Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Das Hauptsystem mit einfacher Symmetrie

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Nutzen, um die Schnittkräfte für verschiedene Belastungen eines einzelnen Stabes $(h-1)$, h auf eine bekannte Belastung zu beziehen. Eine überzählige Größe X_k des Hauptsystems kann oft aus zwei Belastungszahlen nach (323) als

$$X_k = \beta_{k(h-1)}\,\delta_{(h-1)0} + \beta_{kh}\,\delta_{h0}$$

berechnet werden, so daß bei symmetrischer Stabform und symmetrischer oder antimetrischer Belastung

$$\delta_{(h-1)0} = \pm\delta_{h0} \quad \text{und} \quad X_k = \delta_{h0}\,(\beta_{k(h-1)} \pm \beta_{kh})\,.$$

Demnach ist für zwei verschiedene entweder symmetrische oder antimetrische Belastungsformen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$

$$X_{k,1} : X_{k,2} = \delta_{h0,1} : \delta_{h0,2}\,.$$

Die Schaubilder der Biegungsmomente eines Belastungsfalles (2) können damit auf die bekannten Biegungsmomente eines Belastungsfalles (1) bezogen werden. Hierfür wird der einfachste Fall, die gleichförmige Belastung, gewählt.

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Ansatzes sind erfüllt, wenn von dem Einfluß der Längs- und Querkräfte auf die Verschiebungen abgesehen wird und die Belastung des in A und B gelenkig angeschlossenen Stabes l_h in den benachbarten Stabteilen des statisch bestimmten Hauptsystems keine Biegungsmomente hervorruft. Die Komponenten $\delta_{(h-1)0}$, δ_{h0} bedeuten daher die relativen Verdrehungen der Endquerschnitte $(h-1)$, h des ausgezeichneten Stabes.

Die Verhältniszahlen sind für symmetrische Belastung mit $\delta_{h0,2} : \delta_{h0,1} = \mu_r R_r : \mu_k R_k$, für antimetrische Belastung mit $\delta_{h0,2} : \delta_{h0,1} = \nu_r R_r : \nu_k R_k$ nach Tabelle 17 für Stäbe mit konstantem Trägheitsmoment berechnet worden und in Tabelle 24 enthalten.

Gegeben ist die Schaulinie M_{mp} für eine gleichförmige Belastung des Stabes AB (Abb. 183a). Hieraus folgen die Momente M_{mP} (Abb. 183b) für die Belastung des Stabes AB durch Einzellasten:

$$\mu_7 = 1{,}5\,; \quad \mu_{13} = 6\cdot 0{,}16 = 0{,}96\,; \quad M_{mP} = \left(1{,}5\cdot\frac{2{,}0}{0{,}6\cdot 5{,}0} + 0{,}96\cdot\frac{2\cdot 1{,}0}{0.6\cdot 5{,}0}\right) M_{mp} = 1{,}64 M_{mp}\,.$$

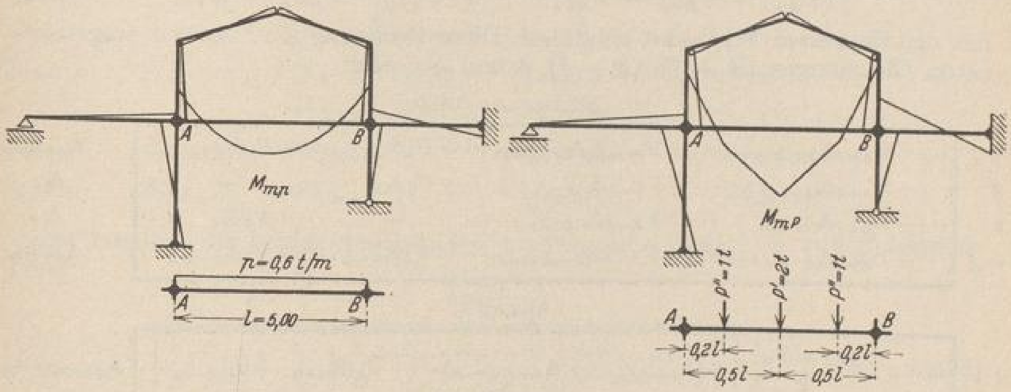

Abb. 183a und b.

28. Vereinfachung der Lösung bei Symmetrie des Hauptsystems.

Die Symmetrie des Hauptsystems setzt Symmetrie des Tragwerks voraus, deren Eigenschaften im allgemeinen bereits auf S. 185 dargelegt worden sind.

Das Hauptsystem mit einfacher Symmetrie. Von n statisch unbestimmten Schnittkräften Y_J wird in der Regel eine gerade Anzahl r symmetrisch zugeordnet sein. Der Rest $(n-r) = t$ gehört Querschnitten der Symmetrieachse an oder besteht aus Stütz- und Schnittkräften, deren Einheit im Hauptsystem ebenfalls symmetrische oder antimetrische Kräftebilder erzeugt. Statisch unbestimmte Biegungsmomente und Längskräfte in der Symmetrieachse des Hauptsystems liefern symmetrische, statisch unbestimmte Querkräfte antimetrische Spannungszustände. Die r symmetrisch zueinander liegenden, statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit $Y_A \dots Y_{A+J} \dots Y_{R-J} \dots Y_R$, die übrigen $(n - r) = t$ mit Z_b bezeichnet. Von diesen soll die Anzahl t' symmetrisch (U_h), die Anzahl t'' antimetrisch (V_k) sein $(t = t' + t'')$. Die symmetrischen Eigenschaften des Hauptsystems sind die Ursache folgender Beziehungen:

$$\delta_{AA} = \delta_{RR}, \quad \dots \delta_{(A+J)(A+J)} = \delta_{(R-J)(R-J)}, \quad \dots \delta_{A(A+J)} = \delta_{R(R-J)},$$
$$\delta_{(A+J)h} = \delta_{(R-J)h}, \quad \delta_{(A+J)k} = -\delta_{(R-J)k}.$$

Die Matrix ist daher auch zur Nebendiagonale symmetrisch oder antimetrisch. Dasselbe gilt von der konjugierten Matrix.

Zerlegung der Matrix und Bildung von Gruppenlasten. Werden je zwei der r Bedingungsgleichungen mit den Ordnungsnummern $(A + J)$, $(R - J)$ symmetrisch zueinander liegender Schnittkräfte addiert und subtrahiert, so entstehen zwei voneinander unabhängige Ansätze. Die Gleichungen α enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften U_h die Größen $(Y_A + Y_R) = X'_a$, $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$. Die Schnittkräfte V_k fallen aus. Die Gleichungen β enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften V_k die Größen $(Y_A - Y_R) = X'_r$, $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$. Die Schnittkräfte U_h fallen aus. Hierzu treten noch t' geometrische Bedingungen $\delta_h = 0$ mit den unbekannten Größen U_h, $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$ und t'' geometrische Bedingungen $\delta_k = 0$, welche nur V_k und $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$ enthalten. Die beiden Ansätze α und β zählen daher $(r/2 + t')$ und $(r/2 + t'')$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten.

Um die Aufspaltung der Matrix nach Abschnitt **34** vorzubereiten, werden die Glieder mit den Summen und Differenzen statisch unbestimmter Schnittkräfte mit der Zahl 2 erweitert, so daß daraus neue Unbekannte

$$\tfrac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X_{a+i}, \qquad \tfrac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X_{r-i} \tag{359}$$

mit den doppelten Vorzahlen entstehen. Diese Rechnung wird an vier ausgezeichneten Gleichungen $(A + J)$, $(R - J)$, h und k gezeigt.

Allgemeiner Ansatz.

$$\begin{array}{r|lllll|c}
A+J & \dots + Y_{A+J}\,\delta_{(A+J)(A+J)} & \dots + Y_{R-J}\,\delta_{(A+J)(R-J)} & \dots + U_h\,\delta_{(A+J)h} & \dots + V_k\,\delta_{(A+J)k} & \dots & \delta_{(A+J)0} \\
h & \dots + Y_{A+J}\,\delta_{h(A+J)} & \dots + Y_{R-J}\,\delta_{h(R-J)} & \dots + U_h\,\delta_{hh} & \dots \quad - & \dots & \delta_{h0} \\
k & \dots + Y_{A+J}\,\delta_{k(A+J)} & \dots + Y_{R-J}\,\delta_{k(R-J)} & \dots \quad - & \dots + V_k\,\delta_{kk} & \dots & \delta_{k0} \\
R-J & \dots + Y_{A+J}\,\delta_{(R-J)(A+J)} & \dots + Y_{R-J}\,\delta_{(R-J)(R-J)} & \dots + U_h\,\delta_{(R-J)h} & \dots + V_k\,\delta_{(R-J)k} & \dots & \delta_{(R-J)0}
\end{array}$$

Ansatz α.

$$\begin{array}{r|ll|c}
a+i & \dots + \dfrac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2}\, 2\,(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) \dots & + U_h\,(\delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)}) \dots & \delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} \\
h & \dots + \dfrac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2}\, 2\,\delta_{(A+J)h} \dots & \dots + U_h\,\delta_{hh} \dots & \delta_{h0}
\end{array}$$

Ansatz β.

$$\begin{array}{r|ll|c}
r-i & \dots + \dfrac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2}\, 2\,(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) \dots & + V_k\,(\delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)}) \dots & \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} \\
k & \dots + \dfrac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2}\, 2\,\delta_{(A+J)k} \dots & \dots + V_k\,\delta_{kk} \dots & \delta_{k0}
\end{array}$$