Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Die Belastungsglieder bei Symmetrie der Matrix

Da die relativen Verschiebungen δ_{A+J} und δ_{R-J} des Hauptsystems aus den äußeren Ursachen und den überzähligen Größen X_k Null sind, ist in Verbindung mit (361)

$$1_{a+i}\,\delta_{a+i} = 1_{A+J}\,\delta_{A+J} + 1_{R-J}\,\delta_{R-J} = 0\,.$$

$$\alpha)\quad \delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} - \sum(\delta_{(A+J)a} + \delta_{(R-J)a})\,X_a - \sum(\delta_{(A+J)h} + \delta_{(R-J)h})\,U_h = 0,$$

$$\delta_{(a+i)0} - \sum\delta_{(a+i)a}\,X_a - \sum\delta_{(a+i)h}\,U_h = 0;\quad a = 1\ldots.\qquad h = 1\ldots t'.$$

$$1_{r-i}\,\delta_{r-i} = 1_{A+J}\,\delta_{A+J} - 1_{R-J}\,\delta_{R-J} = 0\,.$$

$$\beta)\quad \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} - \sum(\delta_{(A-J)r} - \delta_{(R-J)r})\,X_r - \sum(\delta_{(A+J)k} - \delta_{(R-J)k})\,V_k = 0.$$

$$\delta_{(r-i)0} - \sum\delta_{(r-i)r}\,X_r - \sum\delta_{(r-i)k}\,V_k = 0;\qquad r = 1\ldots.\qquad k = 1\ldots t''.$$

Die Belastungsglieder bei Symmetrie der Matrix. Die Belastungsglieder der beiden Ansätze α und β (S. 192) entstehen durch Addition und Subtraktion der Bedingungsgleichungen mit den symmetrischen Ordnungsnummern $(A+J)$, $(R-J)$

$$\delta_{(A+J)0} + \delta_{(R-J)0} = \delta_{(a+i)0};\quad \delta_{(A+J)0} - \delta_{(R-J)0} = \delta_{(r-i)0}\,.$$

Bei symmetrischer Belastung ist $\delta_{(A+J)0} = \delta_{(R-J)0}$, $\delta_{(r-i)0} = \delta_{k0} = 0$; die Gleichungen β sind daher homogen, so daß

$$X_{r-i} = 0\,,\qquad V_k = 0\quad\text{und}\quad X_{a+i} = Y_{A+J} = Y_{R-J}\,. \tag{363}$$

Bei Antimetrie der Belastung wird $\delta_{(A+J)0} = -\,\delta_{(R-J)0}$, also $\delta_{(a+i)0} = \delta_{h0} = 0$, so daß die Gleichungen α homogen sind. Daher wird jetzt

$$X_{a+i} = 0\,,\qquad U_h = 0\quad\text{und}\quad X_{r-i} = Y_{A+J} = -\,Y_{R-J}\,. \tag{364}$$

Diese Lösung trifft bei Verwendung von unsymmetrisch liegenden Stütz- oder Schnittkräften W'_H mit symmetrischem oder antimetrischem Kräftebild nicht immer zu, so daß diese oft in ein statisch unbestimmtes Hauptsystem einbezogen werden. Ist W''_H die zur statisch unbestimmten Stütz- oder Schnittkraft symmetrisch liegende Größe, so werden zweckmäßiger von vornherein Gruppenlasten

$$\overline{W}'_h = \frac{W'_H + W''_H}{2}\qquad \overline{W}''_h = \frac{W'_H - W''_H}{2} \tag{365}$$

gebildet, von denen dann stets die eine oder andere bei Symmetrie oder Antimetrie der Belastung Null ist.

Um diese übersichtliche Lösung auch bei einer beliebigen Belastung $\mathfrak{P}$ anschreiben zu können, wird diese nach S. 186 durch Belastungsumordnung in einen symmetrischen Anteil ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ und in einen antimetrischen Anteil ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ so zerlegt, daß

$$\mathfrak{P} = ({}^{(1)}\mathfrak{P} + {}^{(2)}\mathfrak{P}).$$

In der statischen Untersuchung des Tragwerks für ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ erscheinen dann allein die überzähligen Größen X_a, X_{a+i} und die symmetrischen Kräfte U_h, in der statischen Untersuchung des Tragwerks für ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ nur die überzähligen Größen X_r, X_{r-i} und die antimetrischen Kräfte V_k. Jedem Lastanteil wird zur Vereinfachung der Rechnung ein der Eigenart der Belastung ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ oder ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ entsprechendes Hauptsystem zugeordnet.

Der symmetrische Anteil ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ liefert

$${}^{(1)}X_{r-i} = 0\,,\qquad {}^{(1)}X_{a+i} = {}^{(1)}Y_{A+J} = {}^{(1)}Y_{R-J}\,,$$

der antimetrische Anteil ${}^{(2)}\mathfrak{P}$

$${}^{(2)}X_{a+i} = 0\,,\qquad {}^{(2)}X_{r-i} = {}^{(2)}Y_{A+J} = -\,{}^{(2)}Y_{R-J}\,. \tag{366}$$

die Superposition von ${}^{(1)}\mathfrak{P}$ und ${}^{(2)}\mathfrak{P}$ daher

$$Y_{A+J} = {}^{(1)}Y_{A+J} + {}^{(2)}Y_{A+J}, \qquad Y_{R-J} = {}^{(1)}Y_{R-J} + {}^{(2)}Y_{R-J}.$$

Schnittkraft $M = {}^{(1)}M + {}^{(2)}M$ usw.

Anwendungen. a) Durchgehender Träger auf 4 Stützen in symmetrischer Anordnung (Abb. 184a). Das Tragwerk ist zweifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem a (Abb. 184b): Träger auf zwei Stützen. Überzählige Größen sind die Stützkräfte $X_a \equiv Y_A$, $X_b \equiv Y_B$, so daß $\delta_{aa} = \delta_{bb}$.

Hauptsystem b (Abb. 184e): Drei einzelne Träger. Überzählige Größen sind die Stützenmomente $X_a \equiv Y_A$, $X_b \equiv Y_B$, so daß ebenfalls $\delta_{aa} = \delta_{bb}$.

Umformung des Ansatzes nach (359):

$$X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = \delta_{a0},$$
$$X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = \delta_{b0};$$
$$\frac{X_a + X_b}{2} 2(\delta_{aa} + \delta_{ab}) = \delta_{a0} + \delta_{b0},$$
$$\frac{X_a - X_b}{2} 2(\delta_{aa} - \delta_{ab}) = \delta_{a0} - \delta_{b0};$$
$$X_1 \delta_{11} = \delta_{10}, \qquad X_2 \delta_{22} = \delta_{20}.$$

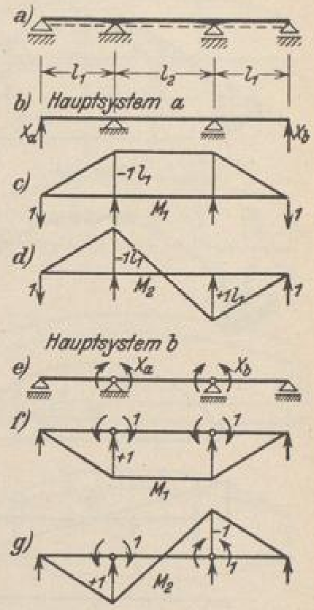

Abb. 184.

Belastungszustand $-X_1 = 1$: $-X_a = 1$, $-X_b = 1$, Schnittkräfte M_1;

Belastungszustand $-X_2 = 1$: $-X_a = 1$, $+X_b = 1$, Schnittkräfte M_2.

Symmetrische Belastung: $X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b$, $X_2 = 0$.

Antimetrische Belastung: $X_1 = 0$, $X_2 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b$.

Schnittkraft aus der Superposition: $M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2$.

b) Beiderseits elastisch eingespannter Bogenträger in symmetrischer Anordnung (Abb. 185). Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem a. Träger auf zwei Stützen (Abb. 186a). Die Einspannungsmomente X_a, X_b und die Längskraft X_c im Bogenscheitel sind statisch unbestimmte Schnittkräfte.

Überzählige Größen:

$$X_1 = X_c; \qquad -X_1 = 1, \quad M = M_1,$$
$$X_2 = \frac{X_a - X_b}{2}; \qquad -X_2 = 1{:}\ \ -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_2,$$
$$X_3 = \frac{X_a + X_b}{2}; \qquad -X_3 = 1{:}\ \ -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_3.$$

Die Schnittkräfte aus $-X_1 = 1$ und $-X_3 = 1$ sind symmetrisch, die Schnittkräfte aus $-X_2 = 1$ antimetrisch. Daher $\delta_{12} = \delta_{23} = 0$.

X_1	X_2	X_3	
δ_{11}		δ_{13}	δ_{10}
	δ_{22}		δ_{20}
δ_{31}		δ_{33}	δ_{30}