Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Dreifach statisch unbestimmtes System

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

geschrieben werden kann. Die Abkürzung verdient durch die anschauliche geometrische Auslegung den Vorzug.

$$\delta_1 = 0 = \delta_{1\otimes} - X_1 \delta_{11} - X_2 \delta_{12}; \qquad \delta_{1\otimes} = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s};$$
$$\delta_2 = 0 = \delta_{2\otimes} - X_1 \delta_{21} - X_2 \delta_{22}; \qquad \delta_{2\otimes} = \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s};$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{1\otimes}\delta_{22} - \delta_{2\otimes}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{22}}}\left(\delta_{1\otimes} - \delta_{2\otimes}\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}\right); \\ X_2 &= \frac{\delta_{2\otimes}\delta_{11} - \delta_{1\otimes}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}\left(\delta_{2\otimes} - \delta_{1\otimes}\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{345}$$

Dasselbe Ergebnis entsteht nach (324) durch Superposition der Belastungsglieder. Die Lösung des Ansatzes für $\delta_{10} = 1$ und $\delta_{20} = 0$ wird mit $X_1 = \beta_{11}$ und $X_2 = \beta_{21}$, die Lösung für $\delta_{10} = 0$ und $\delta_{20} = 1$ mit $X_1 = \beta_{12}$ und $X_2 = \beta_{22}$ bezeichnet. Dabei ist $\beta_{21} = \beta_{12}$.

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\delta_{1\otimes} &= 1\\ \delta_{2\otimes} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{22}}}; \qquad \beta_{21} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}\beta_{11}, \\ &\left.\begin{aligned}\delta_{2\otimes} &= 1\\ \delta_{1\otimes} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{12}}{\delta_{11}}}; \qquad \beta_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\beta_{22}, \end{aligned}\right\} \tag{346}$$

$$X_1 = \beta_{11}\delta_{1\otimes} + \beta_{12}\delta_{2\otimes}; \qquad X_2 = \beta_{21}\delta_{1\otimes} + \beta_{22}\delta_{2\otimes}. \tag{347}$$

Das Ergebnis läßt sich unmittelbar mit (345) vergleichen und bildet die Anweisung für die Berechnung der Einflußlinien der statisch unbestimmten Schnittkräfte. Die Einflußlinie X_1 wird als Biegelinie des Lastgurtes bei der Belastung des Hauptsystems mit $-X_1 = \beta_{11}$, $-X_2 = \beta_{12}$, die Einflußlinie X_2 bei der Belastung mit $-X_1 = \beta_{21}$, $-X_2 = \beta_{22}$ erhalten.

Der Quotient δ_{21}/δ_{22} der Lösung kann als die überzählige Schnittkraft X_2 für $-X_1 = 1$ angesehen und daher durch X_{21} bezeichnet werden. Ebenso läßt sich $\delta_{12}/\delta_{11} = X_{12}$ als der Betrag von X_1 infolge von $-X_2 = 1$ und $\delta_{10}/\delta_{11} = X_{10}$, $\delta_{20}/\delta_{22} = X_{20}$ als die überzähligen Größen eines einfach statisch unbestimmten Systems aus der Belastung $\mathfrak{P}$ deuten. Daher ist (345) auch

$$X_1 = \frac{\delta_{10} - \delta_{12}X_{20}}{\delta_{11} - \delta_{12}X_{21}}; \qquad X_2 = \frac{\delta_{20} - \delta_{21}X_{10}}{\delta_{22} - \delta_{21}X_{12}}. \tag{348}$$

Zähler und Nenner sind daher nach dem Superpositionsgesetz die Verschiebungen $\delta_1^{(1)}$, $\delta_2^{(1)}$ in zwei einfach statisch unbestimmten Hauptsystemen aus der Belastung $\mathfrak{P}$ und $-X_1 = 1$ oder $-X_2 = 1$. Die überzähligen Größen können daher auch folgendermaßen angeschrieben und berechnet werden:

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(1)}}{\delta_{11}^{(1)}}; \qquad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}. \tag{349}$$

Dreifach statisch unbestimmtes System. Die Stütz- und Schnittkräfte des Hauptsystems werden nach (288) durch Superposition der Belastung und der überzähligen Größen folgendermaßen zerlegt:

$$\left.\begin{aligned} C &= C_\otimes - X_1 C_1 - X_2 C_2 - X_3 C_3, \\ N &= N_\otimes - X_1 N_1 - X_2 N_2 - X_3 N_3, \\ M &= M_\otimes - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3, \\ Q &= Q_\otimes - X_1 Q_1 - X_2 Q_2 - X_3 Q_3. \end{aligned}\right\} \tag{350}$$

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte X_1, X_2, X_3 sind nach (285) durch die geometrische Verträglichkeit der Formänderung des Hauptsystems bestimmt.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & X_1 & X_2 & X_3 & \\ \hline (1) & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{10} \\ \hline (2) & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{20} \\ \hline (3) & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{30} \\ \hline \end{array} \quad . \qquad (351)$$

Der Ansatz wird nach S. 166 mit Determinanten aufgelöst.

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{\delta_{10}(\delta_{22}\delta_{33}-\delta_{32}\delta_{23})-\delta_{20}(\delta_{12}\delta_{33}-\delta_{32}\delta_{13})+\delta_{30}(\delta_{12}\delta_{23}-\delta_{22}\delta_{13})}{\delta_{11}(\delta_{22}\delta_{33}-\delta_{32}\delta_{23})-\delta_{21}(\delta_{12}\delta_{33}-\delta_{32}\delta_{13})+\delta_{31}(\delta_{12}\delta_{23}-\delta_{22}\delta_{13})}, \\ X_2 &= \frac{-\delta_{10}(\delta_{21}\delta_{33}-\delta_{31}\delta_{23})+\delta_{20}(\delta_{11}\delta_{33}-\delta_{31}\delta_{13})-\delta_{30}(\delta_{11}\delta_{23}-\delta_{21}\delta_{13})}{-\delta_{12}(\delta_{21}\delta_{33}-\delta_{31}\delta_{23})+\delta_{22}(\delta_{11}\delta_{33}-\delta_{31}\delta_{13})-\delta_{32}(\delta_{11}\delta_{23}-\delta_{21}\delta_{13})}, \\ X_3 &= \frac{\delta_{10}(\delta_{21}\delta_{32}-\delta_{31}\delta_{22})-\delta_{20}(\delta_{11}\delta_{32}-\delta_{31}\delta_{12})+\delta_{30}(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{21}\delta_{12})}{\delta_{13}(\delta_{21}\delta_{32}-\delta_{31}\delta_{22})-\delta_{23}(\delta_{11}\delta_{32}-\delta_{31}\delta_{12})+\delta_{33}(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{21}\delta_{12})}. \end{aligned}\right\} \quad (352)$$

Das Ergebnis läßt sich nach (324) auch durch Superposition der Belastungszahlen δ_{h0} entwickeln. Dabei ist für

$$\begin{aligned} &\delta_{10}=1, \quad \delta_{20}=0, \quad \delta_{30}=0: \quad X_1=\beta_{11}, \quad X_2=\beta_{21}, \quad X_3=\beta_{31}, \\ &\delta_{10}=0, \quad \delta_{20}=1, \quad \delta_{30}=0: \quad X_1=\beta_{12}, \quad X_2=\beta_{22}, \quad X_3=\beta_{32}, \\ &\delta_{10}=0, \quad \delta_{20}=0, \quad \delta_{30}=1: \quad X_1=\beta_{13}, \quad X_2=\beta_{23}, \quad X_3=\beta_{33}. \end{aligned}$$

Die Vorzahlen sind unabhängig von der Belastung und können hier aus (352) mit D als Bezeichnung für die Nennerdeterminante angeschrieben werden.

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{11}=\frac{1}{D}(\delta_{22}\delta_{33}-\delta_{32}\delta_{23}); \qquad \beta_{21}=-\frac{1}{D}(\delta_{21}\delta_{33}-\delta_{31}\delta_{23}); \\ &\beta_{31}=\frac{1}{D}(\delta_{21}\delta_{32}-\delta_{31}\delta_{22}); \qquad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad (353)$$

Die Zählerdeterminanten D_{hk} und D_{kh} sind einander gleich. Damit ist auch die Beziehung $\beta_{hk}=\beta_{kh}$ nachgeprüft worden.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte aus einer beliebigen Belastung mit $\delta_{1\otimes}, \delta_{2\otimes}, \delta_{3\otimes}$ sind nunmehr

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \beta_{11}\delta_{1\otimes}+\beta_{12}\delta_{2\otimes}+\beta_{13}\delta_{3\otimes}, \\ X_2 &= \beta_{21}\delta_{1\otimes}+\beta_{22}\delta_{2\otimes}+\beta_{23}\delta_{3\otimes}, \\ X_3 &= \beta_{31}\delta_{1\otimes}+\beta_{32}\delta_{2\otimes}+\beta_{33}\delta_{3\otimes}. \end{aligned}\right\} \quad (354)$$

Die Matrix der Lösung ist zu (351) konjugiert und mit $\beta_{kh}=\beta_{hk}$ außerdem zur Hauptdiagonale symmetrisch.

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & \delta_{1\otimes} & \delta_{2\otimes} & \delta_{3\otimes} \\ \hline X_1 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \hline X_2 & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \hline X_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \\ \hline \end{array} \qquad (355)$$

Das Ergebnis muß die Bedingungen (351) identisch erfüllen. Die Nachprüfung für

$\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}$ und $\delta_{10} = 1$ besteht daher in

$$\left.\begin{aligned} \beta_{11}\,\delta_{11} + \beta_{21}\,\delta_{12} + \beta_{31}\,\delta_{13} &= 1\,, \\ \beta_{11}\,\delta_{21} + \beta_{21}\,\delta_{22} + \beta_{31}\,\delta_{23} &= 0\,, \\ \beta_{11}\,\delta_{31} + \beta_{21}\,\delta_{32} + \beta_{31}\,\delta_{33} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{356}$$

Ähnliche Bedingungen gelten für $\beta_{12}, \beta_{22}, \beta_{32}$ und $\delta_{20} = 1$ oder $\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33}$ und $\delta_{30} = 1$.

Die Einflußlinien der überzähligen Größen nach (328) werden wieder durch Überlagerung der mit den β-Vorzahlen erweiterten Ordinaten der Biegelinien δ_{mk} des Lastgurtes des Hauptsystems oder auch als Biegelinien für ausgezeichnete Gruppen von äußeren Kräften erhalten. Diese bestehen für die Einflußlinie X_1 aus $-X_1 = \beta_{11}$, $-X_2 = \beta_{12}$, $-X_3 = \beta_{13}$.

Schnittkräfte. Die Einflußlinien der Schnittkräfte werden nach (288) durch Superposition bestimmt. Die Vorzahlen C_k, N_k, M_k, Q_k des Ansatzes sind aus den

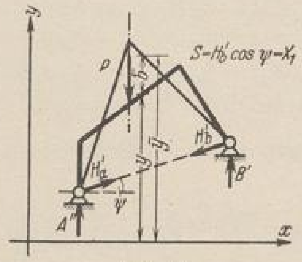

Abb. 154.

$$M = X_1\left[\frac{M_0}{X_1} - M_1\right]$$
$$= X_1\,\bar{b} = X_1\,(\bar{y} - y).$$

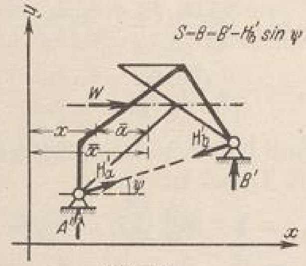

Abb. 155.

$$M = B\left[\frac{M_0}{B} - \frac{X_1}{B} M_1\right].$$
$$= B\,\bar{a} = B\,(\bar{x} - x).$$

Schaulinien der Schnittkräfte für $-X_k = 1$ bekannt, mit denen die Verschiebungen δ_{1k} usw. berechnet worden sind. Der Ansatz (288) gilt auch für die Schnittkräfte aus einer vorgeschriebenen Belastung. Die statisch unbestimmten Größen X_1 usw. sind in diesem Falle ebenso wie $\mathfrak{P}$ äußere Kräfte, aus denen die Schnittkräfte numerisch oder zeichnerisch nach den Abschnitten (13 ff.) angegeben werden.

Die graphische Darstellung der Schnittkräfte wird in der Regel auf die Biegungsmomente beschränkt. Sie werden meist als Ordinaten an der Zugseite des Stabzugs winkelrecht zur Achse aufgetragen, um ein übersichtliches Bild zu gewinnen.

Die Lösung ist bei zahlreichen Aufgaben durch die Entwicklung der Biegungsmomente nach $M = S\,\bar{s}$ einfacher. In dieser bedeutet S eine Komponente der Mittelkraft der äußeren Kräfte des statisch unbestimmten Tragwerks links von einem beliebigen Querschnitt, die für den ganzen Stabzug oder wenigstens für große Abschnitte konstant ist. Die Strecke $\bar{s}$ ist die Differenz $\bar{b} = (\bar{y} - y)$ oder $\bar{a} = (\bar{x} - x)$ der Koordinaten x, y der Schwerpunkte oder Kernpunkte der Querschnitte und der Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ der Mittelkraftlinie des $n$fach statisch unbestimmten Systems.

a) Einfach statisch unbestimmtes Stabwerk mit $\mathfrak{P}$ und der überzähligen Größe X_1 eines statisch bestimmten Hauptsystems (Abb. 154 u. 155):

$$M = M_0 - X_1 M_1 = S\left(\frac{M_0}{S} - \frac{X_1}{S} M_1\right). \tag{357}$$

b) Zwei- und dreifach statisch unbestimmtes Stabwerk mit $\mathfrak{P}$ und der überzähligen Größe X_1 des ein- oder zweifach statisch unbestimmten Hauptsystems:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} = S\left(\frac{M_0^{(1)}}{S} - \frac{X_1}{S} M_1^{(1)}\right), \\ M &= M_0^{(2)} - X_1 M_1^{(2)} = S\left(\frac{M_0^{(2)}}{S} - \frac{X_1}{S} M_1^{(2)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{358}$$