



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

28. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Hauptsystems

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Nutzen, um die Schnittkräfte für verschiedene Belastungen eines einzelnen Stabes ($h - 1$), h auf eine bekannte Belastung zu beziehen. Eine überzählige Größe X_k des Hauptsystems kann oft aus zwei Belastungszahlen nach (323) als

$$X_k = \beta_{k(h-1)} \delta_{(h-1)0} + \beta_{kh} \delta_{h0}$$

berechnet werden, so daß bei symmetrischer Stabform und symmetrischer oder antimetrischer Belastung

$$\delta_{(h-1)0} = \pm \delta_{h0} \quad \text{und} \quad X_k = \delta_{h0} (\beta_{k(h-1)} \pm \beta_{kh}).$$

Demnach ist für zwei verschiedene entweder symmetrische oder antimetrische Belastungsformen \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2

$$X_{k,1} : X_{k,2} = \delta_{h0,1} : \delta_{h0,2}.$$

Die Schaubilder der Biegemomente eines Belastungsfalles (2) können damit auf die bekannten Biegemomente eines Belastungsfalles (1) bezogen werden. Hierfür wird der einfachste Fall, die gleichförmige Belastung, gewählt.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Ansatzes sind erfüllt, wenn von dem Einfluß der Längs- und Querkräfte auf die Verschiebungen abgesehen wird und die Belastung des in A und B gelenkig angeschlossenen Stabes l_h in den benachbarten Stabteilen des statisch bestimmten Hauptsystems keine Biegemomente hervorruft. Die Komponenten $\delta_{(h-1)0}$, δ_{h0} bedeuten daher die relativen Verdrehungen der Endquerschnitte ($h - 1$), h des ausgezeichneten Stabes.

Die Verhältniszahlen sind für symmetrische Belastung mit $\delta_{h0,2} : \delta_{h0,1} = \mu_r R_r : \mu_k R_k$, für antimetrische Belastung mit $\delta_{h0,2} : \delta_{h0,1} = \nu_r R_r : \nu_k R_k$ nach Tabelle 17 für Stäbe mit konstantem Trägheitsmoment berechnet worden und in Tabelle 24 enthalten.

Gegeben ist die Schaulinie M_{mp} für eine gleichförmige Belastung des Stabes AB (Abb. 183a). Hieraus folgen die Momente M_{mP} (Abb. 183b) für die Belastung des Stabes AB durch Einzel-

$$\mu_7 = 1,5; \quad \mu_{13} = 6 \cdot 0,16 = 0,96; \quad M_{mP} = \left(1,5 \cdot \frac{2,0}{0,6 \cdot 5,0} + 0,96 \cdot \frac{2 \cdot 1,0}{0,6 \cdot 5,0} \right) M_{mp} = 1,64 M_{mp}.$$

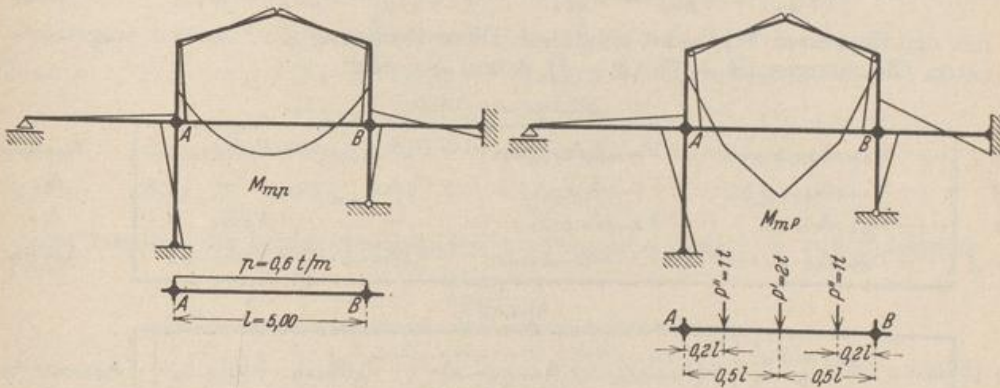


Abb. 183a und b.

28. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Hauptsystems.

Die Symmetrie des Hauptsystems setzt Symmetrie des Tragwerks voraus, deren Eigenschaften im allgemeinen bereits auf S. 185 dargelegt worden sind.

Das Hauptsystem mit einfacher Symmetrie. Von n statisch unbestimmten Schnittkräften Y_j wird in der Regel eine gerade Anzahl r symmetrisch zugeordnet sein. Der Rest $(n - r) = t$ gehört Querschnitten der Symmetrieachse an oder be-

steht aus Stütz- und Schnittkräften, deren Einheit im Hauptsystem ebenfalls symmetrische oder antimetrische Kräftebilder erzeugt. Statisch unbestimmte Biegemomente und Längskräfte in der Symmetrieachse des Hauptsystems liefern symmetrische, statisch unbestimmte Querkräfte antimetrische Spannungszustände. Die r symmetrisch zueinander liegenden, statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit $Y_A \dots Y_{A+J} \dots Y_{R-J} \dots Y_R$, die übrigen $(n-r) = t$ mit Z_b bezeichnet. Von diesen soll die Anzahl t' symmetrisch (U_h), die Anzahl t'' antimetrisch (V_k) sein ($t = t' + t''$). Die symmetrischen Eigenschaften des Hauptsystems sind die Ursache folgender Beziehungen:

$$\delta_{AA} = \delta_{RR}, \dots \delta_{(A+J)(A+J)} = \delta_{(R-J)(R-J)}, \dots \delta_{A(A+J)} = \delta_{R(R-J)},$$

$$\delta_{(A+J)h} = \delta_{(R-J)h}, \quad \delta_{(A+J)k} = -\delta_{(R-J)k}.$$

Die Matrix ist daher auch zur Nebendiagonale symmetrisch oder antimetrisch. Dasselbe gilt von der konjugierten Matrix.

Zerlegung der Matrix und Bildung von Gruppenlasten. Werden je zwei der r Bedingungsgleichungen mit den Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$ symmetrisch zueinander liegender Schnittkräfte addiert und subtrahiert, so entstehen zwei voneinander unabhängige Ansätze. Die Gleichungen α enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften U_h die Größen $(Y_A + Y_R) = X'_a$, $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$. Die Schnittkräfte V_k fallen aus. Die Gleichungen β enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften V_k die Größen $(Y_A - Y_R) = X'_r$, $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$. Die Schnittkräfte U_h fallen aus. Hierzu treten noch t' geometrische Bedingungen $\delta_h = 0$ mit den unbekanntenen Größen U_h , $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$ und t'' geometrische Bedingungen $\delta_k = 0$, welche nur V_k und $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$ enthalten. Die beiden Ansätze α und β zählen daher $(r/2 + t')$ und $(r/2 + t'')$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten.

Um die Aufspaltung der Matrix nach Abschnitt 34 vorzubereiten, werden die Glieder mit den Summen und Differenzen statisch unbestimmter Schnittkräfte mit der Zahl 2 erweitert, so daß daraus neue Unbekannte

$$\frac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X_{a+i}, \quad \frac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X_{r-i} \quad (359)$$

mit den doppelten Vorzahlen entstehen. Diese Rechnung wird an vier ausgezeichneten Gleichungen $(A+J)$, $(R-J)$, h und k gezeigt.

Allgemeiner Ansatz.

$A+J$	$\dots + Y_{A+J} \delta_{(A+J)(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{(A+J)(R-J)} \dots + U_h \delta_{(A+J)h} \dots + V_k \delta_{(A+J)k} \dots$	$\delta_{(A+J)0}$
h	$\dots + Y_{A+J} \delta_{h(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{h(R-J)} \dots + U_h \delta_{hh} \dots - \dots$	δ_{h0}
k	$\dots + Y_{A+J} \delta_{k(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{k(R-J)} \dots - \dots + V_k \delta_{kk} \dots$	δ_{k0}
$R-J$	$\dots + Y_{A+J} \delta_{(R-J)(A+J)} \dots + Y_{R-J} \delta_{(R-J)(R-J)} \dots + U_h \delta_{(R-J)h} \dots + V_k \delta_{(R-J)k} \dots$	$\delta_{(R-J)0}$

Ansatz α .

$a+i$	$\dots + \frac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2} 2(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) \dots + U_h (\delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)}) \dots$	$\delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0}$
h	$\dots + \frac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2} 2 \delta_{(A+J)h} \dots \dots + U_h \delta_{hh} \dots$	δ_{h0}

Ansatz β .

$r-i$	$\dots + \frac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2} 2(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) \dots + V_k (\delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)}) \dots$	$\delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0}$
k	$\dots + \frac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2} 2 \delta_{(A+J)k} \dots \dots + V_k \delta_{kk} \dots$	δ_{k0}

Die Verwendung der halben Summe und der halben Differenz zweier zueinander symmetrisch liegender, statisch unbestimmter Schnittkräfte nach (359) bedeutet mechanisch die Erweiterung der statisch unbestimmten Schnittkraft zur statisch unbestimmten Gruppenlast und damit zu einer statisch überzähligen Größe allgemeiner Art. Diese sind ebenfalls unabhängig voneinander, so daß bei der Ableitung beliebiger Schnittkräfte und Verschiebungen auf die Superposition über die Beziehung

$$Y_{A+J} = X_{a+i} + X_{r-i}, \quad Y_{R-J} = X_{a+i} - X_{r-i}$$

verzichtet und dafür folgender Ansatz verwendet werden kann:

$$\left. \begin{aligned} M_H &= M_{H_0} - \sum (M_{H(a+i)} X_{a+i} + M_{H(r-i)} X_{r-i} + M_{Hh} U_h + M_{Hk} V_k), \\ \delta_H &= \delta_{H_0} - \sum (\delta_{H(a+i)} X_{a+i} + \delta_{H(r-i)} X_{r-i} + \delta_{Hh} U_h + \delta_{Hk} V_k). \end{aligned} \right\} (360)$$

$M_{H(a+i)}$, $\delta_{H(a+i)}$ bedeuten im Hauptsystem die auf den Querschnitt H bezogene Schnittkraft und die relative Verschiebung der Querschnitte H infolge von $-X_{a+i} = 1$. Alle anderen überzähligen Größen sind dabei Null. Der Belastungszustand

$$\left. \begin{aligned} -X_{a+i} &= -\frac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = 1, \quad -X_{r-i} = -\frac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = 0 \text{ usw.} \\ \text{besteht aus den Schnittkräften} \\ & \quad -Y_{A+J} = 1, \quad -Y_{R-J} = 1, \end{aligned} \right\} (361a)$$

der Belastungszustand

$$\left. \begin{aligned} -X_{r-i} &= -\frac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = 1, \quad -X_{a+i} = -\frac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = 0 \text{ usw.} \\ \text{aus den Schnittkräften} \\ & \quad -Y_{A+J} = 1, \quad +Y_{R-J} = 1. \end{aligned} \right\} (361b)$$

Die Vorzeichen der Gleichungen α und β werden aus der Arbeit einer virtuellen Belastung entwickelt:

$$2(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) = 1_{A+J}(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) + 1_{R-J}(\delta_{(R-J)(R-J)} + \delta_{(R-J)(A+J)})$$

$$= 1_{A+J} \delta_{(A+J)(a+i)} + 1_{R-J} \delta_{(R-J)(a+i)} = 1_{a+i} \delta_{(a+i)(a+i)},$$

$$2(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) = 1_{A+J}(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) - 1_{R-J}(\delta_{(R-J)(A+J)} - \delta_{(R-J)(R-J)})$$

$$= 1_{A+J} \delta_{(A+J)(r-i)} - 1_{R-J} \delta_{(R-J)(r-i)} = 1_{r-i} \delta_{(r-i)(r-i)},$$

$$\delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)} = \delta_{h(a+i)} = 1_{a+i} \delta_{(a+i)h} = 2\delta_{(A+J)h},$$

$$\delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)} = \delta_{k(r-i)} = 1_{r-i} \delta_{(r-i)k} = 2\delta_{(A+J)k}.$$

Damit erhalten die beiden voneinander unabhängigen Ansätze α und β folgende Form:

Ansatz α .

$$\left[\begin{array}{l} X_a \delta_{(a+i)a} \dots + X_{a+i} \delta_{(a+i)(a+i)} \dots + U_h \delta_{(a+i)h} \dots \\ X_a \delta_{ha} \dots + X_{a+i} \delta_{h(a+i)} \dots + U_h \delta_{hh} \dots \end{array} \right] \begin{array}{l} \delta_{(a+i)0} \\ \delta_{h0} \end{array} \quad (362a)$$

Ansatz β .

$$\left[\begin{array}{l} X_r \delta_{(r-i)r} \dots + X_{r-i} \delta_{(r-i)(r-i)} \dots + V_k \delta_{(r-i)k} \dots \\ X_r \delta_{kr} \dots + X_{r-i} \delta_{k(r-i)} \dots + V_k \delta_{kk} \dots \end{array} \right] \begin{array}{l} \delta_{(r-i)0} \\ \delta_{k0} \end{array} \quad (362b)$$

Diese Gleichungen können nach dem Prinzip von Castigliano (S. 163) auch unmittelbar angeschrieben werden. Die virtuelle Belastung besteht dabei aus den Teilkräften eines der Belastungszustände $-X_a = 1, \dots -X_{a+i} = 1, \dots -X_r = 1, \dots -X_{r-i} = 1$.

Da die relativen Verschiebungen δ_{A+J} und δ_{R-J} des Hauptsystems aus den äußeren Ursachen und den überzähligen Größen X_k Null sind, ist in Verbindung mit (361)

$$1_{a+i} \delta_{a+i} = 1_{A+J} \delta_{A+J} + 1_{R-J} \delta_{R-J} = 0.$$

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} - \sum (\delta_{(A+J)a} + \delta_{(R-J)a}) X_a - \sum (\delta_{(A+J)h} + \delta_{(R-J)h}) U_h = 0, \\ & \delta_{(a+i)0} - \sum \delta_{(a+i)a} X_a - \sum \delta_{(a+i)h} U_h = 0; \quad a = 1 \dots \quad h = 1 \dots \ell', \\ & 1_{r-i} \delta_{r-i} = 1_{A+J} \delta_{A+J} - 1_{R-J} \delta_{R-J} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad & \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} - \sum (\delta_{(A+J)r} - \delta_{(R-J)r}) X_r - \sum (\delta_{(A+J)k} - \delta_{(R-J)k}) V_k = 0, \\ & \delta_{(r-i)0} - \sum \delta_{(r-i)r} X_r - \sum \delta_{(r-i)k} V_k = 0; \quad r = 1 \dots \quad k = 1 \dots \ell''. \end{aligned}$$

Die Belastungsglieder bei Symmetrie der Matrix. Die Belastungsglieder der beiden Ansätze α und β (S. 192) entstehen durch Addition und Subtraktion der Bedingungsgleichungen mit den symmetrischen Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$

$$\delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} = \delta_{(a+i)0}; \quad \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} = \delta_{(r-i)0}.$$

Bei symmetrischer Belastung ist $\delta_{(A+J)0} = \delta_{(R-J)0}$, $\delta_{(r-i)0} = \delta_{k0} = 0$; die Gleichungen β sind daher homogen, so daß

$$X_{r-i} = 0, \quad V_k = 0 \quad \text{und} \quad X_{a+i} = Y_{A+J} = Y_{R-J}. \quad (363)$$

Bei Antimetrie der Belastung wird $\delta_{(A+J)0} = -\delta_{(R-J)0}$, also $\delta_{(a+i)0} = \delta_{k0} = 0$, so daß die Gleichungen α homogen sind. Daher wird jetzt

$$X_{a+i} = 0, \quad U_h = 0 \quad \text{und} \quad X_{r-i} = Y_{A+J} = -Y_{R-J}. \quad (364)$$

Diese Lösung trifft bei Verwendung von unsymmetrisch liegenden Stütz- oder Schnittkräften W'_H mit symmetrischem oder antimetrischem Kräftebild nicht immer zu, so daß diese oft in ein statisch unbestimmtes Hauptsystem einbezogen werden. Ist W''_H die zur statisch unbestimmten Stütz- oder Schnittkraft symmetrisch liegende Größe, so werden zweckmäßiger von vornherein Gruppenlasten

$$\bar{W}'_h = \frac{W'_h + W''_h}{2} \quad \bar{W}''_h = \frac{W'_h - W''_h}{2} \quad (365)$$

gebildet, von denen dann stets die eine oder andere bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung Null ist.

Um diese übersichtliche Lösung auch bei einer beliebigen Belastung \mathfrak{P} anschreiben zu können, wird diese nach S. 186 durch Belastungsumordnung in einen symmetrischen Anteil $(1)\mathfrak{P}$ und in einen antimetrischen Anteil $(2)\mathfrak{P}$ so zerlegt, daß

$$\mathfrak{P} \equiv (1)\mathfrak{P} + (2)\mathfrak{P}.$$

In der statischen Untersuchung des Tragwerks für $(1)\mathfrak{P}$ erscheinen dann allein die überzähligen Größen X_a , X_{a+i} und die symmetrischen Kräfte U_h , in der statischen Untersuchung des Tragwerks für $(2)\mathfrak{P}$ nur die überzähligen Größen X_r , X_{r-i} und die antimetrischen Kräfte V_k . Jedem Lastanteil wird zur Vereinfachung der Rechnung ein der Eigenart der Belastung $(1)\mathfrak{P}$ oder $(2)\mathfrak{P}$ entsprechendes Hauptsystem zugeordnet.

Der symmetrische Anteil $(1)\mathfrak{P}$ liefert

$$\left. \begin{aligned} (1)X_{r-i} &= 0, & (1)X_{a+i} &= (1)Y_{A+J} = (1)Y_{R-J}, \\ \text{der antimetrische Anteil } (2)\mathfrak{P} & & & \\ (2)X_{a+i} &= 0, & (2)X_{r-i} &= (2)Y_{A+J} = -(2)Y_{R-J}, \end{aligned} \right\} \quad (366)$$

die Superposition von ⁽¹⁾ϑ und ⁽²⁾ϑ daher

$$Y_{A+J} = {}^{(1)}Y_{A+J} + {}^{(2)}Y_{A+J}, \quad Y_{R-J} = {}^{(1)}Y_{R-J} + {}^{(2)}Y_{R-J}.$$

Schnittkraft $M = {}^{(1)}M + {}^{(2)}M$ usw.

Anwendungen. a) Durchgehender Träger auf 4 Stützen in symmetrischer Anordnung (Abb. 184a). Das Tragwerk ist zweifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem a (Abb. 184b): Träger auf zwei Stützen. Überzählige Größen sind die Stützkräfte $X_a \equiv Y_A$, $X_b \equiv Y_B$, so daß $\delta_{aa} = \delta_{bb}$.

Hauptsystem b (Abb. 184e): Drei einzelne Träger. Überzählige Größen sind die Stützenmomente $X_a \equiv Y_A$, $X_b \equiv Y_B$, so daß ebenfalls $\delta_{aa} = \delta_{bb}$.

Umformung des Ansatzes nach (359):

$$X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = \delta_{a0},$$

$$X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = \delta_{b0};$$

$$\frac{X_a + X_b}{2} 2(\delta_{aa} + \delta_{ab}) = \delta_{a0} + \delta_{b0},$$

$$\frac{X_a - X_b}{2} 2(\delta_{aa} - \delta_{ab}) = \delta_{a0} - \delta_{b0};$$

$$X_1 \delta_{11} = \delta_{10}, \quad X_2 \delta_{22} = \delta_{20}.$$

Belastungszustand $-X_1 = 1$: $-X_a = 1, \quad -X_b = 1,$

Schnittkräfte M_1 ;

Belastungszustand $-X_2 = 1$: $-X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad$ Schnittkräfte M_2 .

Symmetrische Belastung: $X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b, \quad X_2 = 0.$

Antimetrische Belastung: $X_1 = 0, \quad X_2 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b.$

Schnittkraft aus der Superposition: $M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2.$

b) Beiderseits elastisch eingespannter Bogenträger in symmetrischer Anordnung (Abb. 185). Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem a. Träger auf zwei Stützen (Abb. 186a). Die Einspannungsmomente X_a, X_b und die Längskraft X_c im Bogenscheitel sind statisch unbestimmte Schnittkräfte.

Überzählige Größen:

$$X_1 = X_c; \quad -X_1 = 1, \quad M = M_1,$$

$$X_2 = \frac{X_a - X_b}{2}; \quad -X_2 = 1: \quad -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_2,$$

$$X_3 = \frac{X_a + X_b}{2}; \quad -X_3 = 1: \quad -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_3.$$

Die Schnittkräfte aus $-X_1 = 1$ und $-X_3 = 1$ sind symmetrisch, die Schnittkräfte aus $-X_2 = 1$ antisymmetrisch. Daher $\delta_{12} = \delta_{23} = 0.$

	X_1	X_2	X_3	
δ_{11}			δ_{13}	δ_{10}
		δ_{22}		δ_{20}
δ_{31}			δ_{33}	δ_{30}

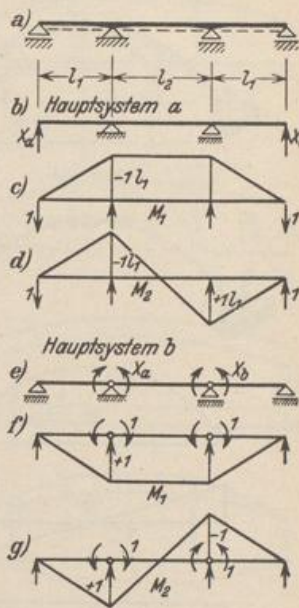


Abb. 184.

Symmetrische Belastung:

$${}^{(1)}M_0; \quad {}^{(1)}X_1 \neq 0, \quad {}^{(1)}X_2 = 0, \quad {}^{(1)}X_3 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b \neq 0.$$



Abb. 185.

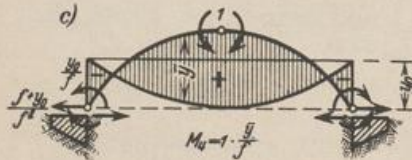
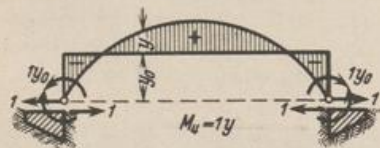
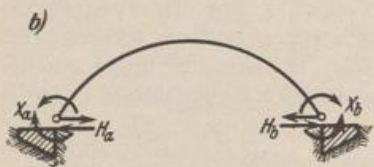
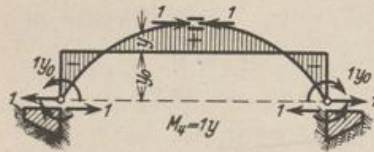
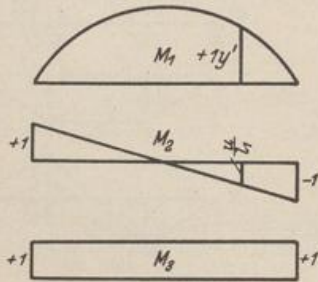


Abb. 186.

Kräftepaare $X_1 y_0$ in a und b . Die Ansatz und Ergebnis wie in Lösung (a).

Antimetrische Belastung:

$${}^{(2)}M_0; \quad {}^{(2)}X_1 = 0, \quad {}^{(2)}X_3 = 0,$$

$${}^{(2)}X_2 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b \neq 0,$$

$$M_0 = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0,$$

$$M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3$$

$$= M_0 - X_1 y' + X_2 \frac{u}{l_1} - X_3,$$

$$N = N_0 - X_1 \cos \alpha - X_2 \sin \alpha.$$

Die statisch unbestimmte Längskraft $X_c = X_1$ des symmetrischen Anteils des Ansatzes läßt sich außerdem noch durch einen Anteil der Gruppenlast X_3 in Gestalt zweier Momente $X_1 y_0$ in a und b derart zu einer Gruppenlast X_4 ergänzen, daß diese im Gegensatz zu X_1 unabhängig von X_3 berechnet werden kann. Die Bedingung ist hierfür $1_3 \delta_{34} = 0$. Gruppenlast $-X_4 = 1: -X_1 = 1, +X_3 = 1 y_0$.

$$1_3 \delta_{34} = \delta_{31} - y_0 \delta_{33} = 0$$

(starre Einspannung),

$$1_3 \delta_{34} = \delta_{31} - 2 \varepsilon_{31} - y_0 \delta_{33} - 2 y_0 \varepsilon_{33} = 0$$

(elastische Einspannung).

$\varepsilon_{33}, \varepsilon_{31}$ sind die EJ_c -fachen Drehwinkel des Widerlagers infolge eines Momentes von der Größe 1 oder einer waagerechten Kraft 1 in a oder b .

$$y_0 = \frac{\int y' \frac{J^e}{J} ds - 2 \varepsilon_{31}}{\int \frac{J^e}{J} ds + 2 \varepsilon_{33}};$$

X_2, X_3, X_4 nach (465).

Hauptsystem b (Abb. 186b). Die Längskraft $N_c = X_c$ im Scheitel wird durch die statisch unbestimmte Schnittkraft H_b am Kämpfer ersetzt. Als überzählige Größen werden außer X_2 und X_3 nach Lösung (a) die Gruppenlasten $X_1 = 1/2 (H_a + H_b)$ und $X_1^* = 1/2 (H_a - H_b)$ verwendet. Von diesen ist X_1^* statisch bestimmt und bei symmetrischer Belastung Null. Bei antimetrischer Belastung ist $H_a = -H_b$.

Die beiden symmetrischen überzähligen Größen X_1, X_3 werden auch hier durch Erweiterung von X_1 zu einer symmetrischen Gruppenlast X_4 unabhängig voneinander. Diese besteht aus X_1 und einem Anteil von X_3 in Gestalt zweier

Hauptsystem *c* (Abb. 186c). An Stelle der Längskraft N_c dient das Biegemoment $M_c = X_1$ im Bogenscheitel als statisch unbestimmte Schnittkraft. Das Hauptsystem ist dann ein Dreigelenkträger mit X_1 und den Gruppenlasten X_2, X_3 nach (a) als überzähligen Größen. Der Ansatz erhält wiederum die in (a) angegebene Form. Auch hier kann der symmetrische Teil durch die Ergänzung von X_1 zu einer Gruppenlast X_4 in zwei voneinander unabhängige Gleichungen zerlegt werden, die aus X_1 und zwei Momenten $\frac{y_0}{l} X_1$ besteht. Die Strecke y_0 wird aus der Bedingung $\delta_{34} = 0$ berechnet.

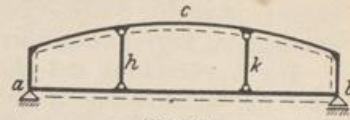


Abb. 187.

c) Geschlossener Dachrahmen mit Hängestangen in symmetrischer Anordnung (Abb. 187). 1. Statisch bestimmtes Hauptsystem nach Abb. 188a:

Zwei übereinander liegende Balkenträger. Als statisch unbestimmte Schnittkräfte werden die Längskräfte in *c, h* und *k* und die Biegemomente in *a* und *b* verwendet.

Symmetrische überzählige Größen:

$$X_1 = \frac{1}{2}(X_a + X_b), \quad X_2 = \frac{1}{2}(X_h + X_k), \quad X_3 = X_c.$$

Antimetrische überzählige Größen:

$$X_4 = \frac{1}{2}(X_a - X_b), \quad X_5 = \frac{1}{2}(X_h - X_k).$$

Belastungszustände: $-X_3 = 1, M = M_3,$

$$-X_1 = 1: \quad -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_1,$$

$$-X_2 = 1: \quad -X_h = 1, \quad -X_k = 1, \quad M = M_2,$$

$$-X_4 = 1: \quad -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_4,$$

$$-X_5 = 1: \quad -X_h = 1, \quad +X_k = 1, \quad M = M_5.$$

Ansatz für symmetrische Belastung:

X_1	X_2	X_3	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{20}
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{30}

Ansatz für antimetrische Belastung:

X_4	X_5	
δ_{44}	δ_{45}	δ_{40}
δ_{54}	δ_{55}	δ_{50}

Symmetrische Belastung: $X_4 = X_5 = 0.$

$$X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b, \quad X_2 = {}^{(1)}X_h = {}^{(1)}X_k, \quad X_3 = X_c.$$

Antimetrische Belastung: $X_1 = X_2 = X_3 = 0.$

$$X_4 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b, \quad X_5 = {}^{(2)}X_h = -{}^{(2)}X_k.$$

Beliebiger Lastangriff:

$$M = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0 - \sum X_r M_r; \quad r = 1 \dots 5.$$

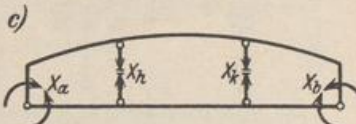
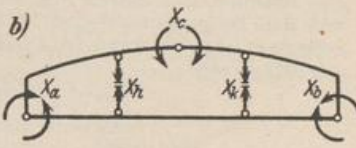
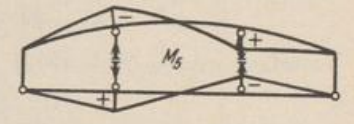
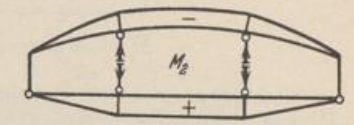
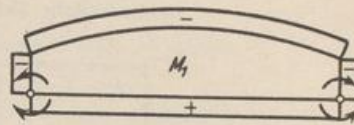
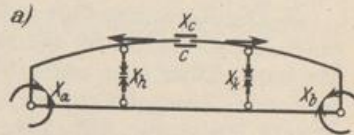


Abb. 188.

Die Längskraft $X_0 = X_3$ kann ebenso wie X_1 auf S. 196 zu einer Gruppenlast X_3^* ergänzt werden, so daß δ_{13} oder δ_{23} Null ist. Die Erweiterung des Ansatzes zur unabhängigen Berechnung aller überzähligen Größen wird in Abschnitt 36 behandelt.

Die Verwendung des Biegemomentes im Scheitelquerschnitt c (Abb. 188b) oder der Schnittkraft H_b im Querschnitt b an Stelle der statisch unbestimmten Längskraft $X_3 = X_0$ führt zu keinen wesentlichen Änderungen der Lösung. Sie wird dann ebenso wie auf S. 196 behandelt.

2. Die Rechnung läßt sich durch statisch unbestimmte Hauptsysteme abkürzen, deren Schnittkräfte für die Belastung \mathfrak{P} und $-X_k = 1$ aus Tabellen bekannt sind. Sie kann daher hier unter Umständen mit Vorteil auf den geschlossenen Stabzug oder den Zweigelenkrahmen mit biegeungssteifem Zugstab bezogen werden. Der Ansatz lautet für Abb. 188c:

Symmetrische Belastung

X_1	X_2	
$\delta_{11}^{(1)}$	$\delta_{12}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(1)}$
$\delta_{21}^{(1)}$	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$

Antimetrische Belastung

X_4	X_5	
$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$
$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$

$$M = M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} - X_2 M_2^{(1)} - X_4 M_4^{(1)} - X_5 M_5^{(1)}.$$

Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch bestimmten Hauptsystem.

Berechnung einer zweischiffigen, zur Mitte symmetrischen Halle (Abb. 189).

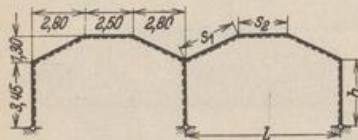


Abb. 189.

1. Geometrische Grundlagen: Trägheitsmomente und reduzierte Stablängen. Riegel: $J_r = 0,00312 \text{ m}^4 = J_e$, Pfosten: oberes Ende $J_b = 0,00540 \text{ m}^4$, unteres Ende $J_a = 0,000675 \text{ m}^4$, $J_a : J_b = n = 0,125$. Maßgebendes mittleres Trägheitsmoment für den Pfosten nach Tabelle 11

$$J_A = k \cdot J_a = 4,90 J_a = 0,00331 \text{ m}^4.$$

$$h' = 3,45 \frac{0,00312}{0,00331} = 3,25 \text{ m}, \quad s'_1 = 3,09 \text{ m}, \quad s'_2 = 2,50 \text{ m}.$$

2. Hauptsystem und überzählige Größen: Die Belastung wird bei Symmetrie des Stabzugs durch Umordnung in den symmetrischen und antimetrischen Anteil zerlegt. Die symmetrische Belastung $^{(1)}\mathfrak{P}$ erzeugt ein symmetrisches Kräftebild, so daß die symmetrisch zueinander liegenden Biegemomente der Querschnitte b, c, d, e nach (359) zu überzähligen Gruppenlasten vereinigt und aus

$$X_1 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_b + ^{(1)}M_e); \quad X_2 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_c + ^{(1)}M_d)$$

berechnet werden (Abb. 190 a). Die Differenz der Biegemomente aus $^{(1)}\mathfrak{P}$ ist Null, daher

$$X_1 = ^{(1)}M_b = ^{(1)}M_e, \quad X_2 = ^{(1)}M_c = ^{(1)}M_d.$$

Der antimetrische Anteil $^{(2)}\mathfrak{P}$ erzeugt ein antimetrisches Kräftebild, so daß ein Hauptsystem mit den Biegemomenten $^{(2)}M_b, ^{(2)}M_e$ als überzähligen äußeren Kräften statisch bestimmt berechnet werden kann (Abb. 190 b). Diese werden zu zwei überzähligen Gruppenlasten zusammengefaßt:

$$^{(2)}X_1 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b + ^{(2)}M_e); \quad ^{(2)}X_3 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b - ^{(2)}M_e);$$

$$^{(2)}X_1 = 0 \quad \text{daher} \quad ^{(2)}X_3 = ^{(2)}M_b = - ^{(2)}M_e.$$



Abb. 190 a. Hauptsystem für symmetrische Belastung.

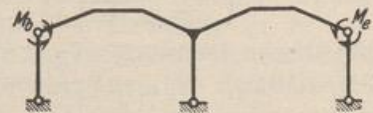


Abb. 190 b. Hauptsystem für antimetrische Belastung.

Das Hauptsystem für den symmetrischen Anteil der Belastung nach Abb. 190 a ist beweglich, aber durch die Art der Belastung im Gleichgewicht. Das Hauptsystem für den antimetrischen Anteil (Abb. 190 b) ist statisch unbestimmt, die statisch unbestimmte Schnittkraft jedoch durch die Art des Lastangriffs Null.

Ansatz:

Symmetrischer Anteil

X_1	X_2	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{20}

Antimetrischer Anteil

$$X_3 \delta_{33} = \delta_{30}$$

3. Vorzahlen der Elastizitätsgleichungen: Berechnung nach (300) mit den Abb. 191a—c

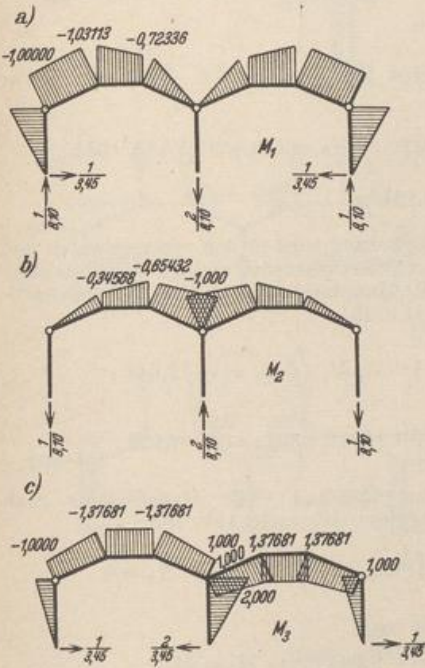


Abb. 191. Biegemomente im Hauptsystem infolge $-X_i = 1$.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int M_1^2 \frac{J^c}{J} ds = 13,506, \\ \delta_{12} &= \int M_1 M_2 \frac{J^c}{J} ds = 4,964, \\ \delta_{22} &= \int M_2^2 \frac{J^c}{J} ds = 5,826, \\ \delta_{33} &= \int M_3^2 \frac{J^c}{J} ds = 33,580. \end{aligned}$$

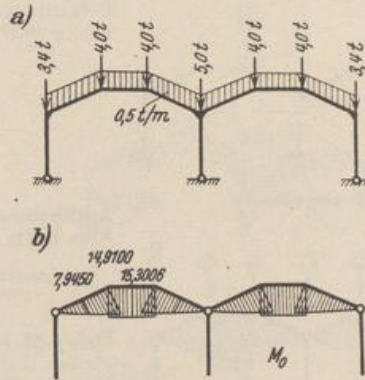


Abb. 192.

Auflösung des Ansatzes nach (347):

$$\begin{aligned} X_1 &= + 0,10780 \delta_{10} - 0,09185 \delta_{20}, \\ X_2 &= - 0,09185 \delta_{10} + 0,24990 \delta_{20}, \\ X_3 &= + 0,02978 \delta_{30}. \end{aligned}$$

4. Die überzähligen Größen und Schnittkräfte aus einzelnen Belastungsfällen. a) Eigengewicht (Abb. 192a). Die Belastung ist symmetrisch. Hauptsystem: Abb. 190a, $X_3 = 0$. Schnittkräfte: Abb. 192b.

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = - 138,57, \\ \delta_{20} &= \int M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = - 86,017, \\ \delta_{30} &= 0, \\ X_1 &= - 7,037 \text{ mt} = M_b = M_e, \\ X_2 &= - 8,769 \text{ mt} = M_c = M_d. \end{aligned}$$

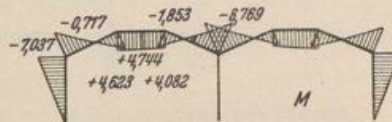


Abb. 193. Biegemomente aus Eigengewicht.

Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 193):

$$M = M_0 + 7,037 M_1 + 8,769 M_2.$$

Probe: Die gegenseitige Verschiebung δ_k der äußeren Fußgelenke muß als Null nachgewiesen werden. Die virtuelle Belastung 1_k nach Abb. 194 a liefert

$$1_k^{(3)} \delta_{k0}^{(3)} = \int \bar{M}_k M_0^{(3)} \frac{J^c}{J} ds = 0,02 = \Delta > 0,$$

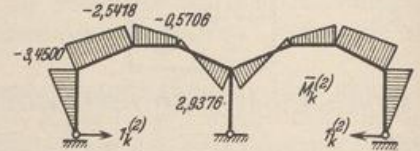
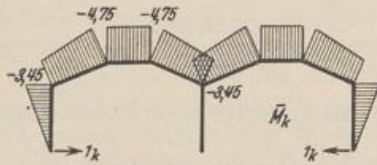


Abb. 194 a und b.

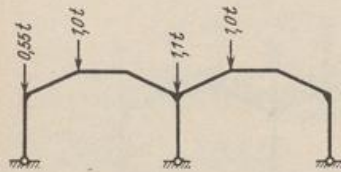
so daß die waagerechte Komponente H der äußeren Stützkräfte nach (333) den Fehler $\Delta H = \Delta / \delta_{kk}^{(n-1)}$ enthält:

$$1_k^{(n-1)} \delta_{kk}^{(n-1)} = 1_k^{(2)} \delta_{kk}^{(2)} = \int \bar{M}_k^{(2)} \bar{M}_k^{(2)} \frac{J^c}{J} ds = 110,403 \quad (\text{Abb. 194 b}),$$

$$\Delta H = 0,02 / 110,403 = 0,181 \text{ kg},$$

gegenüber $H = 2,040 \text{ t}$.

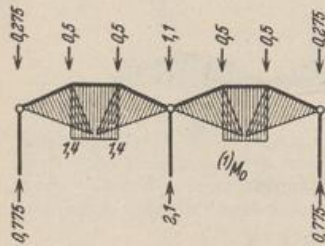
b) Einseitige Schneebelastung (Abb. 195 a). Die Belastung wird in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Belastungsanteil zerlegt. Symmetrischer Belastungsanteil $(1)\mathfrak{P}$: Hauptsystem nach Abb. 190 a, Schnittkräfte $(1)M_0$, nach Abb. 195 b



Schneebelastung.

$${}^{(1)}\delta_{10} = \int {}^{(1)}M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = -12,643,$$

$${}^{(1)}\delta_{20} = \int {}^{(1)}M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = -7,826.$$



Symmetrischer Anteil.

Antisymmetrischer Belastungsanteil $(2)\mathfrak{P}$: Hauptsystem nach Abb. 190 b. Schnittkräfte $(2)M_0$ nach Abb. 195 c.

$${}^{(2)}\delta_{30} = \int {}^{(2)}M_0 M_3 \frac{J^c}{J} ds = 0, \quad X_3 = 0.$$

Daher ist nach 3.:

$$X_1 = -0,644 \text{ mt} = M_b = M_e,$$

$$X_2 = -0,794 \text{ mt} = M_c = M_d.$$

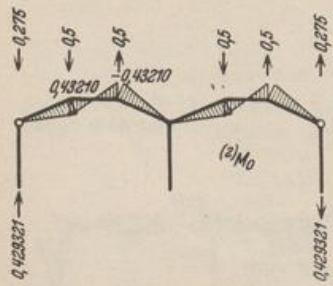
Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 196):

$$M = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0 + 0,644 M_1 + 0,794 M_2.$$

Probe wie bei a):

$$\delta_{k0}^{(3)} = 0,02 = \Delta.$$

c) Windbelastung (Abb. 197 a). Die Belastung wird in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Belastungsanteil zerlegt (Abb. 197 b und d). Symmetrischer Belastungs-



Antisymmetrischer Anteil.
Abb. 195.

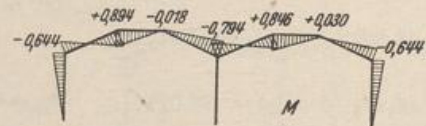


Abb. 196. Biegemomente aus Schneebelastung.

anteil: Hauptsystem nach Abb. 190 a. Schnittkräfte $(1)M_0$ nach Abb. 197 c

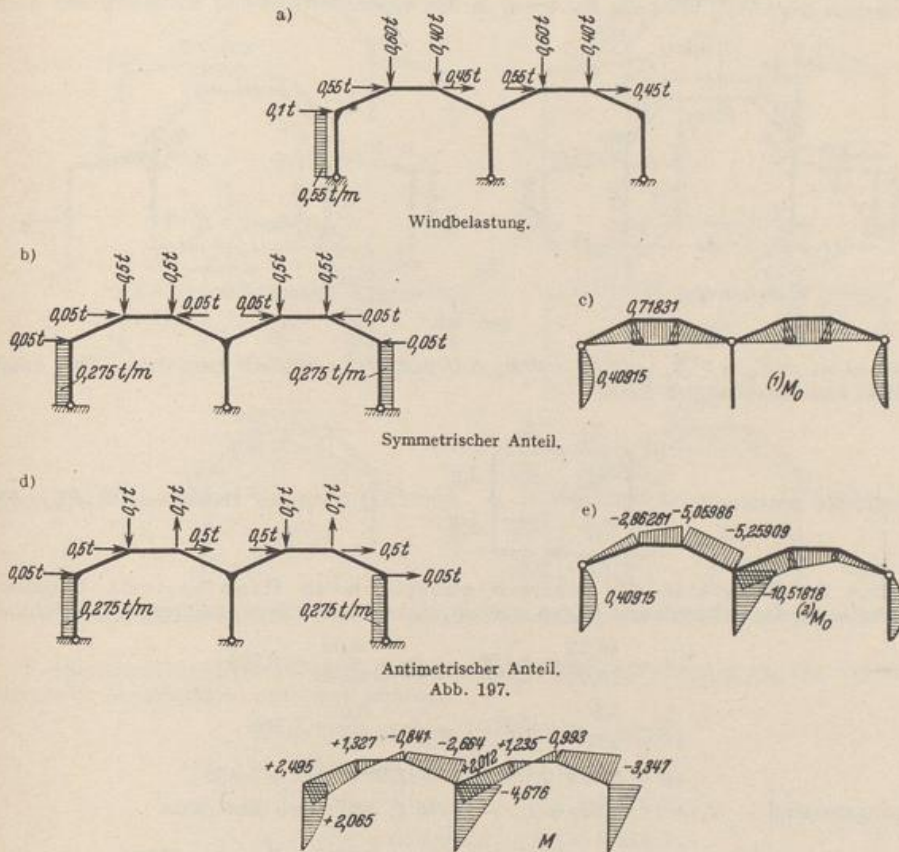
$${}^{(1)}\delta_{10} = \int {}^{(1)}M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = -7,373, \quad {}^{(1)}\delta_{20} = \int {}^{(1)}M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = -4,015.$$

Antimetrischer Belastungsanteil: Hauptsystem nach Abb. 190 b. Schnittkräfte $^{(2)}M_0$ nach Abb. 197 e

$$^{(2)}\delta_{30} = \int ^{(2)}M_0 M_3 \frac{J_c}{J} ds = 98,05.$$

Daher ist nach 3.:

$$X_1 = -0,426 \text{ mt}, \quad X_2 = -0,326 \text{ mt}, \quad X_3 = +2,921 \text{ mt}.$$



Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 198):

$$M = ^{(1)}M_0 + ^{(2)}M_0 + 0,426 M_1 + 0,326 M_2 - 2,921 M_3.$$

Probe wie bei a):

$$\delta_{k_0}^{(3)} = 0,025 = \Delta.$$

Mit $^{(1)}\delta_{1,1} = \Delta/h = 0,025/3,45 = 0,00725$, $^{(1)}\delta_{2,2} = ^{(2)}\delta_{3,3} = 0$ ergibt sich nach S. 169 ein Fehler $\Delta X_1 = 0,10780 \cdot 0,00725 = 0,000782 \text{ mt}$ und damit ein Fehler der äußeren horizontalen Stützkkräfte

$$\Delta H = 0,000782/3,45 = 0,23 \text{ kg} \text{ gegenüber } 723 \text{ kg}.$$

Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch unbestimmten Hauptsystem. (Abb. 199 a.)

1. Geometrische Grundlagen. Trägheitsmomente:

$$J_1 = 0,0416 \text{ m}^4 = J_c, \quad J_2 = 0,0213 \text{ m}^4, \quad J_3 = 0,0114 \text{ m}^4.$$

Reduzierte Stablängen:

$$h'_1 = 5,00 \cdot \frac{0,0416}{0,0114} = 18,245 \text{ m}, \quad s'_1 = 8,06 \cdot \frac{0,0416}{0,0213} = 15,746 \text{ m},$$

$$h'_2 = 6,00 \text{ m}, \quad h' = 2,00 \text{ m}, \quad s'_2 = 5,657 \text{ m}, \quad l'_1 = 8,00 \text{ m}.$$

5. Auflösung des Ansatzes in 2. nach (345):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(2)} + 0,11351 \delta_{20}^{(2)}}{19,34467}, \quad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(2)}}{16,05370}, \quad X_3 = \frac{\delta_{30}^{(2)} + 2,75309 \delta_{10}^{(2)}}{469,1904}$$

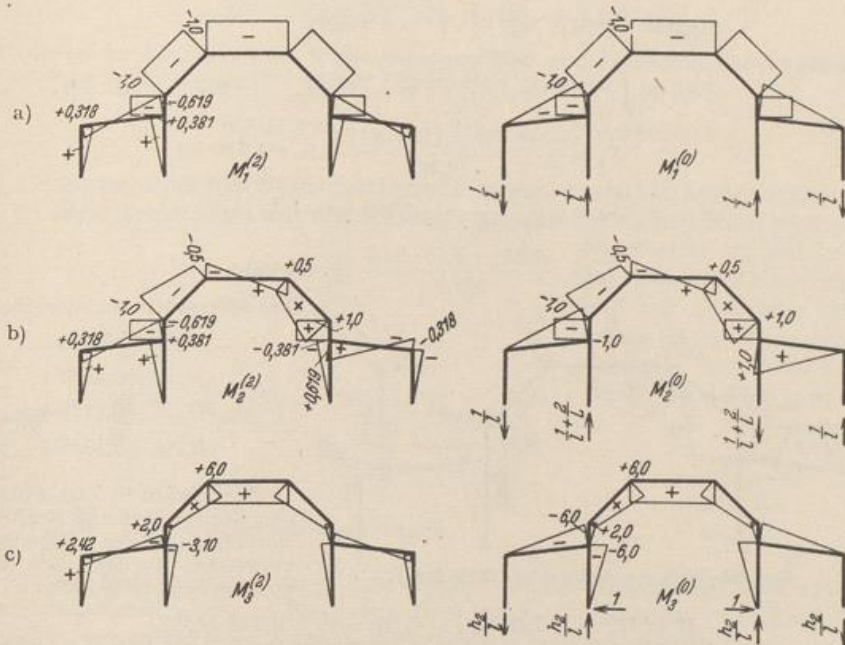


Abb. 200. Biegemomente infolge $-X_i = 1$ im statisch unbestimmten und statisch bestimmten Hauptsystem.

6. Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks können aus den Stützkraften oder durch Superposition gewonnen werden:

$$\begin{aligned} H_a &= H_{a0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 + X_2) + 0,484 X_3, \\ H_b &= H_{b0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 + X_2) - 0,516 X_3, \\ H_c &= H_{c0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 - X_2) - 0,516 X_3, \\ H_d &= H_{d0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 - X_2) + 0,484 X_3. \end{aligned}$$

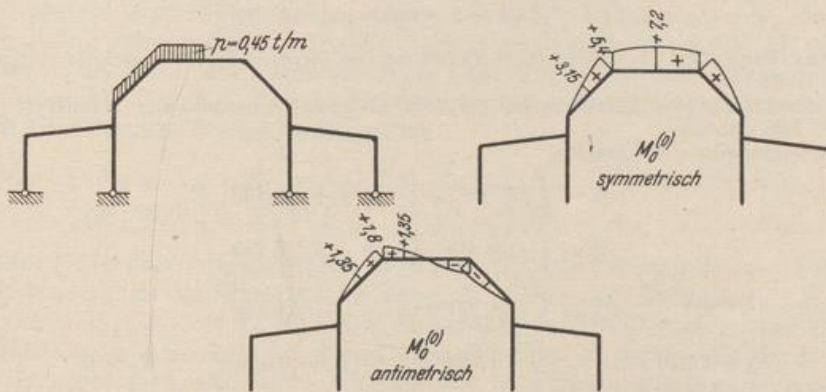


Abb. 201. Schneebelastung.

7. Belastungsfall I: Einseitige Belastung des Mittelschiffs durch Schnee mit $p = 0,45$ t/m nach Abb. 201. Sie wird in den symmetrischen und antisymmetrischen Lastanteil mit $p = 0,225$ t/m zerlegt, so daß $X_1 = {}^{(1)}M_1 = {}^{(1)}M_r$, $X_3 = {}^{(1)}H_1 = {}^{(1)}H_r$, $X_2 = {}^{(2)}M_1 = -{}^{(2)}M_r$. Die Be-

lastungsglieder des Ansatzes werden als gegenseitige Verschiebungen im statisch unbestimmten Hauptsystem nach (305) berechnet.

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\delta_{10}^{(2)} &= \int {}^{(1)}M_0^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = -86,7; & {}^{(1)}\delta_{20}^{(2)} &= 0; \\ {}^{(1)}\delta_{30}^{(2)} &= \int {}^{(1)}M_0^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +472,9; \\ {}^{(2)}\delta_{20}^{(2)} &= \int {}^{(2)}M_0^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = -12,33; & {}^{(2)}\delta_{10}^{(2)} &= {}^{(2)}\delta_{30}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{-86,7 + 0,1135 \cdot 472,9}{19,34} = -1,710 \text{ mt},$$

$$X_2 = -\frac{12,33}{16,05} = -0,768 \text{ mt},$$

$$X_3 = \frac{472,9 - 2,75 \cdot 86,7}{469,2} = +0,499 \text{ t}.$$

Die Stützkräfte sind dann nach 6.:

$$H_a = +0,0840 \text{ t},$$

$$H_b = -0,4150 \text{ t},$$

$$H_c = -0,3173 \text{ t},$$

$$H_d = +0,1817 \text{ t}.$$

Sie können in Verbindung mit den übrigen äußeren Kräften zur Bestimmung der Schnittkräfte verwendet werden. Die Superposition nach (289) liefert

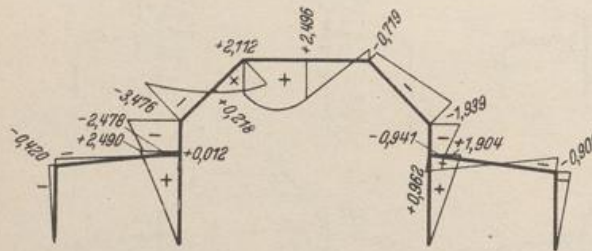


Abb. 202. Biegemomente infolge Schneelast.

$$M = M_0^{(2)} + 1,710 M_1^{(2)} + 0,768 M_2^{(2)} - 0,499 M_3^{(2)}.$$

Um die Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 202) nachzuweisen, wird festgestellt, daß die Summe der gegenseitigen Verdrehungen der Querschnitte l und r Null ist.

$$\delta_{10}^{(3)} = \int M_0^{(3)} M_1^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 16,81809 - 16,79790 = 0,02 \approx 0.$$

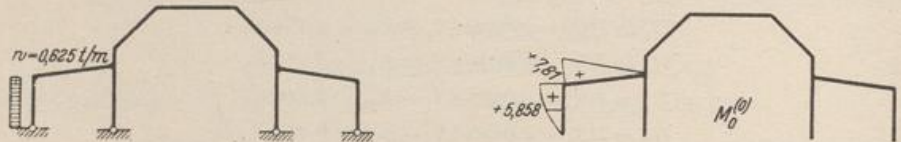


Abb. 203. Windbelastung.

8. Belastungsfall II: Waagerechte Belastung des Pfostens des Seitenschiffs durch Wind mit $w = 0,625 \text{ t/m}$.

Die Umordnung der Belastung ist bei dem einfachen Schaubild der Schnittkräfte $M_0^{(0)}$ nach Abb. 203 unnötig.

Belastungsglieder des Ansatzes:

$$\delta_{10}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +19,236,$$

$$\delta_{20}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +19,236,$$

$$\delta_{30}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +179,552;$$

$$X_1 = 2,048 \text{ mt}, \quad X_2 = 1,198 \text{ mt}, \quad X_3 = 0,496 \text{ t}, \quad X_4 = 0.$$

Nach Abschn. 61 wird

$$\Phi = \frac{2 + 0,833(4 + 5 \cdot 1,159)}{4 \cdot 4,456} = 0,5701 \text{ t};$$

$$H_{00}^{(2)} = -\frac{0,625 \cdot 5,00}{2} (-0,5701) = 0,891 \text{ t}; \quad H_{d0}^{(2)} = 0,891 - 0,625 \cdot 5,00 = -2,234 \text{ t}.$$

Die übrigen waagerechten Stützkräfte werden wiederum nach 6. berechnet.

$$H_a = -1,788 \text{ t}, \quad H_b = +0,841 \text{ t}, \quad H_c = -0,202 \text{ t}, \quad H_d = 0,294 \text{ t}.$$

Sie dienen zur Ermittlung der Schnittkräfte. Die Superposition nach (289) liefert

$$M = M_0^{(2)} - 2,048 M_1^{(2)} - 1,198 M_2^{(2)} - 0,496 M_3^{(2)}.$$

Zum Nachweis der Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 204) wird festgestellt, daß die gegenseitige Verschiebung der Stützpunkte der inneren Pfosten Null ist:

$$\delta_{30}^{(5)} = \int M_0^{(5)} M_3^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 51,618 - 51,617 = 0,001 \approx 0.$$

Das Hauptsystem mit Symmetrie nach zwei Achsen. Die Symmetrie des Tragwerks zu einer Achse führt mit der Bildung eines symmetrischen Hauptsystems zur

Symmetrie der Matrix in bezug auf die Nebendiagonale und zur Zerlegung des Ansatzes in zwei unabhängige Gruppen von Gleichungen. Durch die Addition und Sub-

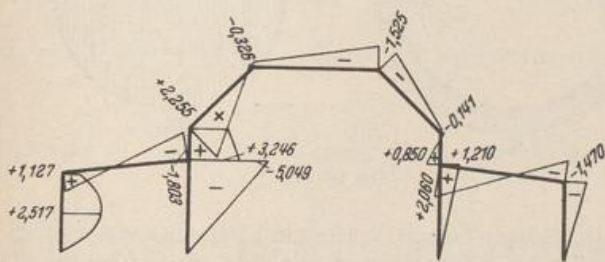


Abb. 204. Biegemomente infolge Windlast.

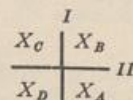


Abb. 205.

traktion von Gleichungen mit symmetrischen Ordnungsnummern sind neue Unbekannte entstanden, die in statischer Beziehung als Gruppen von überzähligen, zueinander symmetrisch liegenden Schnittkräften erkannt wurden.

Besitzt das Hauptsystem zwei Symmetrieachsen, so ist die Matrix durch vier Achsen ausgezeichnet. Der Ansatz kann dann durch wiederholte Addition und Subtraktion in vier voneinander unabhängige Teile λ, μ, ν, τ zerlegt werden. Die Unbekannten dieser Gleichungen bestehen aus Gruppen von je vier statisch unbestimmten, einander nach Abb. 205 symmetrisch zugeordneten Schnittkräften. Sie können ähnlich wie bei einfacher Symmetrie des Hauptsystems symmetrisch oder antisymmetrisch zu einer der beiden Achsen entwickelt und zur Bildung der vier unabhängigen Abschnitte des Ansatzes unmittelbar angeschrieben werden. Die Unbekannten U_k der Gleichungen λ sind zu beiden Achsen symmetrisch, die Unbekannten V_k des Ansatzes μ zu beiden Achsen antisymmetrisch. Die Unbekannten Y_k der Gleichungen ν sind symmetrisch zur Achse I und antisymmetrisch zur Achse II, die Unbekannten Z_k des Ansatzes τ antisymmetrisch zur Achse I und symmetrisch zur Achse II. Bilden daher X_A, X_B, X_C, X_D eine Gruppe statisch unbestimmter, einander symmetrisch zugeordneter Schnittkräfte, so ist

$$\left. \begin{aligned} U_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B + X_C + X_D), & Y_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B - X_C + X_D), \\ Z_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B - X_C - X_D), & V_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B + X_C - X_D). \end{aligned} \right\} (367)$$

Der Faktor $1/4$ ist durch die nachträgliche Erweiterung der Summanden der Ansätze λ bis τ entstanden, um die Schnittkräfte für $-U_k = 1$ aus der Belastung $-X_A = 1, -X_B = 1, -X_C = 1, -X_D = 1$ usw. zu entwickeln. Die Vorzeichen und die Belastungszahlen der Ansätze λ bis τ folgen aus derselben algebraischen Entwicklung wie die Gruppenlasten, also durch Addition und Subtraktion der Vorzeichen δ_{ik} und der Belastungszahlen δ_{k0} des allgemeinen Ansatzes. Sie erscheinen nach der erwähnten Erweiterung der linken Seiten der Gleichungen im vierfachen Betrage. Die Vorzeichen δ_{hh} und δ_{ht} aus $-X_h = 1$ werden jedoch dabei halbiert, wenn X_h eine überzählige Größe in der Symmetrieachse ist. Die Entwicklung kann nach dem An-

satz (362) auf S. 193 verfolgt werden. Die Vorzahlen der Ansätze λ bis τ werden je nach der Art der Gruppenbildung mit $\lambda_{hk}, \mu_{hk}, \nu_{hk}, \tau_{hk}$ bezeichnet und unabhängig von der algebraischen Grundlage ebenso wie auf S. 193 unmittelbar als die Arbeiten $1_k \cdot \lambda_{kh}, 1_k \cdot \mu_{kh}, 1_k \cdot \nu_{kh}, 1_k \cdot \tau_{kh}$ einer virtuellen Belastung $-U_k = 1, -V_k = 1, -Y_k = 1, -Z_k = 1$ bei einer Formänderung aus $-U_h = 1$ usw. entwickelt. Dasselbe gilt von den Belastungszahlen $\lambda_{k0}, \mu_{k0}, \nu_{k0}, \tau_{k0}$.

Die Gruppenlasten U bis Z können in dieser Form nur dann entwickelt

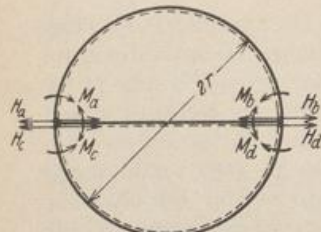


Abb. 206.

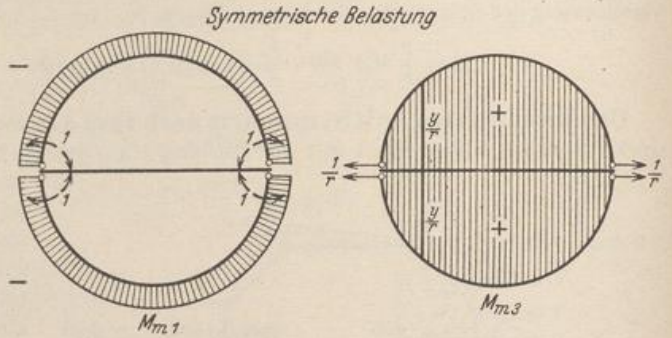


Abb. 207 a, b.

werden, wenn die Anzahl der überzähligen Schnittkräfte ein Vielfaches von vier ist. Sie werden deshalb unter Umständen durch symmetrisch liegende, statisch bestimmte Schnittkräfte ergänzt. Daher tritt in der Regel zur Bildung von Gruppenlasten die Umordnung der Belastung nach den ausgezeichneten Systemachsen (Abschnitt 27).

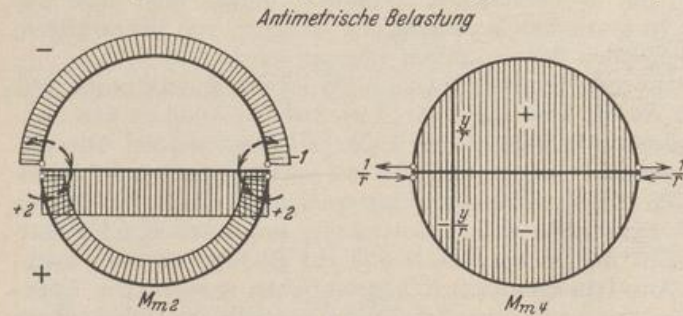


Abb. 207 c, d.

Ansatz und Lösung derartiger Aufgaben werden an der folgenden Rechnung gezeigt.

Der kreisförmige, durch eine Querwand unterteilte Behälterring (Abb. 206) ist sechsfach statisch unbestimmt. Er ist zu zwei Achsen symmetrisch. Um diese Eigenschaft für die Berechnung zu benutzen,

werden neben H_a und H_c auch H_b und H_d als äußere Kräfte verwendet, so daß durch deren Umordnung nach den vier Achsen acht überzählige Gruppenlasten entstehen. Da das Kräftebild auch bei der Füllung einer Kammer zur senkrechten Achse symmetrisch ist, sind die für diese Achse antisymmetrischen Gruppen Null. Daher werden nur die folgenden überzähligen Größen angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} U_1 = X_1 &= \frac{1}{4} (M_a + M_b + M_c + M_d), & U_2 = X_3 &= \frac{r}{4} (H_a + H_b + H_c + H_d), \\ Z_1 = X_2 &= \frac{1}{4} (M_a + M_b - M_c - M_d), & Z_2 = X_4 &= \frac{r}{4} (H_a + H_b - H_c - H_d). \end{aligned} \right\} (368)$$

Die Elastizitätsgleichungen entstehen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (156)

$$\delta_{10} - \sum \delta_{1k} X_k = 0 \quad \text{usw.}, \quad \delta_{40} - \sum \delta_{4k} X_k = 0; \quad k = 1, \dots, 4.$$

Die Vorzahlen haben die folgende Bedeutung:

$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \int N_1^2 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_c}{J} ds; \quad \delta_{40} = \frac{J_c}{F_c} \int N_0 N_1 \frac{F_c}{F} ds + \int M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds.$$

N_1 und M_1 sind die Schnittkräfte aus $-X_1 = 1, X_2 = X_3 = X_4 = 0$. Dieser Belastungszustand ist gleichbedeutend mit $-M_a = 1, -M_b = 1, -M_c = 1, -M_d = 1$ (Abb. 207 a).

1. Um die viergliedrige Matrix zur Bestimmung der überzähligen Größen $X_1 \dots X_4$ zu zerlegen, wird die Belastung in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten.

$$\text{Symmetrische Gruppe: } \begin{array}{|c|c|} \hline X_1 & X_3 \\ \hline \delta_{11} & \delta_{13} \\ \hline \delta_{31} & \delta_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \delta_{10} \\ \delta_{30} \end{array} \quad \text{Antisymmetrische Gruppe: } \begin{array}{|c|c|} \hline X_2 & X_4 \\ \hline \delta_{22} & \delta_{24} \\ \hline \delta_{42} & \delta_{44} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \delta_{20} \\ \delta_{40} \end{array}$$

2. Die Vorzahlen (Abb. 207):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 ds = 2r\pi; & \delta_{13} &= -2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} yr d\varphi = -4r, \\ \delta_{33} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y^2}{r^2} r d\varphi + 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{J_c}{F_c} r d\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^2 2r \frac{J_c}{F_c} = \pi r + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi}{r} + \frac{J_c}{F_c} \frac{8}{r}, \\ \delta_{22} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 r d\varphi + 2^2 \cdot 2r \frac{J_c}{F_c} = 2r(\pi + 4 \frac{J_c}{F_c}); & \delta_{24} &= -2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} yr d\varphi = -4r, \\ \delta_{44} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y^2}{r^2} r d\varphi + 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = \pi r + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi}{r}. \end{aligned}$$

3. Die Belastungszahlen für einen zur waagerechten Achse symmetrischen oder antisymmetrischen Wasserdruck p :

$$\begin{aligned} (1)\delta_{10} &= 0, & (1)\delta_{30} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} \cos \varphi pr \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = 4pr \frac{J_c}{F_c}, \\ (2)\delta_{20} &= 2 \cdot \frac{2}{3} p \frac{(2r)^2}{4} \cdot 2r \frac{J_c}{F_c}, & (2)\delta_{40} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \varphi \frac{1}{r} pr \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = 4pr \frac{J_c}{F_c}. \end{aligned}$$

4. Die überzähligen Größen sind nach den Ansätzen 1.:

$$\begin{aligned} (1)X_1 &= \frac{\delta_{10}\delta_{33} - \delta_{30}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2} = \frac{8pr \frac{J_c}{F_c}}{r(\pi^2 - 8) + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi^2}{r} + \frac{J_c}{F_c} 8 \frac{\pi}{r}}, \\ (1)X_3 &= \frac{\delta_{30}\delta_{11} - \delta_{10}\delta_{31}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2} = \frac{4p\pi r \frac{J_c}{F_c}}{r(\pi^2 - 8) + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi^2}{r} + \frac{J_c}{F_c} 8 \frac{\pi}{r}}, \\ (2)X_2 &= \frac{\delta_{20}\delta_{44} - \delta_{40}\delta_{24}}{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2} = pr \frac{\frac{4}{3} \pi \frac{J_c}{F_c} (r^2 + \frac{J_c}{F_c}) + 8 \frac{J_c}{F_c}}{\pi (4 \frac{J_c}{F_c} + \pi) (r + \frac{1}{r} \frac{J_c}{F_c}) - 8r}, \\ (2)X_4 &= \frac{\delta_{40}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{42}}{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2} = 4pr \frac{\frac{J_c}{F_c} (4 \frac{J_c}{F_c} + \pi) + \frac{4}{3} r^2 \frac{J_c}{F_c}}{\pi (4 \frac{J_c}{F_c} + \pi) (r + \frac{1}{r} \frac{J_c}{F_c}) - 8r}. \end{aligned}$$

5. Die Schnittkräfte aus der Füllung eines Abteils entstehen durch Überlagerung des symmetrischen und antisymmetrischen Anteils aus $p/2$. Daher ist bei Füllung beider Hälften des Behälters

$$M_a = M_b = M_c = M_d = X_1, \quad H_a = H_b = H_c = H_d = \frac{X_3}{r},$$

bei Füllung eines Abteils

$$M_a = M_b = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad M_c = M_d = \frac{X_1 - X_2}{2};$$

$$H_a = H_b = \frac{X_3 + X_4}{2r}; \quad H_c = H_d = \frac{X_3 - X_4}{2r}.$$

Die Abmessungen nach Abb. 208a liefern für $p = 6,0$ t/m folgendes Ergebnis:

$$J_c = \frac{0,15^3 \cdot 1,0}{12} = 0,000281 \text{ m}^4,$$

$$J_z = \frac{0,30^3 \cdot 1,0}{12} = 0,00225 \text{ m}^4,$$

$$F_c = 0,15 \cdot 1,0 = 0,15 \text{ m}^2,$$

$$F_z = 0,30 \cdot 1,0 = 0,30 \text{ m}^2,$$

$$J_c : J_z = 0,125,$$

$$J_c : F_c = 0,001873 \text{ m}^2,$$

$$J_c : F_z = 0,000936 \text{ m}^2,$$

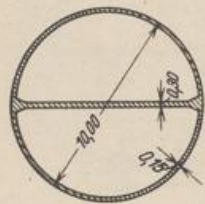


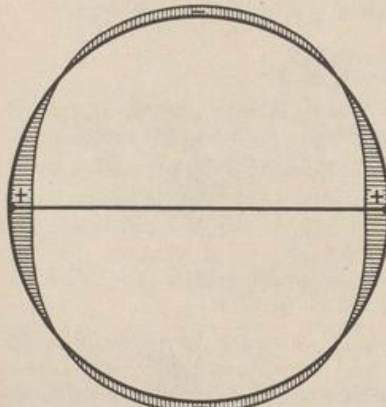
Abb. 208a.

$$X_1 = 8 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873}{5,0 (\pi^2 - 8) + 0,001873 \cdot \frac{\pi^2}{5,0} + 0,000936 \cdot \frac{8\pi}{5,0}} = 0,0478 \text{ mt},$$

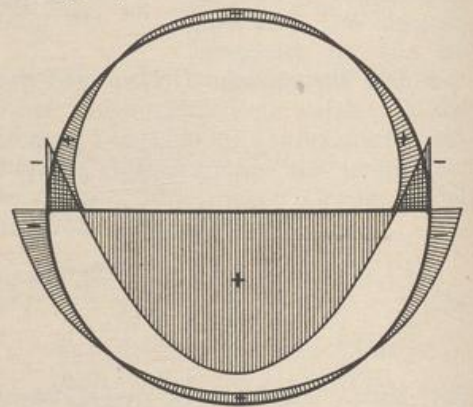
$$X_2 = 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{1,333\pi \cdot 0,125 (5,0^2 + 0,001873) + 8 \cdot 0,001873}{\pi (4 \cdot 0,125 + \pi) \left(5,0 + \frac{0,001873}{5,0} \right) - 8 \cdot 5,0} = 22,85 \text{ mt},$$

$$X_3 = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873 \cdot \pi}{5,0 (\pi^2 - 8) + 0,001873 \cdot \frac{\pi^2}{5,0} + 0,000936 \cdot \frac{8\pi}{5,0}} = 0,0751 \text{ mt},$$

$$X_4 = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873 (4 \cdot 0,125 + \pi) + 1,333 \cdot 5,0^2 \cdot 0,125}{\pi (4 \cdot 0,125 + \pi) \left(5,0 + \frac{0,001873}{5,0} \right) - 8 \cdot 5,0} = 29,15 \text{ mt}.$$



Füllung beider Kammern,
1 mt \equiv 66 2/3 mm.



Füllung einer Kammer,
1 mt \equiv 0,4 mm.

Abb. 208b. Biegemomente.

Statische Untersuchung eines Kühlturmunterbaues. Um auch die Bedeutung der mehrfachen Symmetrie eines Tragwerks für die Vereinfachung der statischen

Untersuchung zu zeigen, wird ein waagrecht liegendes Stabeck berechnet, dessen Knotenpunkte durch senkrechte, am unteren Ende eingespannte Pfosten frei drehbar gestützt sind. Das Tragwerk hat 24 statisch unbestimmte Schnittkräfte X_k , deren Abhängigkeit bei unregelmäßiger Gliederung des Stabwerks neungliedrige Elastizitätsgleichungen liefert (Abb. 209).

Da die Aufgabe hier für ein Tragwerk mit zyklischer Symmetrie gelöst werden soll, können alle Vorzahlen des Ansatzes aus den Biegemomenten M_{24}, M_1 des Hauptsystems Abb. 210 für $-X_{24} = 1, -X_1 = 1$ abgeleitet werden. Die Trägheitsmomente des Pfostens für die radial und tangential gerichteten Hauptachsen des Querschnitts sind J_r, J_t , die Trägheitsmomente des Ringstabes J_l .

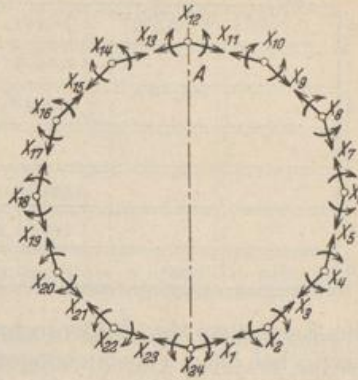


Abb. 209.

Um auch ähnliche Tragwerke mit anderen Abmessungen zu vergleichen, werden statt der EJ_c -fachen Verschiebungen δ'_{ik} Vorzahlen $\delta_{ik} = \frac{3}{h^3} \delta'_{ik}$ verwendet. Sie entstehen aus folgendem Ansatz:

$$\delta'_{24,24} = \dots \delta'_{22,22} = \frac{1,932^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_l} + 2 \frac{0,966^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_l} + 2 \frac{0,259^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_r} + 2 \frac{s^3}{3} \frac{J_c}{J_l},$$

$$\delta'_{23,23} = \dots \delta'_{21,21} = 2 \frac{0,259^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_l} + 2 \frac{0,966^2}{3} h^3 \frac{J_c}{J_r}, \quad \frac{3}{h^3} \delta'_{ik} = \delta_{ik}.$$

Geometrische Abmessungen des Tragwerks:

$$J_t = J_l = J_c \quad \text{und} \quad J_r = \frac{1}{4} J_c; \quad h = 12 \text{ m}, \quad s = 6,73 \text{ m}.$$

Vorzahlen der geometrischen Bedingungen $\delta_{24} = 0$ und $\delta_1 = 0$:

$$\delta_{24,24} = \delta_{2,2} = \dots = 1,932^2 + 2 \cdot 0,966^2 + 8 \cdot 0,259^2 + 2 \left(\frac{s}{h}\right)^3 = + 6,489,$$

$$\delta_{23,24} = \delta_{1,24} = 0,259 \cdot 1,932 - 0,259 \cdot 0,966 + 0,966 \cdot 0,259 \cdot 4 = + 1,25097,$$

$$\delta_{22,24} = \delta_{2,24} = -0,966 \cdot 1,932 - 1,932 \cdot 0,966 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{h}\right)^3 = - 3,64434,$$

$$\delta_{21,24} = \delta_{3,24} = -0,259 \cdot 0,966 - 4 \cdot 0,966 \cdot 0,259 = - 1,25097,$$

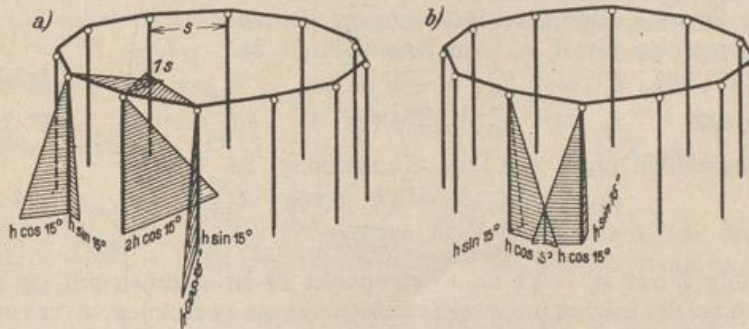
$$\delta_{20,24} = \delta_{4,24} = + 0,966^2 - 4 \cdot 0,259^2 = + 0,66484,$$

$$\delta_{23,23} = \delta_{1,1} = \dots = 2 \cdot 0,259^2 + 8 \cdot 0,966^2 = 7,6,$$

$$\delta_{1,24} = \delta_{1,2} = 1,932 \cdot 0,259 - 0,966 \cdot 0,259 + 4 \cdot 0,259 \cdot 0,966 = + 1,25097,$$

$$\delta_{1,23} = \delta_{1,3} = 0,259^2 - 4 \cdot 0,966^2 = - 3,66562,$$

$$\delta_{1,22} = \delta_{1,4} = -0,259 \cdot 0,966 - 0,259 \cdot 0,966 \cdot 4 = - 1,25097.$$



$-X_{24} = 1, M_{24}$,

$-X_1 = 1, M_1$.

Abb. 210. Momentenflächen im statisch bestimmten Hauptsystem.

Matrix der Vorzahlen δ_{ik} .

	X_{20}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_1	X_2	X_3
24	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 6,48900	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097
1			- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562
2			+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 6,48900	+ 1,25097
3					- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000
4					+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097
5							- 1,25097	- 3,66562
6							+ 0,66484	- 1,25097

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung wiederholen sich infolge der zyklischen Symmetrie bei allen Verschiebungen, deren Indizes gleichzeitig um ein Vielfaches von zwei erhöht sind.

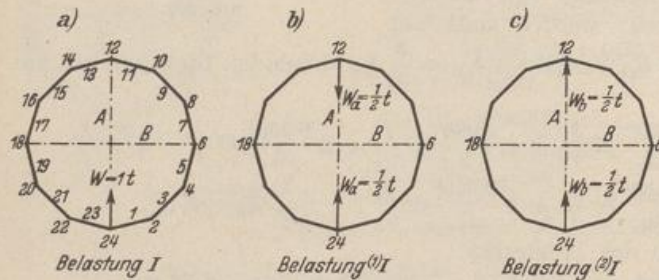


Abb. 211.

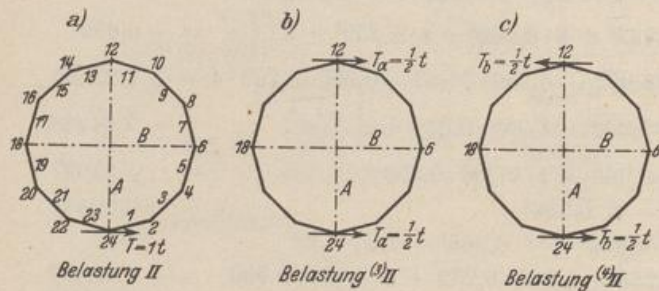


Abb. 212.

führt werden. Beide werden einzeln untersucht, um daraus durch Superposition die Lösung für eine allgemeine Belastung zu gewinnen.

Belastungszahlen für $W = 1$ im Knotenpunkt 24.

$$\delta'_{24,0} = -\frac{1}{3}h^3 \cdot 1,932, \quad \delta'_{1,0} = \delta'_{23,0} = -h^3 \cdot 0,259, \quad \delta'_{2,0} = \delta'_{22,0} = h^3 \cdot 0,966,$$

$$\delta_{24,0} = -1,932, \quad \delta_{1,0} = \delta_{23,0} = -0,777, \quad \delta_{2,0} = \delta_{22,0} = h^3 \cdot 2,898.$$

Belastungszahlen für $T = 1$ t im Knotenpunkt 24.

$$\delta'_{24,0} = 0, \quad \delta'_{1,0} = -\delta'_{23,0} = -4h^3 \cdot 0,966, \quad \delta'_{2,0} = -\delta'_{22,0} = -4h^3 \cdot 0,259,$$

$$\delta_{24,0} = 0, \quad \delta_{1,0} = -\delta_{23,0} = -11,592, \quad \delta_{2,0} = -\delta_{22,0} = -3,108.$$

Die Belastung I mit $W = 1$ t im Knotenpunkt 24 ist symmetrisch zur Achse A . Sie wird, um bei der Lösung mit zwei Symmetrieachsen zu rechnen, in die zur Achse B symmetrische Belastung $^{(1)}I$ mit $W_a = \frac{1}{2} t$ und in die zur Achse B antisymmetrische Belastung $^{(2)}I$ mit $W_b = \frac{1}{2} t$ in den Knoten 12 und 24 aufgespalten (Abb. 211).

Die Lasten sind waagrecht und werden nur in den Knoten des Stabecks eingetragen. Sie lassen sich daher nach der Winkelhalbierenden und einer dazu senkrechten Geraden, also in Richtung der Tangente an den umschriebenen Kreis zerlegen. Jede Belastung kann infolge der vorgeschriebenen zyklischen Symmetrie des Tragwerks auf die Wirkung der Kraft $W = 1$ t in Richtung der Winkelhalbierenden (Abb. 211a) und auf die Wirkung der Kraft $T = 1$ t in Richtung der Tangente (Abb. 212a) zurückge-

X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
+ 0,66484							24
- 1,25097							1
- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484					2
+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097					3
+ 6,48900	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484			4
+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097			5
- 3,64435	+ 1,25097	+ 6,48900	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	6

Die Belastung II mit $T = 1$ t am Knotenpunkt 24 ist antimetrisch zur Achse A . Sie wird, um bei der Lösung mit zwei Symmetrieachsen zu rechnen, in die zur Achse B symmetrische Belastung $^{(3)}II$ mit $T_a = \frac{1}{2}$ t und in die zur Achse B antimetrische Belastung $^{(4)}II$ mit $T_b = \frac{1}{2}$ t in den Knotenpunkten 12 und 24 aufgespalten (Abb. 212).

Darnach ist jede Teilbelastung zu zwei ausgezeichneten Achsen A, B des Tragwerks symmetrisch oder antimetrisch, so daß das Kräftebild nach (367) mit einer vierfachen Umordnung der zu den Achsen A, B zugeordneten Schnittkräfte, also mit den Gruppenlasten U, V, Y, Z beschrieben werden kann. Diese werden nach S. 205 mit der folgenden Tabelle als Funktionen der statisch unbestimmten Schnittkräfte X_k des allgemeinen Ansatzes entwickelt. Der Vordersatz enthält das Bildungsgesetz der Gruppenlasten, Vorzeichen und Belastungszahlen, der Nachsatz die Schnittkräfte X_k jeder Gruppenlast.

λ	μ	ν	τ							
U	V	Y	Z	24	1	2	3	4	5	6
+	+	+	+	X_{24}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
+	-	-	+	X_{12}	X_{11}	X_{10}	X_9	X_8	X_7	X_6
+	+	-	-	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}
+	-	+	-	X_{24}	X_{23}	X_{22}	X_{21}	X_{20}	X_{19}	X_{18}

1. Belastung $^{(1)}I$ mit zwei zu beiden Achsen A, B symmetrisch liegenden Kräften W_a in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 211 b). Die Belastungszahlen $\mu_{k0}, \nu_{k0}, \tau_{k0}$ sind Null. Dasselbe gilt daher auch von den Gruppenlasten V, Y, Z . Dagegen sind die Gruppenlasten $U_1 = \frac{1}{4}(X_1 + X_{11} + X_{13} + X_{23})$ usw. mit $\lambda_{1,0}$ usw. von Null verschieden. Hieraus folgt

$$U_1 = X_1 = X_{11} = X_{13} = X_{23}.$$

$$\text{Belastungszustand } -U_1 = 1 \text{ mit } -X_1 = -X_{11} = -X_{13} = -X_{23} = 1,$$

$$-U_{24} = 1 \text{ mit } -X_{24} = -X_{12} = 1.$$

Die Vorzeichen λ_{k1} der Matrix $^{(1)}I$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräftegruppe $-U_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-U_k = 1$ angeschrieben.

$$\begin{aligned} 1_1 \lambda_{1,1} &= 1 \delta_{(1+11+13+23)(1+11+13+23)} = 4(\delta_{1,1} + \delta_{1,11} + \delta_{1,13} + \delta_{1,23}) \\ &= 4(7,60000 + 0 + 0 - 3,66562) = 4 \cdot 3,93438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1_1 \lambda_{1,24} &= 1 \delta_{(1+11+13+23)(24+12)} = 2(\delta_{24,1} + \delta_{24,11} + \delta_{24,13} + \delta_{24,23}) \\
 &= 2(1,25097 + 0 + 0 + 1,25097) = 4 \cdot 1,25097, \\
 1_{24} \lambda_{24,24} &= 1 \delta_{(24+12)(24+12)} = 2 \delta_{24,24} = 2 \cdot 6,48900 = 4 \cdot 3,24450, \\
 1_1^{(1)} \lambda_{1,0} &= 1^{(1)} \delta_{(1+11+13+23)0} = 4^{(1)} \delta_{10} = 4(-0,3885).
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die Matrix für die Belastung $^{(1)}I$.

	U_{24}	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	
24	+ 3,24450	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	—	—	- 1,449
1	+ 1,25097	+ 3,93438	—	- 3,66562	- 1,25097	—	—	- 0,3885
2	- 3,64435	—	+ 7,15384	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	+ 1,449
3	- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097	
4	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 7,15384	—	- 3,64435	
5	—	—	- 1,25097	- 3,66562	—	+ 3,93438	+ 1,25097	
6	—	—	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 3,24450	

Die Matrix ist zur Nebendiagonale symmetrisch und wird ebenso wie nach S. 192 durch Addition und Subtraktion zugeordneter Gleichungen berechnet. Dabei entstehen mit

$$U_{24} + U_6 = S_1, \quad U_1 + U_5 = S_2, \quad U_2 + U_4 = S_3, \quad 2U_3 = S_4$$

und

$$U_{24} - U_6 = T_1, \quad U_1 - U_5 = T_2, \quad U_2 - U_4 = T_3$$

folgende Ansätze

	S_1	S_2	S_3	S_4	
1	+ 3,24450	+ 1,25097	- 2,97950	- 1,25097	- 1,4490
2	+ 1,25097	+ 3,93438	- 1,25097	- 3,66562	- 0,3885
3	- 2,97950	- 1,25097	+ 3,50950	+ 1,25097	+ 1,4490
4	- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 3,80000	

	T_1	T_2	T_3	
1	+ 3,24450	+ 1,25097	- 4,30918	- 1,4490
2	+ 1,25097	+ 3,93438	+ 1,25097	- 0,3885
3	- 4,30918	+ 1,25097	+ 10,79818	+ 1,4490

2. Belastung $^{(2)}I$ mit zwei zur Achse A symmetrischen und zur Achse B antisymmetrischen Kräften $W_b = \frac{1}{2} t$ in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 211c). Die Belastungszahlen λ_{k0} , μ_{k0} , τ_{k0} sind Null. Dasselbe gilt daher auch von den Gruppenlasten U, V, Z . Die Gruppenlasten $Y_1 = \frac{1}{4}(X_1 - X_{11} - X_{13} + X_{23})$ usw. sind mit ν_{10} usw. von Null verschieden. Hieraus folgt

$$Y_1 = +X_1 = -X_{11} = -X_{13} = +X_{23}.$$

Belastungszustand $-Y_1 = 1$ mit $-X_1 = 1, +X_{11} = 1, +X_{13} = 1, -X_{23} = 1,$
 $-Y_{24} = 1$ mit $-X_{24} = 1, +X_{12} = 1.$

Die Vorzahlen $v_{k\lambda}$ der Matrix $^{(2)}I$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräftegruppe $-Y_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-Y_\lambda = 1$ angeschrieben. Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
 I_1 v_{1,1} &= 1 \delta_{(1-11-13+23)(1-11-13+23)} = 4 (\delta_{1,1} - \delta_{1,11} - \delta_{1,13} + \delta_{1,23}) \\
 &= 4 (7,60000 - 0 - 0 - 3,66562) = 4 \cdot 3,93438, \\
 I_1 v_{1,24} &= 1 \delta_{(1-11-13+23)(24-12)} = 2 (\delta_{1,24} - \delta_{11,24} - \delta_{13,24} + \delta_{23,24}) \\
 &= 2 (1,25097 - 0 - 0 + 1,25097) = 4 \cdot 1,25097, \\
 I_{24} v_{24,24} &= 1 \delta_{(24-12)(24-12)} = 2 \delta_{24,24} = 2 \cdot 6,48900 = 4 \cdot 3,24450, \\
 I_1^{(2)} v_{1,0} &= 1^{(2)} \delta_{(1-11-13+23)0} = 4^{(2)} \delta_{10} = 4 (-0,3885), \\
 I_{24}^{(2)} v_{24,0} &= 1^{(2)} \delta_{(24-12)0} = 2^{(2)} \delta_{24,0} = 4 (-1,449).
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die folgende Matrix der Gruppenlasten Y_k .

	Y_{24}	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
24	+ 3,24450	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	-	- 1,449
1	+ 1,25097	+ 3,93438	-	- 3,66562	- 1,25097	-	- 0,3885
2	- 3,64435	-	+ 7,15384	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 1,449
3	- 1,25097	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	
4	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 5,82416	+ 2,50194	
5	-	-	- 1,25097	- 3,66562	+ 2,50194	+ 11,26562	

3. Belastung $^{(3)}II$ mit zwei zur Achse A antimetrischen zur Achse B symmetrischen Lasten $T_a = \frac{1}{2} t$ in den Knotenpunkten 24, 12 (Abb. 212b)

$$\begin{aligned}
 U = 0, \quad V = 0, \quad Y = 0, \quad Z_1 = \frac{1}{4} (X_1 + X_{11} - X_{13} - X_{23}) = 0, \\
 Z_1 = X_1 = X_{11} = -X_{13} = -X_{23}.
 \end{aligned}$$

Belastungszustand $-Z_1 = 1$ mit $-X_1 = 1, -X_{11} = 1, +X_{13} = 1, +X_{23} = 1,$
 Belastungszustand $-Z_6 = 1$ mit $-X_6 = 1, +X_{18} = 1.$

Die Vorzahlen $\tau_{k\lambda}$ der Matrix $^{(3)}II$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräftegruppe $-Z_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-Z_\lambda = 1$ angeschrieben. Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
 I_1 \tau_{1,1} &= 1 \delta_{(1+11-13-23)(1+11-13-23)} = 4 (\delta_{1,1} + \delta_{1,11} - \delta_{1,13} - \delta_{1,23}) \\
 &= 4 (7,60000 + 0 - 0 + 3,65562) = 4 \cdot 11,26562, \\
 I_1^{(3)} \tau_{1,0} &= 1 \delta_{(1+11-13-23)0} = 4^{(3)} \delta_{10} = 4 (-5,796).
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die Matrix für die Gruppenlasten Z_k der Belastung $^{(3)}II$

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	
1	+ 11,26562	+ 2,50194	- 3,66562	- 1,25097	—	—	- 5,796
2	+ 2,50194	+ 5,82416	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	+ 0,66484	- 1,554
3	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	- 1,25097	
4	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 7,15384	—	- 3,64435	
5	—	- 1,25097	- 3,66562	—	+ 3,93438	+ 1,25097	
6	—	+ 0,66484	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 3,24450	

4. Belastung $^{(4)}II$ mit zwei zu beiden Achsen A, B antimetrischen Kräften $T_b = \frac{1}{2} t$ in den Knotenpunkten $24, 12$ (Abb. 212c)

$$U = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad V_1 = \frac{1}{4}(X_1 - X_{11} + X_{13} - X_{23}) + 0,$$

$$V_1 = + X_1 = - X_{11} = + X_{13} = - X_{23},$$

Belastungszustand $-V_1 = 1$ mit $-X_1 = 1, +X_{11} = 1, -X_{13} = 1, +X_{23} = 1$. Die Vorzeichen μ_{kh} der Matrix $^{(4)}II$ werden nach S. 206 als Arbeit der virtuellen Kräfte $-V_k = 1$ bei einer Formänderung des Hauptsystems aus $-V_h = 1$ angeschrieben. Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned} 1_1 \mu_{1,1} &= 1 \delta_{(1-11+13-23)(1-11+13-23)} = 4(\delta_{1,1} - \delta_{1,11} + \delta_{1,13} - \delta_{1,23}) \\ &= 4(7,60000 - 0 + 0 + 3,66562) = 4 \cdot 11,26562, \end{aligned}$$

$$1_1^{(4)} \mu_{1,0} = 1 \delta_{(1-11+13-23)0} = 4^{(4)} \delta_{10} = 4(-5,796).$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung bilden, durch 4 geteilt, die Matrix für die Gruppenlasten V_k der Belastung $^{(4)}II$.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
1	+ 11,26562	+ 2,50194	- 3,66562	- 1,25097	—	- 5,796
2	+ 2,50194	+ 5,82416	+ 1,25097	- 3,64435	- 1,25097	- 1,554
3	- 3,66562	+ 1,25097	+ 7,60000	+ 1,25097	- 3,66562	
4	- 1,25097	- 3,64435	+ 1,25097	+ 5,82416	+ 2,50194	
5	—	- 1,25097	- 3,66562	+ 2,50194	+ 11,22562	

Die Ansätze $^{(2)}I, ^{(3)}II$ zur Berechnung der Gruppenlasten Y, Z lassen sich im vorliegenden Falle ineinander überführen, da die Achsen A und B miteinander vertauscht werden können.

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen der vier Gruppen bereitet bei Beachtung der Rechenvorschriften Abschnitt 29 keine Schwierigkeiten. Die Superposition der Teilergebnisse zur Bildung der statisch unbestimmten Schnittkräfte

