Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zerlegung der Matrix und Bildung von Gruppenlasten steht aus Stütz- und Schnittkräften, deren Einheit im Hauptsystem ebenfalls symmetrische oder antimetrische Kräftebilder erzeugt. Statisch unbestimmte Biegungsmomente und Längskräfte in der Symmetrieachse des Hauptsystems liefern symmetrische, statisch unbestimmte Querkräfte antimetrische Spannungszustände. Die r symmetrisch zueinander liegenden, statisch unbestimmten Schnittkräfte werden mit $Y_A \ldots Y_{A+J} \ldots Y_{R-J} \ldots Y_R$, die übrigen $(n-r)=t$ mit Z_b bezeichnet. Von diesen soll die Anzahl t' symmetrisch (U_h), die Anzahl t'' antimetrisch (V_k) sein $(t = t' + t'')$. Die symmetrischen Eigenschaften des Hauptsystems sind die Ursache folgender Beziehungen:

$$\delta_{AA} = \delta_{RR}, \quad \ldots \delta_{(A+J)(A+J)} = \delta_{(R-J)(R-J)}, \quad \ldots \delta_{A(A+J)} = \delta_{R(R-J)},$$
$$\delta_{(A+J)h} = \delta_{(R-J)h}, \qquad \delta_{(A+J)k} = -\delta_{(R-J)k}.$$

Die Matrix ist daher auch zur Nebendiagonale symmetrisch oder antimetrisch. Dasselbe gilt von der konjugierten Matrix.

Zerlegung der Matrix und Bildung von Gruppenlasten. Werden je zwei der r Bedingungsgleichungen mit den Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$ symmetrisch zueinander liegender Schnittkräfte addiert und subtrahiert, so entstehen zwei voneinander unabhängige Ansätze. Die Gleichungen α enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften U_h die Größen $(Y_A + Y_R) = X'_a$, $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$. Die Schnittkräfte V_k fallen aus. Die Gleichungen β enthalten neben den statisch unbestimmten Schnittkräften V_k die Größen $(Y_A - Y_R) = X'_r$, $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$. Die Schnittkräfte U_h fallen aus. Hierzu treten noch t' geometrische Bedingungen $\delta_h = 0$ mit den unbekannten Größen U_h, $(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X'_{a+i}$ und t'' geometrische Bedingungen $\delta_k = 0$, welche nur V_k und $(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X'_{r-i}$ enthalten. Die beiden Ansätze α und β zählen daher $(r/2 + t')$ und $(r/2 + t'')$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten.

Um die Aufspaltung der Matrix nach Abschnitt **34** vorzubereiten, werden die Glieder mit den Summen und Differenzen statisch unbestimmter Schnittkräfte mit der Zahl 2 erweitert, so daß daraus neue Unbekannte

$$\tfrac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = X_{a+i}, \qquad \tfrac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = X_{r-i} \tag{359}$$

mit den doppelten Vorzahlen entstehen. Diese Rechnung wird an vier ausgezeichneten Gleichungen $(A+J)$, $(R-J)$, h und k gezeigt.

Allgemeiner Ansatz.

$$\begin{array}{r|llll|l}
\hline
A+J & \cdots + Y_{A+J}\,\delta_{(A+J)(A+J)} & \cdots + Y_{R-J}\,\delta_{(A+J)(R-J)} & \cdots + U_h\,\delta_{(A+J)h} & \cdots + V_k\,\delta_{(A+J)k} \cdots & \delta_{(A+J)0} \\
h & \cdots + Y_{A+J}\,\delta_{h(A+J)} & \cdots + Y_{R-J}\,\delta_{h(R-J)} & \cdots + U_h\,\delta_{hh} \quad \cdots & - \quad \cdots & \delta_{h0} \\
k & \cdots + Y_{A+J}\,\delta_{k(A+J)} & \cdots + Y_{R-J}\,\delta_{k(R-J)} & \cdots \quad - & \cdots + V_k\,\delta_{kk} \quad \cdots & \delta_{k0} \\
R-J & \cdots + Y_{A+J}\,\delta_{(R-J)(A+J)} & \cdots + Y_{R-J}\,\delta_{(R-J)(R-J)} & \cdots + U_h\,\delta_{(R-J)h} & \cdots + V_k\,\delta_{(R-J)k} \cdots & \delta_{(R-J)0} \\
\hline
\end{array}$$

Ansatz α.

$$\begin{array}{r|ll|l}
\hline
a+i & \cdots + \dfrac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2}\, 2\,(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) \cdots & + U_h\,(\delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)}) \cdots & \delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} \\
h & \cdots + \dfrac{Y_{A+J} + Y_{R-J}}{2}\, 2\,\delta_{(A+J)h} \cdots & \cdots + U_h\,\delta_{hh} \quad \cdots & \delta_{h0} \\
\hline
\end{array}$$

Ansatz β.

$$\begin{array}{r|ll|l}
\hline
r-i & \cdots + \dfrac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2}\, 2\,(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) \cdots & + V_k\,(\delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)}) \cdots & \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} \\
k & \cdots + \dfrac{Y_{A+J} - Y_{R-J}}{2}\, 2\,\delta_{(A+J)k} \cdots & \cdots + V_k\,\delta_{kk} \quad \cdots & \delta_{k0} \\
\hline
\end{array}$$

Die Verwendung der halben Summe und der halben Differenz zweier zueinander symmetrisch liegender, statisch unbestimmter Schnittkräfte nach (359) bedeutet mechanisch die Erweiterung der statisch unbestimmten Schnittkraft zur statisch unbestimmten Gruppenlast und damit zu einer statisch überzähligen Größe allgemeiner Art. Diese sind ebenfalls unabhängig voneinander, so daß bei der Ableitung beliebiger Schnittkräfte und Verschiebungen auf die Superposition über die Beziehung

$$Y_{A+J} = X_{a+i} + X_{r-i}, \qquad Y_{R-J} = X_{a+i} - X_{r-i}$$

verzichtet und dafür folgender Ansatz verwendet werden kann:

$$\left.\begin{aligned} M_H &= M_{H_0} - \sum (M_{H(a+i)} X_{a+i} + M_{H(r-i)} X_{r-i} + M_{Hh} U_h + M_{Hk} V_k), \\ \delta_H &= \delta_{H_0} - \sum (\delta_{H(a+i)} X_{a+i} + \delta_{H(r-i)} X_{r-i} + \delta_{Hh} U_h + \delta_{Hk} V_k). \end{aligned}\right\} \quad (360)$$

$M_{H(a+i)}$, $\delta_{H(a+i)}$ bedeuten im Hauptsystem die auf den Querschnitt H bezogene Schnittkraft und die relative Verschiebung der Querschnitte H infolge von $-X_{a+i} = 1$. Alle anderen überzähligen Größen sind dabei Null. Der Belastungszustand

$$-X_{a+i} = -\tfrac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = 1, \quad -X_{r-i} = -\tfrac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = 0 \text{ usw.}$$

besteht aus den Schnittkräften

$$-Y_{A+J} = 1, \quad -Y_{R-J} = 1, \qquad (361\,\text{a})$$

der Belastungszustand

$$-X_{r-i} = -\tfrac{1}{2}(Y_{A+J} - Y_{R-J}) = 1, \quad -X_{a+i} = -\tfrac{1}{2}(Y_{A+J} + Y_{R-J}) = 0 \text{ usw.}$$

aus den Schnittkräften

$$-Y_{A+J} = 1, \quad +Y_{R-J} = 1. \qquad (361\,\text{b})$$

Die Vorzahlen der Gleichungen α und β werden aus der Arbeit einer virtuellen Belastung entwickelt:

$$\begin{aligned} 2(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) &= 1_{A+J}(\delta_{(A+J)(A+J)} + \delta_{(A+J)(R-J)}) + 1_{R-J}(\delta_{(R-J)(R-J)} + \delta_{(R-J)(A+J)}) \\ &= 1_{A+J}\,\delta_{(A+J)(a+i)} + 1_{R-J}\,\delta_{(R-J)(a+i)} = 1_{a+i}\,\delta_{(a+i)(a+i)}, \\ 2(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) &= 1_{A+J}(\delta_{(A+J)(A+J)} - \delta_{(A+J)(R-J)}) - 1_{R-J}(\delta_{(R-J)(A+J)} - \delta_{(R-J)(R-J)}) \\ &= 1_{A+J}\,\delta_{(A+J)(r-i)} - 1_{R-J}\,\delta_{(R-J)(r-i)} = 1_{r-i}\,\delta_{(r-i)(r-i)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{h(A+J)} + \delta_{h(R-J)} &= \delta_{h(a+i)} = 1_{a+i}\,\delta_{(a+i)h} = 2\delta_{(A+J)h}, \\ \delta_{k(A+J)} - \delta_{k(R-J)} &= \delta_{k(r-i)} = 1_{r-i}\,\delta_{(r-i)k} = 2\delta_{(A+J)k}. \end{aligned}$$

Damit erhalten die beiden voneinander unabhängigen Ansätze α und β folgende Form:

Ansatz α.

$$\boxed{\begin{matrix} X_a\,\delta_{(a+i)a} \cdots + X_{a+i}\,\delta_{(a+i)(a+i)} \cdots + U_h\,\delta_{(a+i)h} \cdots \\ X_a\,\delta_{ha} \quad \cdots + X_{a+i}\,\delta_{h(a+i)} \quad \cdots + U_h\,\delta_{hh} \quad \cdots \end{matrix}} \quad \begin{matrix} \delta_{(a+i)0}, \\ \delta_{h0}. \end{matrix} \qquad (362\,\text{a})$$

Ansatz β.

$$\boxed{\begin{matrix} X_r\,\delta_{(r-i)r} \cdots + X_{r-i}\,\delta_{(r-i)(r-i)} \cdots + V_k\,\delta_{(r-i)k} \cdots \\ X_r\,\delta_{kr} \quad \cdots + X_{r-i}\,\delta_{k(r-i)} \quad \cdots + V_k\,\delta_{kk} \quad \cdots \end{matrix}} \quad \begin{matrix} \delta_{(r-i)0}, \\ \delta_{k0}. \end{matrix} \qquad (362\,\text{b})$$

Diese Gleichungen können nach dem Prinzip von Castigliano (S. 163) auch unmittelbar angeschrieben werden. Die virtuelle Belastung besteht dabei aus den Teilkräften eines der Belastungszustände $-X_a = 1, \cdots - X_{a+i} = 1, \cdots - X_r = 1, \cdots - X_{r-i} = 1.$

Da die relativen Verschiebungen δ_{A+J} und δ_{R-J} des Hauptsystems aus den äußeren Ursachen und den überzähligen Größen X_k Null sind, ist in Verbindung mit (361)

$$1_{a+i}\,\delta_{a+i} = 1_{A+J}\,\delta_{A+J} + 1_{R-J}\,\delta_{R-J} = 0\,.$$

$$\alpha)\quad \delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} - \sum(\delta_{(A+J)a} + \delta_{(R-J)a})\,X_a - \sum(\delta_{(A+J)h} + \delta_{(R-J)h})\,U_h = 0,$$

$$\delta_{(a+i)0} - \sum\delta_{(a+i)a}\,X_a - \sum\delta_{(a+i)h}\,U_h = 0;\quad a = 1\ldots.\qquad h = 1\ldots t'.$$

$$1_{r-i}\,\delta_{r-i} = 1_{A+J}\,\delta_{A+J} - 1_{R-J}\,\delta_{R-J} = 0\,.$$

$$\beta)\quad \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} - \sum(\delta_{(A-J)r} - \delta_{(R-J)r})\,X_r - \sum(\delta_{(A+J)k} - \delta_{(R-J)k})\,V_k = 0.$$

$$\delta_{(r-i)0} - \sum\delta_{(r-i)r}\,X_r - \sum\delta_{(r-i)k}\,V_k = 0;\qquad r = 1\ldots.\qquad k = 1\ldots t''.$$

Die Belastungsglieder bei Symmetrie der Matrix. Die Belastungsglieder der beiden Ansätze α und β (S. 192) entstehen durch Addition und Subtraktion der Bedingungsgleichungen mit den symmetrischen Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$

$$\delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} = \delta_{(a+i)0};\quad \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} = \delta_{(r-i)0}\,.$$

Bei symmetrischer Belastung ist $\delta_{(A+J)0} = \delta_{(R-J)0}$, $\delta_{(r-i)0} = \delta_{k0} = 0$; die Gleichungen β sind daher homogen, so daß

$$X_{r-i} = 0\,,\qquad V_k = 0\quad\text{und}\quad X_{a+i} = Y_{A+J} = Y_{R-J}\,. \tag{363}$$

Bei Antimetrie der Belastung wird $\delta_{(A+J)0} = -\,\delta_{(R-J)0}$, also $\delta_{(a+i)0} = \delta_{h0} = 0$, so daß die Gleichungen α homogen sind. Daher wird jetzt

$$X_{a+i} = 0\,,\qquad U_h = 0\quad\text{und}\quad X_{r-i} = Y_{A+J} = -\,Y_{R-J}\,. \tag{364}$$

Diese Lösung trifft bei Verwendung von unsymmetrisch liegenden Stütz- oder Schnittkräften W'_H mit symmetrischem oder antimetrischem Kräftebild nicht immer zu, so daß diese oft in ein statisch unbestimmtes Hauptsystem einbezogen werden. Ist W''_H die zur statisch unbestimmten Stütz- oder Schnittkraft symmetrisch liegende Größe, so werden zweckmäßiger von vornherein Gruppenlasten

$$\overline{W}'_h = \frac{W'_H + W''_H}{2}\qquad \overline{W}''_h = \frac{W'_H - W''_H}{2} \tag{365}$$

gebildet, von denen dann stets die eine oder andere bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung Null ist.

Um diese übersichtliche Lösung auch bei einer beliebigen Belastung $\mathfrak{P}$ anschreiben zu können, wird diese nach S. 186 durch Belastungsumordnung in einen symmetrischen Anteil ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ und in einen antimetrischen Anteil ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ so zerlegt, daß

$$\mathfrak{P} = ({}^{(1)}\mathfrak{P} + {}^{(2)}\mathfrak{P}).$$

In der statischen Untersuchung des Tragwerks für ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ erscheinen dann allein die überzähligen Größen X_a, X_{a+i} und die symmetrischen Kräfte U_h, in der statischen Untersuchung des Tragwerks für ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ nur die überzähligen Größen X_r, X_{r-i} und die antimetrischen Kräfte V_k. Jedem Lastanteil wird zur Vereinfachung der Rechnung ein der Eigenart der Belastung ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ oder ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ entsprechendes Hauptsystem zugeordnet.

Der symmetrische Anteil ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ liefert

$$\left.\begin{array}{l} {}^{(1)}X_{r-i} = 0\,,\qquad {}^{(1)}X_{a+i} = {}^{(1)}Y_{A+J} = {}^{(1)}Y_{R-J}\,, \\ \text{der antimetrische Anteil } {}^{(2)}\mathfrak{P} \\ {}^{(2)}X_{a+i} = 0\,,\qquad {}^{(2)}X_{r-i} = {}^{(2)}Y_{A+J} = -\,{}^{(2)}Y_{R-J}\,. \end{array}\right\} \tag{366}$$