



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiele

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Diese Formulierung der Schnittkräfte kann mit Vorteil auf die beiderseits eingespannten und die ringsum geschlossenen Stabzüge angewendet und auch auf mehrteilige Tragwerke übertragen werden. Der Abschnitt 60 enthält Beispiele.

Untersuchung eines Brückenträgers auf 3 Stützen.

1. Geometrische Grundlagen: Theoretische Stützweite: $l_1 = l_2 = l = 18,0$ m. Abmessungen nach Abb. 156a, hieraus $\zeta = J_c/J$ (Abb. 156b)¹.

$$J_c = J_a = J_b = 0,2 J_k = 0,1150 \text{ m}^4.$$

x und $\xi = x/l$ werden im Felde l_1 von a nach c , im Felde l_2 von b nach c gemessen.

ξ	0 bis 6/12	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	1,0
J_c/J	1,0000	0,9631	0,8406	0,6453	0,4551	0,3016	0,2026

a) Trägerbild

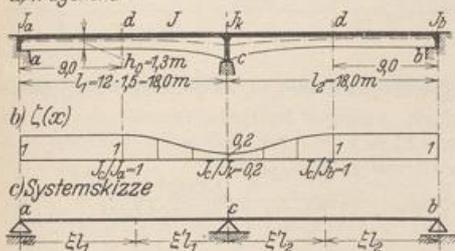


Abb. 156.

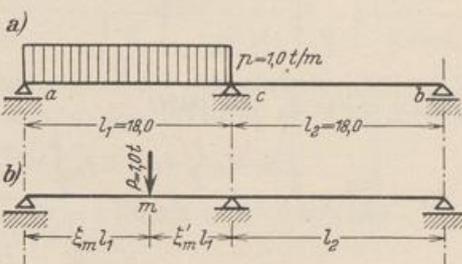


Abb. 157.

Materialkonstanten: $E_b = 210 \text{ t/cm}^2$; $\alpha_t = 0,00001$.

2. Belastung: Aus der Anzahl der möglichen Belastungsfälle werden die folgenden herausgegriffen: a) ruhende Last $p = 1,0 \text{ t}$ (Abb. 157a); b) bewegliche Last $P = 1,0 \text{ t}$ (Abb. 157b); c) geschätzte Stützensenkung:

$$\Delta_c = 1 \text{ cm}; \quad \Delta_a = \Delta_b = 0;$$

d) ungleichmäßige Erwärmung:

$$\Delta t = t_u - t_0 = -10^0.$$

¹ Zum Vergleich werden auch die Funktionen J_c/J auf S. 97 verwendet:

Trägerbild:

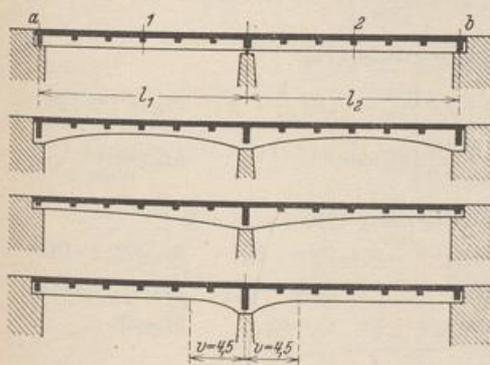


Abb. 158 a-d.

Verlauf der Trägheitsmomente:

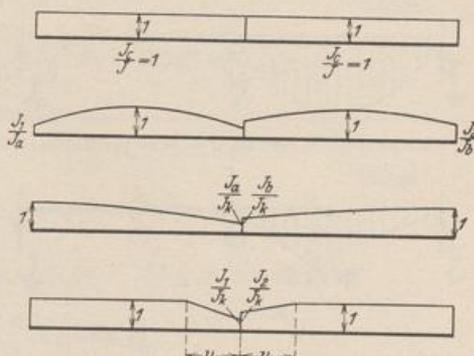


Abb. 159 a-d.

- a) $\zeta = J_1/J = 1$ { konstantes Trägheitsmoment jedes Stabes
($J_c = J_1$ für $x = 0,5 l$).
- b) $\zeta = J_1/J = 1 - (1 - J_1/J_a)(1 - 2\xi)^2$ { Die Querschnittszunahme ist stetig und symmetrisch zur Feldmitte.
- c) $\zeta = J_a/J = 1 - (1 - J_a/J_k)(1 - \xi)^2$ { Die Querschnittszunahme ist stetig und unsymmetrisch zur Feldmitte.
- d) $\zeta = J_1/J = 1 - (1 - J_1/J_k)(1 - \xi'/v_1)$ { Die Querschnittszunahme beschränkt sich auf die Voute ($v_1 = v_1/l_1$).

Die Formeln gelten für den Bereich l_1 .

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist einfach statisch unbestimmt.

Ausbildung des Hauptsystems.

a) Träger auf zwei Stützen. X_1 : Stützkraft der Mittelstütze (Abb. 160a).

b) Auslegerträger. X_1 : Stützkraft einer Seitenstütze (Abb. 160b).

c) Zwei Träger auf zwei Stützen. X_1 : Moment der Normalspannungen in dem der Mittelstütze unmittelbar benachbarten Querschnitt (Abb. 160c).

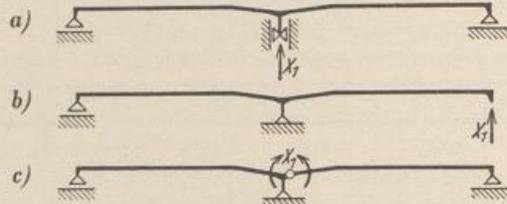


Abb. 160.

Nach den Bemerkungen auf S. 170 verdient das Hauptsystem c) (Abb. 160) den Vorzug. Berechnung von X_1 nach (342):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\int_0^l M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds + E J_c \int_0^l M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} ds - E J_c \sum C_{e1} \Delta e}{\int_0^l M_1^2 \frac{J_c}{J} ds} = \frac{\delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1e}}{\delta_{11}}$$

Die Mitwirkung der Querkraft wird nach S. 159 vernachlässigt, der Einfluß der Längskräfte ist Null.

Stütz- und Schnittkräfte im Hauptsystem (Kräfte in t, Momente in mt) (Abb. 161):

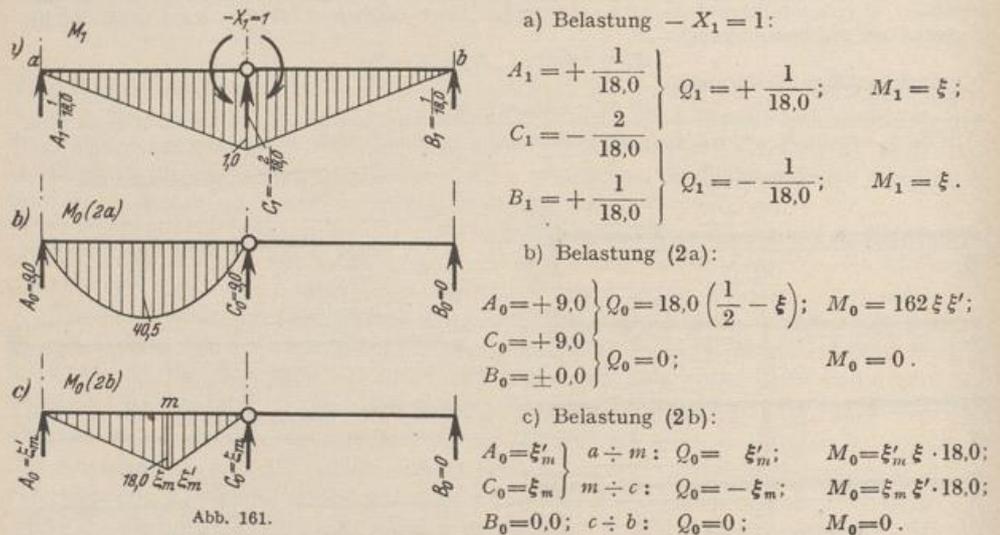


Abb. 161.

$$4. \quad \delta_{11} = \int_a^b M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2l \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi; \quad \xi^2 \frac{J_c}{J} = \eta.$$

Numerische Integration für die punktweise vorgeschriebene Funktion J_c/J mit Hilfe der Simpsonschen Reihe nach (181) oder (182):

$$\alpha) \quad \delta'_{11} = 2l \int_0^1 \eta d\xi = 2 \frac{\Delta x}{3} (\eta_0 + 4\eta_1 + 2\eta_2 + \dots + 2\eta_{2n-2} + 4\eta_{2n-1} + \eta_{2n}) = 2 \frac{\Delta x}{3} \Sigma_1$$

$$\Delta x = 1,5 \text{ m}; \quad \Sigma_1 = 7,10838; \quad \delta'_{11} = 7,10838.$$

$$\beta) \delta_{11} = 2l \int_0^1 \eta d\xi = 2 \frac{p}{3} \Delta x (\eta_0 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + \dots + 3\eta_{n-2} + 3\eta_{n-1} + \eta_n) = 2 \frac{p}{3} \Delta x \Sigma_2,$$

$$\Delta x = 1,5 \text{ m}; \quad \Sigma_2 = 6,32425; \quad \delta_{11} = 7,11477.$$

m	ξ	ξ^2	$\frac{J_c}{J}$	$\xi^2 \frac{J_c}{J}$	h_1	$h_1 \xi^2 \frac{J_c}{J}$	h_2	$h_2 \xi^2 \frac{J_c}{J}$
0	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	1	0,00000	1	0,00000
1	0,08333	0,00694	1,00000	0,00694	4	0,02776	3	0,02082
2	0,16667	0,02778	1,00000	0,02778	2	0,05556	3	0,08334
3	0,25000	0,06250	1,00000	0,06250	4	0,25000	2	0,12500
.
.
12	1,00000	1,00000	0,2026	0,20260	1	0,20260	1	0,20260
					Σ_1	7,10838	Σ_2	6,32425

Wird die Funktion $\zeta = J_c/J$ zwischen den Querschnitten d und c angenähert linear angenommen, so kann δ_{11} formal integriert werden¹. Nach Tabelle 14b Seite 108 ist mit $M_a = \bar{M}_a = 1,0 \text{ mt}$, $n = 0,2$; $v = v/l = 0,5$ und $l' = l = 18,0 \text{ m}$:

$$\delta_{11} = \int_a^b M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \int_a^c M_1^2 \frac{J_c}{J} ds = 2 \frac{1}{12} 1,0 \{4 - (1 - 0,2) 0,5 [2 + (2 - 0,5)^2]\} 18,0 = 6,9;$$

$$5. \quad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{1}{7,11477} = 0,14055;$$

6. und 7. Überzählige Schnittkraft $X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \beta_{11} \delta_{10}$.

a) Belastung (2a):

$$\delta_{10} = \int_0^l M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \xi^2 \xi' \frac{J_c}{J} d\xi; \quad \left(\xi^2 \frac{J_c}{J}\right) \xi' = \eta \xi' = \eta';$$

Numerische Integration nach Simpson [(181) und (182)] mit $p = 1,0 \text{ t/m}$, $l = 18,0 \text{ m}$; $\Delta x = 1,5 \text{ m}$: $\Sigma_3 = 2,41055$; $\Sigma_4 = 2,1444$.

$$\alpha) \quad \delta'_{10} = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \eta' d\xi = \frac{p l^3}{2} \frac{\Delta x}{3} \Sigma_3 = 195,25455;$$

¹ Tabellen 12 ff.: S. 175 mit $l_1 = l_2 = 18,0$; $n_1 = n_2 = 0,2$; $v_1 = v_2 = 0,25$ und Annahmen $a \div d$ für ζ nach

$$a) \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0; \quad \delta_{11} = \frac{1}{3} (l'_1 + l'_2) = 12,0;$$

$$b) \quad \frac{J_1}{J_a} = n_1; \quad \frac{J_2}{J_b} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{3 + 2 n_1}{15} l'_1 + \frac{3 + 2 n_2}{15} l'_2 = 8,16;$$

$$c) \quad \frac{J_a}{J_k} = n_1; \quad \frac{J_b}{J_k} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_a} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_b} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{2 + 3 n_1}{15} l'_1 + \frac{2 + 3 n_2}{15} l'_2 = 6,24;$$

$$d) \quad \frac{J_1}{J_k} = n_1; \quad \frac{J_2}{J_k} = n_2; \quad \frac{J_c}{J_1} l_1 = l'_1 = 18,0; \quad \frac{J_c}{J_2} l_2 = l'_2 = 18,0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l'_1}{12} \{4 - (1 - n_1) v_1 [2 + (2 - v_1)^2]\} + \frac{l'_2}{12} \{4 - (1 - n_2) v_2 [2 + (2 - v_2)^2]\} = 8,95.$$

$$\beta) \quad \delta_{10} = \frac{p l^3}{2} \int_0^1 \eta' d\xi = \frac{p l^2}{2} \frac{3}{8} \Delta x \Sigma_4 = 195,41210;$$

$$X'_1 = \frac{\delta'_{10}}{\delta'_{11}} = 27,46822 \text{ mt}; \quad X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 27,46569 \text{ mt}.$$

Die lineare Angleichung¹ der Funktion $\zeta = J_c/J$ zwischen den Querschnitten d und c liefert mit $M_0 = 162 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 40,5$ und $M_1 = 1,0$; $n = 0,2$:

$$\delta_{10} = \frac{1}{15} 1,0 \cdot 40,5 \{5 - (1 - 0,2) \frac{1}{4} (10 - 10 \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{4})\} 18 = 187,11; \quad X_1 = 27,11739 \text{ mt}.$$

b) Belastung (2b).

Gleichung der Biegelinie δ_{m1} : $\frac{d^2 \delta_{m1}}{dx^2} = -M \frac{J_c}{J} = -\xi \frac{J_c}{J} = -w_m$. Berechnung und Vergleich der Ergebnisse aus (206) und (207):

$\alpha)$

$$\mathfrak{B}'_0 = c/6 \cdot (2 w_0 + w_1),$$

$$\mathfrak{B}'_m = c/6 \cdot (w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}),$$

$$\mathfrak{B}'_n = c/6 \cdot (w_{n-1} + 2 w_n).$$

m	w_m	$2 w_0$ 4 w_m	$6/c \cdot \mathfrak{B}'_0$ $w_{m-1} + 4 w_m + w_{m+1}$	$2 w_n$ $6/c \cdot \mathfrak{B}'_n$	\mathfrak{B}'_m
0	0,00000	0,00000	0,08333	—	0,02083
1	0,08333	0,33332	—	0,49999	0,12500
.

$\beta)$

$$\mathfrak{B}_0 = c/24 (7 w_0 + 6 w_1 - w_2),$$

$$\mathfrak{B}_m = c/12 (w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}),$$

$$\mathfrak{B}_n = c/24 (7 w_n + 6 w_{n-1} - w_{n-2}).$$

m	w_m	$7 w_0$ $w_{m-1} + 10 w_m + w_{m+1}$ $7 w_n$	$6 w_1$ $6 w_{n-1}$	$24/c \mathfrak{B}_0$ $24/c \mathfrak{B}_m$	\mathfrak{B}_m
0	0,00000	0,00000	0,49998	0,33331	0,02083
1	0,08333	—	1,00000	—	0,12500
.

Die Untersuchung wird mit den genaueren Werten \mathfrak{B}_m fortgesetzt:

$$A_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m \xi'_m; \quad C_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m \xi_m; \quad \text{Probe: } A_w + C_w = \sum_0^n \mathfrak{B}_m; \quad M_w = \delta_{m1}; \quad X_1 = M_w/\delta_{11}.$$

m	\mathfrak{B}_m	ξ'_m	ξ_m	$\mathfrak{B}_m \xi'_m$	$\mathfrak{B}_m \xi$	Q_{wm}	$Q_{wm} c$	M_w	X_1 [mt]
a	(2,63180)	—	—	—	—	—	—	—	—
0	0,02083	1,00000	0,00000	0,02083	0,00000	—	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,12500	0,91667	0,08333	0,11458	0,01042	2,61097	3,91646	3,91646	0,55045
2	0,25000	0,83333	0,16667	0,20833	0,04167	2,48597	3,72896	7,64542	1,07455
.

¹ Mit den Annahmen über $\zeta = J_c/J$ im Sinne der Anmerkung auf S. 175, δ_{11} nach S. 177, $l_1 = l_2 = 18,0$, $n_1 = n_2 = 0,2$; $\varphi' = l_2/l_1 = 1,0$; und $p_1 = 1,0$ t/m ist:

a) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{1}{1 + \varphi'} = 20,25 \text{ mt};$ b) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{4 + n_1}{(3 + 2 n_1) + (3 + 2 n_2) \varphi'} = 25,0 \text{ mt};$

c) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{3 + 2 n_1}{(2 + 3 n_1) + (2 + 3 n_2) \varphi'} = 26,5 \text{ mt};$

d) $X_1 = \frac{p_1 l_1^2}{8} \frac{3,61 + 0,38 n_1}{(2,734 + 1,266 n_1) + (2,734 + 1,266 n_2) \varphi'} = 25,0 \text{ mt};$

Lineare Annäherung¹ der Funktion $\zeta = J_c/J$ zwischen den Querschnitten d und c (Abb. 156):

$$X_1 = \delta_{m1}/\delta_{11} = \delta_{m1}/6,9;$$

$$P = 1 \text{ innerhalb der Voute: } \delta_{m1} = 10,8 \xi' \{5,75 - \xi' [(2 + \xi) + 4(1 - \xi^2)]\};$$

$$P = 1 \text{ außerhalb der Voute: } \delta_{m1} = 27,0 \xi [2(1 - \xi^2) - 0,3].$$

Zahlenwerte der Einflußordinaten:

	$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8
α) Funktion $\zeta = J_c/J$ nach Abb. 156 b (Fall e, Abb. 162)		1,27	2,17	2,35	1,55
β) lineare Annäherung zwischen d und c		1,27	2,17	2,30	1,53

c) Belastung (2c) und (2d)².

$$\alpha) \delta_{11} = 7,11477, \quad \Delta_a = 1,0 \text{ cm}, \quad \Delta_a = \Delta_b = 0, \quad C_1 = -\frac{2}{18,0}, \quad \delta_{1s} = -E J_c (C_1 \Delta_c).$$

Die virtuelle Arbeit ($C_1 \Delta_c$) ist für $C_1 = -\frac{2}{18}$ positiv, daher

$$\delta_{1s} = -2100000 \cdot 0,115 \left(\frac{2}{18} \cdot 0,01\right) = -268,3333;$$

$$X_{1s} = \delta_{1s}/\delta_{11} = -37,71497 \text{ mt};$$

β) $\Delta t = t_u - t_o = -10^\circ$; $\alpha_t = 10^{-5}$; Annahme $\alpha_t \cdot \Delta t/h = \text{const}$, $h = 1,3 \text{ m}$.

$$\delta_{1t} = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) = -2100000 \cdot 0,115 \cdot \frac{10^{-5} \cdot 10}{1,3} \cdot 18,0 = -334,3846;$$

$$X_{1t} = \delta_{1t}/\delta_{11} = -46,99865 \text{ mt}.$$

¹ Annahmen über $\zeta = J_c/J$ nach Anmerkung auf S. 175, $n = J_1/J$; $v_1 = v_1/l_1$:

$$a) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{6} (\xi - \xi^3); \quad b) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{15} \xi \xi' \left[\frac{n_1 + 4}{2} (1 + \xi) + (1 - n_1) \xi^2 (3 \xi' - 1) \right];$$

$$c) \delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{60} \xi \xi' (1 + \xi) [10 - 3(1 - n_1)(1 + \xi^2)];$$

d) P innerhalb der Voute:

$$\delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{12} \xi \xi' \left\{ 4 - (1 - n_1) [v_1 (2 + (2 - v_1)^2)] - \xi' \left[2 n_1 (2 + \xi) + \frac{1 - n_1}{v_1} (1 - \xi^2) \right] \right\};$$

P außerhalb der Voute:

$$\delta_{m1} = P \frac{l_1 l_1'}{12} \xi [2(1 - \xi^2) - (1 - n_1) v_1^2 (2 - v_1)];$$

Gleichung der Einflußlinie für X_1 :

$$(P = 1; l_1 = l_1' = 18,0 \quad n_1 = 0,2;$$

$$v_1 = 0,25; \delta_{11} \text{ Seite 177}).$$

$$a) X_1 = 4,5 \omega_D;$$

$$b) X_1 = 5,56 \omega_D + 2,12 \xi^3 (2 - 5 \xi + 3 \xi^2);$$

$$c) X_1 = 8,65 \omega_D (0,76 - 0,24 \xi^2);$$

$$d) P \text{ innerhalb der Voute: } X_1 = 3,02 \xi' \{2,98 - \xi' [0,4(2 + \xi) + 3,2(1 - \xi^2)]\};$$

$$P \text{ außerhalb der Voute: } X_1 = 3,02 \xi [2(1 - \xi^2) - 0,088].$$

Zahlenwerte der Einflußordinaten (Abb. 162):

$\xi =$	0,2	0,4	0,6	0,8
a	0,864	1,512	1,728	1,296
b	1,077	1,933	2,172	1,512
c	1,250	2,100	2,240	1,510
d	1,110	1,920	2,160	1,530

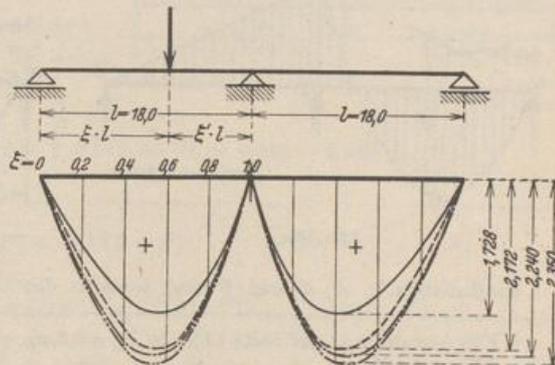


Abb. 162.

Fall a: —
 Fall b und d: - - - -
 Fall c:
 Fall e: $\zeta(x)$ nach Abb. 156 b. - - - - -
 - Einflußlinie für X_1 .

² Mit $\alpha_t \Delta t/h = \text{const}$ ist δ_{1t} ebenso wie δ_{1s} unabhängig von $\zeta = J_c/J$. Daher ist für alle Querschnittsänderungen:

$$X_{1s} = E J_c \left[\frac{\Delta_a}{l_1} + \frac{\Delta_b}{l_2} - \Delta_c \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] \frac{1}{\delta_{11}}; \quad X_{1t} = E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Lineare Annäherung der Funktion $\zeta = J_c/J$ nach Seite 177:

$$X_{1s} = -\frac{268,3333}{6,9} = -38,8889 \text{ mt}, \quad X_{1t} = -\frac{334,3846}{6,9} = -48,46153 \text{ mt}.$$

8. Stütz- und Schnittkräfte des statisch unbestimmten Systems. Die Stütz- oder Schnittkraft K des einfach statisch unbestimmten Systems ist nach (339): $K = K_0 - X_1 \cdot K_1$. Die Kräfte K_0 und K_1 sind in Abb. 161 angegeben.

a) Belastung (2a) (Abb. 163).

$$\begin{aligned} A &= 9,0 - 27,47 \frac{1}{18,0} = 7,47 \text{ t}, & \text{Feld } AC: & \begin{cases} Q = 18,0(0,415 - \xi), \\ M = 1,62\xi(0,83 - \xi), \end{cases} \\ C &= 9,0 + 27,47 \frac{2}{18,0} = 12,06 \text{ t}, & \text{Feld } BC: & \begin{cases} Q = 1,53, \\ M = -27,47\xi, \end{cases} \\ B &= 0,0 - 27,47 \frac{1}{18,0} = -1,53 \text{ t}, \end{aligned}$$

Grenzwerte von M : $Q = 0$ für $\xi = 0,415$: $M_{\max} = 27,9 \text{ mt}$;
 $Q = 0$ für $\xi = 1,0$: $M_{\min} = -27,47 \text{ mt}$;

b) Belastung (2b) (Abb. 164).

$$A = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0}; \quad C = \xi_m + X_1 \frac{2}{18,0}; \quad B = -X_1 \frac{1}{18,0}.$$

M und Q für den Schnitt $x = \xi l$.

$$\text{Feld } AC: \begin{cases} 0 < \xi < \xi_m: & Q = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0}; & M = \xi(18,0 \xi'_m - X_1); \\ \xi_m < \xi < 1,0: & Q = \xi'_m - X_1 \frac{1}{18,0} - 1; & M = \xi \left(18,0 \frac{\xi'_m \xi_m}{\xi} - X_1 \right); \end{cases}$$

$$\text{Feld } BC: \quad Q = +X_1 \frac{1}{18,0}; \quad M = -\xi X_1.$$

Grenzwerte von M : $Q = 0$ für $\xi = \xi_m$: $M_{\max} = \xi_m(18,0 \xi'_m - X_1)$;
 $Q = 0$ für $\xi = 1,0$: $M_{\max} = -X_1$;

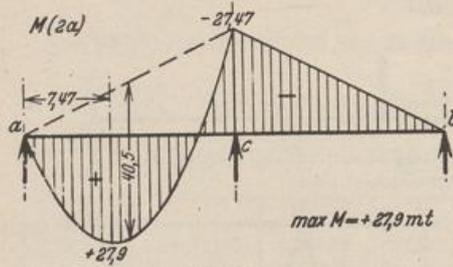


Abb. 163.

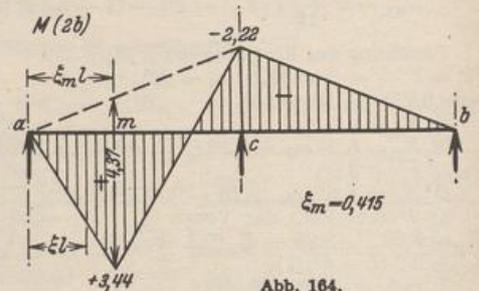


Abb. 164.

Einflußlinien¹: A , C und B sind zugleich die Gleichungen der Einflußlinien der Stütz-

¹ Für Annahme a) auf Seite 175 mit $X_1 = 4,5 \omega_D$ werden die folgenden Einflußlinien erhalten (Abb. 165 und 166):

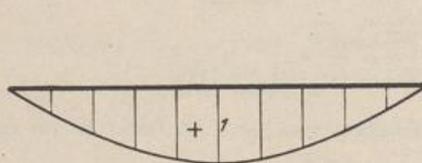


Abb. 165.
Einflußlinie für C .

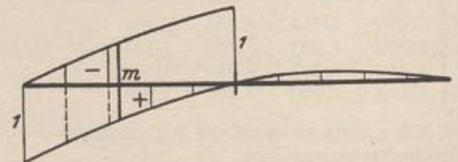


Abb. 166.
Einflußlinie für Q_m und A .

kräfte. Einflußlinien für Q_m und M_m im Schnitt m :

Feld AC: $0 < \xi < \xi_m : Q_m = -\xi - X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = \xi_m \left(18,0 \frac{\xi'_m \xi}{\xi_m} - X_1 \right);$

$\xi_m < \xi < 1 : Q_m = -1 - \xi - X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = \xi_m (18,0 (1 - \xi) - X_1);$

Feld CB: $Q_m = +X_1 \frac{1}{18,0}; M_m = -\xi_m X_1.$

c) Belastungsfall (2c) und (2d):

	A t	C t	B t	Feld AC		Feld BC	
				Q [t]	M [mt]	Q [t]	M [mt]
K_s	+ 2,10	- 4,20	+ 2,10	+ 2,1	+ 37,71 ξ	- 2,1	+ 37,71 ξ
K_t	+ 2,23	- 4,46	+ 2,23	+ 2,23	+ 40,05 ξ	- 2,23	+ 40,05 ξ

9. Die Schnittkräfte des Stabwerkes ergeben Verschiebungen, die mit den Stützenbedingungen verträglich sein müssen. Dies wird nach (335) geprüft durch:

$$\tau = \int M^{(a)} \bar{M}^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 0.$$

Die Funktionen $\bar{M}^{(0)}$ aller hierfür geeigneten Ansätze zur Nachprüfung der gegenseitigen Verdrehung τ der Ufer eines beliebigen Querschnitts k (Abb. 168 a), der Ufer des Stützenquerschnittes c (Abb. 168 b) oder der Durchbiegungen $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ (Abb. 168 c) unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor μ .

$$\bar{M}^{(0)} = \mu \xi, \quad \tau = 0 = \int M^{(a)} \xi \frac{J_c}{J} ds.$$

Belastung (2a):

$M^{(a)}$ wird als Funktion von ξ angeschrieben. Numerische Integration nach Simpson mit J_c/J nach 1. S. 175

$$\tau = \int_0^1 \left(A \xi l - \frac{p \xi^2 l^2}{2} \right) \xi \frac{J_c}{J} d\xi + \int_0^1 B \xi l \xi \frac{J_c}{J} d\xi = 9,649 - 9,649 = 0,0.$$

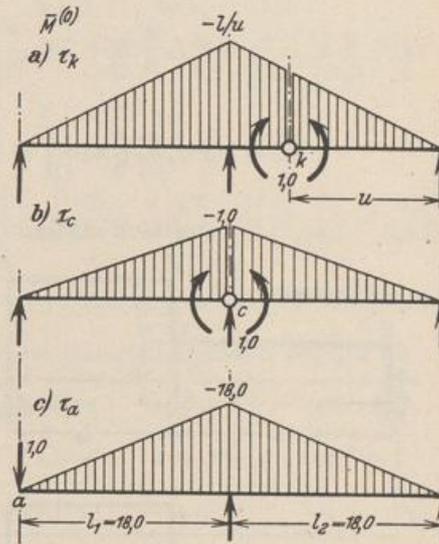


Abb. 168.

$$C = C_0 + 2 \frac{X_1}{l} = \xi + \frac{2 \cdot 4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = \frac{1}{2} (3\xi - \xi^3); \quad M_m = M_{0m} - \xi_m X_1;$$

$$Q_m = Q_{0m} - \frac{X_1}{l} = \begin{cases} -\xi - \frac{4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = -\frac{1}{4} \xi (5 - \xi^2) & \text{links von } m; \\ +1 - \xi - \frac{4,5}{18,0} (\xi - \xi^3) = 1 - \frac{1}{4} \xi (5 - \xi^2) & \text{rechts von } m. \end{cases}$$

Es soll die Einflußlinie für dasjenige Feldmoment berechnet werden, das bei gleichförmiger Belastung am größten wird. An dieser Stelle ist (Fall a):

$$M_m = \begin{cases} \xi'_m l \xi - \xi_m X_1 & \text{links von } m \text{ (Abb. 167),} \\ \xi_m l \xi' - \xi_m X_1 & \text{rechts von } m, \end{cases}$$

$$Q_m = 0 = \frac{p l}{16} (7 - 16 \xi_m); \quad \xi_m = \frac{7}{16}.$$

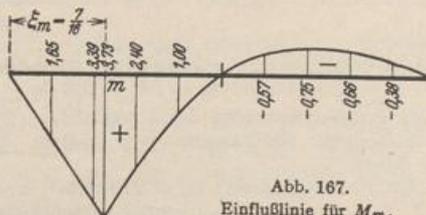


Abb. 167.
Einflußlinie für M_m .

Belastung (2c) und (2d):
 Die Verschiebungen aus Temperatur und Stützensenkung im Hauptsystem und aus den zugeordneten überzähligen Schnittkräften sind nach Abb. 168:

$$\tau = \tau_t + \tau_{ot} = 0; \quad \tau = \tau_s + \tau_{os} = 0;$$

$$\tau = 2 E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \cdot \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi d\xi + 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 0,$$

$$0 = \frac{1}{2} E J_c \frac{\alpha_t \Delta t}{h} + X_1 \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 9,28846 - 9,28846,$$

$$\tau_s = \tau_o + \tau_b = E J_c \left\{ \frac{1}{l} \Delta_c + \left(\frac{2}{u} - \frac{1}{l} \right) \Delta_c \right\}; \quad \tau_{os} = 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi,$$

$$\tau = E J_c \frac{2}{u} \Delta_c + 2 X_1 \frac{l^2}{u} \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 0,$$

$$0 = E J_c \Delta_c + X_1 l^2 \int_0^1 \xi^2 \frac{J_c}{J} d\xi = 2415,0 - 2414,9999;$$

Dreifach statisch unbestimmtes System.

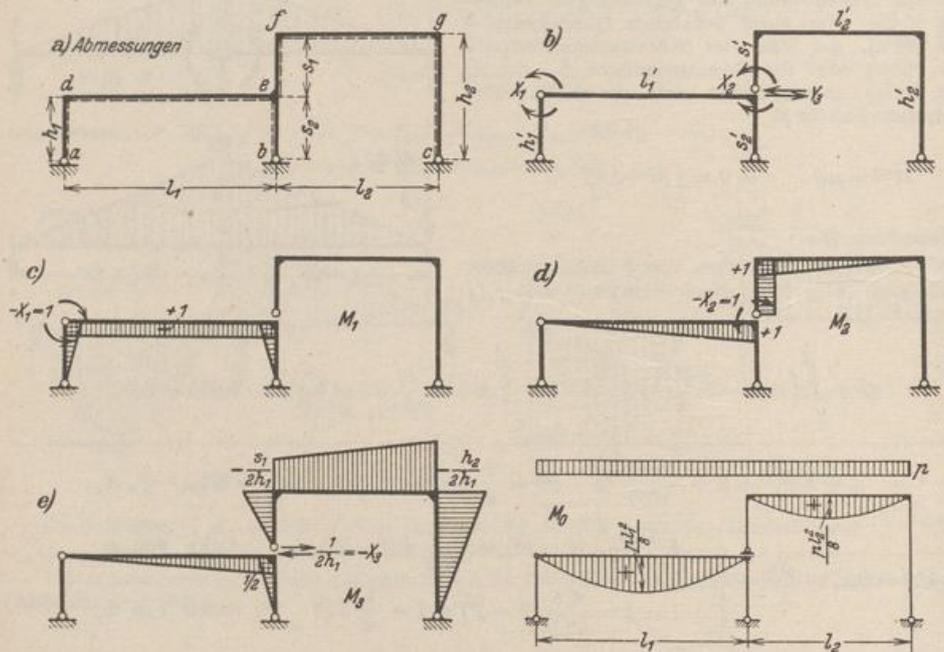


Abb. 169.

- Geometrische Grundlagen: Abmessungen (Abb. 169a): $l_1 = 15,0 \text{ m}$; $l_2 = 12,0 \text{ m}$; $h_1 = s_1 = s_2 = 4,5 \text{ m}$; $h_2 = 2h_1 = 9,0 \text{ m}$.
 J_c Trägheitsmoment des Riegels $\bar{d}e$.
 Reduzierte Stablängen: $l'_1 = 15,0 \text{ m}$; $l'_2 = 18,0 \text{ m}$; $h'_1 = 27,0 \text{ m}$; $h'_2 = 18,0 \text{ m}$; $s'_1 = 9,0$; $s'_2 = 9,0 \text{ m}$.
 Materialkonstanten: $E_s = 210 \text{ t/cm}^2$; $\alpha_t = 0,00001$.
- Belastung: Gleichförmig verteilte Belastung der beiden Riegel mit $p \text{ t/m}$.

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Als überzählige Größen wird neben den beiden Eckmomenten X_1 und X_2 , $X_3 = Y_3/2h_1$ verwendet, um die Zahlenrechnungen zu vereinfachen (Abb. 169b).

Ansatz zur Berechnung der überzähligen Kräfte:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = \delta_{10} + \delta_{1t} + \delta_{1s} = \delta_{1\otimes},$$

$$X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = \delta_{20} + \delta_{2t} + \delta_{2s} = \delta_{2\otimes},$$

$$X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = \delta_{30} + \delta_{3t} + \delta_{3s} = \delta_{3\otimes}.$$

4. Die Vorzahlen werden nach (300) berechnet. Der Anteil der Quer- und Längskräfte wird nach Seite 92 und 159 vernachlässigt.

$$\delta_{11} = \frac{h'_1}{3} + \frac{s'_2}{3} + l'_1 = \frac{27}{3} + \frac{9}{3} + 15 = 27,00;$$

$$\delta_{22} = \frac{l'_1}{3} + \frac{l'_2}{3} + s'_1 = \frac{15}{3} + \frac{18}{3} + 9 = 20,00;$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{l'_1}{3} + \frac{s'_2}{3} + \frac{s'_1}{3} \left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 + \frac{h'_2}{3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{l'_2}{3} \left[\left(\frac{s_1}{h_1} \right)^2 + \frac{s_1}{h_1} \frac{h_2}{h_1} + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{15}{3} + \frac{9}{3} + \frac{9}{3} \left(\frac{4,5}{4,5} \right)^2 + \frac{18}{3} \left(\frac{9}{4,5} \right)^2 + \frac{18}{3} \left[\left(\frac{4,5}{4,5} \right)^2 + \frac{4,5}{4,5} \cdot \frac{9}{4,5} + \left(\frac{9}{4,5} \right)^2 \right] \right\} \\ &= 19,25; \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \frac{l'_1}{2} = \frac{15}{2} = 7,50; \quad \delta_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{l'_1}{2} + \frac{s'_2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + \frac{9}{3} \right) = 5,25;$$

$$\begin{aligned} \delta_{23} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{l'_1}{3} - \frac{s'_1}{2} \frac{s_1}{h_1} - \frac{l'_2}{6} \cdot \left(2 \frac{s_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{15}{3} - \frac{9}{2} \frac{4,5}{4,5} - \frac{18}{6} \left(2 \cdot \frac{4,5}{4,5} + \frac{9}{4,5} \right) \right\} \\ &= -5,75. \end{aligned}$$

Matrix der Elastizitätsgleichungen und Abschätzung der Fehlerempfindlichkeit des Ansatzes nach (331):

	X_1	X_2	X_3		Matrix der Unterdeterminanten D_{ik} aus 5.			
(1)	27,00	7,50	5,25	δ_{10}	(1)	351,9375	-174,5625	-148,125
(2)	7,50	20,00	-5,75	δ_{20}	(2)	-174,5625	492,1875	194,625
(3)	5,25	-5,75	19,25	δ_{30}	(3)	-148,125	194,625	483,75

Matrix der Produkte $\delta_{ik} D_{ik}$

(1)	9502,313	-1309,219	-777,656	$\sum_k \delta_{1k} D_{1k} = 11589,188,$
(2)	-1309,219	9843,750	-1119,094	$\sum_k \delta_{2k} D_{2k} = 12272,063,$
(3)	-777,656	-1119,094	9312,188	$\sum_k \delta_{3k} D_{3k} = 11208,938.$

Mit $D' = 7415,438$ aus 5. und $\sum_i \sum_k |\delta_{ik} D_{ik}| = 35070,189$ wird

$$\varphi = (\pm p) \frac{\sum |\delta_{ik} D_{ik}|}{D'} = (\pm p) \frac{35070,189}{7415,438} = (\pm p) 4,73.$$

Für einen mittleren Fehler $\pm p = 0,01$ der Vorzahlen δ_{ik} ist der mögliche Fehler von X_k aus der Nennerdeterminante ca. $0,05 \cdot X_k$.

5. Konjugierte Matrix β_{ik} . Die Vorzahlen β_{ik} werden nach Seite 166 als Quotient zweier Determinanten berechnet. Dabei wird die Nennerdeterminante nach (352) mit 3 verschiedenen Ansätzen angeschrieben:

$$\begin{aligned} D &= 27(20 \cdot 19,25 - 5,75^2) - 7,5(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75) + 5,25(-7,5 \cdot 5,75 - 20 \cdot 5,25) \\ &= -7,5(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75) + 20(27 \cdot 19,25 - 5,25^2) + 5,75(-27 \cdot 5,75 - 7,5 \cdot 5,25) \\ &= 5,25(-7,5 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 20) + 5,75(-27 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 7,5) + 19,25(27 \cdot 20 - 7,5^2) \\ &= 7415,4375 \end{aligned}$$

$\alpha) \beta_{k1}: \delta_{10} = 1; \delta_{20} = 0; \delta_{30} = 0:$ $\beta_{11} = \frac{1 \cdot (20 \cdot 19,25 - 5,75^2)}{7415,4375} = 0,0474601,$ $\beta_{21} = \frac{-1(7,5 \cdot 19,25 + 5,25 \cdot 5,75)}{7415,4375} = -0,0235404,$ $\beta_{31} = \frac{1(-7,5 \cdot 5,75 - 5,25 \cdot 20)}{7415,4375} = -0,0199752,$	$\beta) \beta_{k2}: \delta_{10} = 0; \delta_{20} = 1; \delta_{30} = 0:$ $\beta_{22} = \frac{1 \cdot (27 \cdot 19,25 - 5,25^2)}{7415,4375} = 0,0663734,$ $\beta_{32} = \frac{(27,0 \cdot 5,75 + 7,5 \cdot 5,25)}{7415,4376} = 0,0262459,$
	$\gamma) \beta_{k3}: \delta_{10} = 0; \delta_{20} = 0; \delta_{30} = 1:$ $\beta_{33} = \frac{+1(27 \cdot 20 - 7,5^2)}{7415,4375} = 0,0652355.$

Kontrolle (356): Die Werte β_{ik} erfüllen den Ansatz (351) identisch, z. B. ist

$$\beta_{11}\delta_{11} + \beta_{21}\delta_{12} + \beta_{31}\delta_{13} = 0,0474601 \cdot 27 - 0,0235404 \cdot 7,5 - 0,0199752 \cdot 5,25 = 0,9999999 \approx 1,$$

$$\beta_{11}\delta_{21} + \beta_{21}\delta_{22} + \beta_{31}\delta_{23} = 0,0474601 \cdot 7,5 - 0,0235404 \cdot 20 + 0,0199752 \cdot 5,75 = 0,0000001 \approx 0,$$

$$\beta_{11}\delta_{31} + \beta_{21}\delta_{32} + \beta_{31}\delta_{33} = 0,0474601 \cdot 0,25 + 0,0235404 \cdot 5,75 - 0,0199752 \cdot 19,25 = 0,0000002 \approx 0.$$

6. Belastungszahlen nach (300) (Abb. 169):

$$\delta_{10} = \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{12} = p \cdot \frac{15^2}{12} = 281,25 p;$$

$$\delta_{20} = \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{24} + \frac{p \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{24} = p \left[\frac{281,25}{2} + \frac{12^2 \cdot 18}{24} \right] = 248,625 p;$$

$$\delta_{30} = \frac{p \cdot l_1^2 \cdot l_1'}{2 \cdot 24} - \frac{p \cdot l_2^2 \cdot l_2'}{24} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{s_1}{h_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) = p \left[\frac{281,25}{2 \cdot 2} - \frac{108}{2} \left(\frac{4,5}{4,5} + \frac{9}{4,5} \right) \right] = -91,6875 p.$$

7. a) Ansatz der überzähligen Größen als Funktionen der Belastungszahlen:

$$X_1 = +0,0474601 \delta_{10} - 0,0235404 \delta_{20} - 0,0199752 \delta_{30},$$

$$X_2 = -0,0235404 \delta_{10} + 0,0663734 \delta_{20} + 0,0262459 \delta_{30},$$

$$X_3 = -0,0199752 \delta_{10} + 0,0262459 \delta_{20} + 0,0652355 \delta_{30}.$$

β) Lösung für die Belastungszahlen $\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}$ aus 6.:

$$X_1 = +9,3269 p; \quad X_2 = +7,4746 p; \quad X_3 = -5,0739 p.$$

8. Superposition der Belastung p und der überzähligen Schnittkräfte zur Bildung der Stütz-

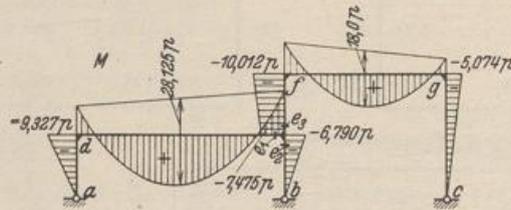


Abb. 170.

und Schnittkräfte nach (350). Schnittkräfte im Hauptsystem nach Abb. 169. Momente M in den Schnitten e_1, e_2, e_3 (Abb. 170):

$$M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3,$$

$$M_{e,1} = -9,327 p \cdot 1,0 - 7,475 p \cdot 1,0 + 5,074 p \cdot \frac{1}{2} = -14,265 p \text{ [mt]},$$

$$M_{e,2} = -9,327 p \cdot 1,0 + 5,074 p \cdot \frac{1}{2} = -6,790 p \text{ [mt]},$$

$$M_{e,3} = -7,475 p \cdot 1,0 = -7,475 p \text{ [mt]}.$$

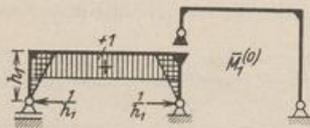


Abb. 171 a.

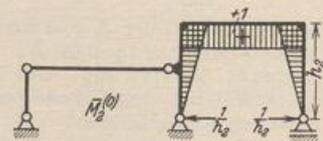


Abb. 171 b.

9. Der Spannungszustand mit X_1, \dots, X_3 nach (350) erfüllt die Stützenbedingungen. Daher sind die gegenseitigen Verschiebungen τ_1 und τ_2 der Stützpunkte a, b und b, c für die Ergebnisse

in (8) und Abb. 171 Null. Nachweis durch

$$1 \tau'_1 = \int M^{(3)} \bar{M}_1^{(3)} \frac{J_e}{J} ds = \int M^{(3)} \bar{M}_1^{(0)} \frac{J_e}{J} ds, \quad 1 \tau'_2 = \int M^{(3)} \bar{M}_2^{(0)} \frac{J_e}{J} ds \quad (\text{Abb. 171 a, b}).$$

$$1 \tau'_1 = -\frac{1}{8} \cdot 9,3269 \cdot 27 - \frac{1}{8} \cdot 6,7899 \cdot 9 + \frac{2}{8} \cdot 15 \cdot 28,125 - 15 \cdot 11,7957 = -0,002.$$

$$1 \tau'_2 = +\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,7899 \cdot 9 - \frac{1}{8} [\frac{1}{2} (2 \cdot 7,4746 + 10,0116) + 1 (7,4746 + 20,0232)] \cdot 9 = 0,004,$$

$$\tau_1 = \tau'_1 \cdot h_1 = -0,002 \cdot 4,5 = -0,009 \approx 0,0; \quad \tau_2 = \tau'_2 \cdot h_2 = 0,004 \cdot 9,0 = 0,036 \approx 0,0.$$

Der Fehler in der Berechnung der Schnittkräfte kann wie in Abschnitt 25, S. 169 bestimmt werden.

27. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Tragwerks und Symmetrie oder Antimetrie der Belastung.

Je mehr statisch überzählige Schnittkräfte zur Berechnung eines statisch unbestimmten Tragwerks notwendig sind, um so ungünstiger ist die gegenseitige Abhängigkeit für die Fehlerempfindlichkeit und damit auch für die Brauchbarkeit der Lösung. Man versucht daher die gegenseitige Verknüpfung unabhängig von der Größe der einzelnen statisch unbestimmten Schnittkräfte durch Symmetriebetrachtungen über den vorhandenen Spannungs- und Verschiebungszustand des Tragwerks zu klären und damit die Lösung zu vereinfachen.

Die Symmetrie des Tragwerks ist durch die Anzahl der Symmetrieachsen bestimmt. Man unterscheidet die Symmetrie zu einer Achse, zu mehreren Achsen und zyklische Symmetrie. Die äußeren Kräfte des Tragwerks können symmetrisch oder antimetrisch zu einer Achse zugeordnet oder in allgemeiner Form vorgeschrieben sein. Symmetrie oder Antimetrie der äußeren Kräfte bedeuten

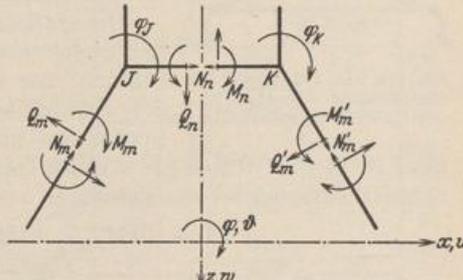


Abb. 172.

auch Symmetrie oder Antimetrie des Spannungs- und Verschiebungszustandes, so daß die Komponenten von Schnittkraft und Verschiebung in symmetrisch zugeordneten Querschnitten gleich groß oder entgegengesetzt gleich sind und einzelne Komponenten in den Querschnitten der Achsen ausgezeichnete Werte annehmen.

Bei Symmetrie der Belastung sind die Längskräfte N , die Biegemomente M und die Verschiebungen w parallel zur Achse in symmetrisch zugeordneten Querschnitten m, m' gleich groß, die Querkraft Q , die Verschiebungen u senkrecht zur Achse und die Verdrehungen φ entgegengesetzt gleich (Abb. 172). Für die Querschnitte n in der Symmetrieachse sind die Querkraft Q , die Verschiebungen u senkrecht zur Achse und die Drehwinkel φ Null oder entgegengesetzt gleich, die Glieder der ersten Gruppe (N, M, w) erhalten ausgezeichnete Werte.

Bei Antimetrie der Belastung sind die Querkraft Q , die Verschiebungen u senkrecht zur Achse und die Verdrehungen φ in symmetrisch zugeordneten Querschnitten m, m' gleich groß, die Längskräfte N , die Biegemomente M und die Verschiebungen w parallel zur Achse entgegengesetzt gleich. Für die Querschnitte n in der Symmetrieachse sind die Längskräfte N , die Biegemomente M und die Verschiebungen w parallel zur Achse Null oder entgegengesetzt gleich, die Glieder der zweiten Gruppe (Q, u, φ) erhalten ausgezeichnete Werte.

Damit sind bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung eines durch Achsen ausgezeichneten Tragwerks einzelne Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes bekannt. Die Anzahl der statisch überzähligen Schnittkräfte wird