2 = 1$ und $\delta_{10}/\delta_{11} = X_{10}$, $\delta_{20}/\delta_{22} = X_{20}$ als die überzähligen Größen eines einfach statisch unbestimmten Systems aus der Belastung $\mathfrak{P}$ deuten. Daher ist (345) auch

$$X_1 = \frac{\delta_{10} - \delta_{12}X_{20}}{\delta_{11} - \delta_{12}X_{21}}; \qquad X_2 = \frac{\delta_{20} - \delta_{21}X_{10}}{\delta_{22} - \delta_{21}X_{12}}. \tag{348}$$

Zähler und Nenner sind daher nach dem Superpositionsgesetz die Verschiebungen $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}$ in zwei einfach statisch unbestimmten Hauptsystemen aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und $-X_1 = 1$ oder $-X_2 = 1$. Die überzähligen Größen können daher auch folgendermaßen angeschrieben und berechnet werden:

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(1)}}{\delta_{11}^{(1)}}; \qquad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}. \tag{349}$$

Dreifach statisch unbestimmtes System. Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems werden nach (288) durch Superposition der Belastung und der überzähligen Größen folgendermaßen zerlegt:

$$\left.\begin{aligned} C &= C_\otimes - X_1 C_1 - X_2 C_2 - X_3 C_3, \\ N &= N_\otimes - X_1 N_1 - X_2 N_2 - X_3 N_3, \\ M &= M_\otimes - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3, \\ Q &= Q_\otimes - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - X_3 Q_3. \end{aligned}\right\} \tag{350}$$