



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

Anwendungen

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

die Superposition von <sup>(1)</sup>ϑ und <sup>(2)</sup>ϑ daher

$$Y_{A+J} = {}^{(1)}Y_{A+J} + {}^{(2)}Y_{A+J}, \quad Y_{R-J} = {}^{(1)}Y_{R-J} + {}^{(2)}Y_{R-J}.$$

Schnittkraft  $M = {}^{(1)}M + {}^{(2)}M$  usw.

**Anwendungen.** a) Durchgehender Träger auf 4 Stützen in symmetrischer Anordnung (Abb. 184a). Das Tragwerk ist zweifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem *a* (Abb. 184b): Träger auf zwei Stützen. Überzählige Größen sind die Stützkkräfte  $X_a \equiv Y_A$ ,  $X_b \equiv Y_B$ , so daß  $\delta_{aa} = \delta_{bb}$ .

Hauptsystem *b* (Abb. 184e): Drei einzelne Träger. Überzählige Größen sind die Stützenmomente  $X_a \equiv Y_A$ ,  $X_b \equiv Y_B$ , so daß ebenfalls  $\delta_{aa} = \delta_{bb}$ .

Umformung des Ansatzes nach (359):

$$X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = \delta_{a0},$$

$$X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = \delta_{b0};$$

$$\frac{X_a + X_b}{2} 2(\delta_{aa} + \delta_{ab}) = \delta_{a0} + \delta_{b0},$$

$$\frac{X_a - X_b}{2} 2(\delta_{aa} - \delta_{ab}) = \delta_{a0} - \delta_{b0};$$

$$X_1 \delta_{11} = \delta_{10}, \quad X_2 \delta_{22} = \delta_{20}.$$

Belastungszustand  $-X_1 = 1$ :  $-X_a = 1, \quad -X_b = 1,$

Schnittkräfte  $M_1$ ;

Belastungszustand  $-X_2 = 1$ :  $-X_a = 1, \quad +X_b = 1,$  Schnittkräfte  $M_2$ .

Symmetrische Belastung:  $X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b, \quad X_2 = 0.$

Antimetrische Belastung:  $X_1 = 0, \quad X_2 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b.$

Schnittkraft aus der Superposition:  $M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2.$

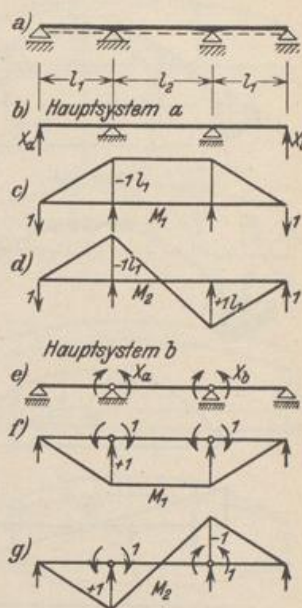


Abb. 184.

b) Beiderseits elastisch eingespannter Bogenträger in symmetrischer Anordnung (Abb. 185). Das Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt.

Hauptsystem *a*. Träger auf zwei Stützen (Abb. 186a). Die Einspannungsmomente  $X_a, X_b$  und die Längskraft  $X_c$  im Bogenscheitel sind statisch unbestimmte Schnittkräfte.

Überzählige Größen:

$$X_1 = X_c; \quad -X_1 = 1, \quad M = M_1,$$

$$X_2 = \frac{X_a - X_b}{2}; \quad -X_2 = 1: \quad -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_2,$$

$$X_3 = \frac{X_a + X_b}{2}; \quad -X_3 = 1: \quad -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_3.$$

Die Schnittkräfte aus  $-X_1 = 1$  und  $-X_3 = 1$  sind symmetrisch, die Schnittkräfte aus  $-X_2 = 1$  antimetrisch. Daher  $\delta_{12} = \delta_{23} = 0.$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	
$\delta_{11}$			$\delta_{13}$	$\delta_{10}$
		$\delta_{22}$		$\delta_{20}$
$\delta_{31}$			$\delta_{33}$	$\delta_{30}$

Symmetrische Belastung:

$${}^{(1)}M_0; \quad {}^{(1)}X_1 \neq 0, \quad {}^{(1)}X_2 = 0, \quad {}^{(1)}X_3 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b \neq 0.$$

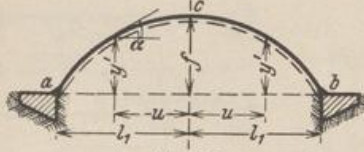


Abb. 185.

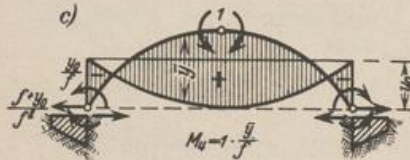
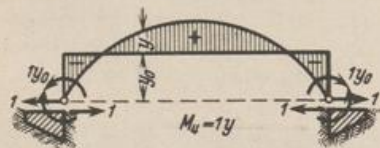
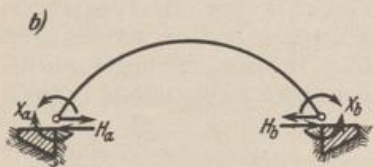
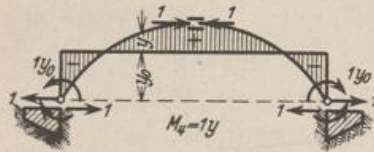
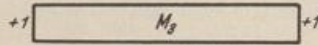
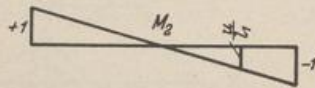
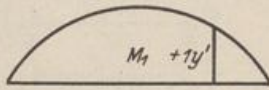


Abb. 186.

Kräftepaare  $X_1 y_0$  in  $a$  und  $b$ . Die Ansatz und Ergebnis wie in Lösung (a).

Antimetrische Belastung:

$${}^{(2)}M_0; \quad {}^{(2)}X_1 = 0, \quad {}^{(2)}X_3 = 0,$$

$${}^{(2)}X_2 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b \neq 0,$$

$$M_0 = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0,$$

$$M = M_0 - X_1 M_1 - X_2 M_2 - X_3 M_3$$

$$= M_0 - X_1 y' + X_2 \frac{u}{l_1} - X_3,$$

$$N = N_0 - X_1 \cos \alpha - X_2 \sin \alpha.$$

Die statisch unbestimmte Längskraft  $X_c = X_1$  des symmetrischen Anteils des Ansatzes läßt sich außerdem noch durch einen Anteil der Gruppenlast  $X_3$  in Gestalt zweier Momente  $X_1 y_0$  in  $a$  und  $b$  derart zu einer Gruppenlast  $X_4$  ergänzen, daß diese im Gegensatz zu  $X_1$  unabhängig von  $X_3$  berechnet werden kann. Die Bedingung ist hierfür  $1_3 \delta_{34} = 0$ . Gruppenlast  $-X_4 = 1: -X_1 = 1, +X_3 = 1 y_0$ .

$$1_3 \delta_{34} = \delta_{31} - y_0 \delta_{33} = 0$$

(starre Einspannung),

$$1_3 \delta_{34} = \delta_{31} - 2 \varepsilon_{31} - y_0 \delta_{33} - 2 y_0 \varepsilon_{33} = 0$$

(elastische Einspannung).

$\varepsilon_{33}, \varepsilon_{31}$  sind die  $EJ_c$ fachen Drehwinkel des Widerlagers infolge eines Momentes von der Größe 1 oder einer waagerechten Kraft 1 in  $a$  oder  $b$ .

$$y_0 = \frac{\int y' \frac{J^e}{J} ds - 2 \varepsilon_{31}}{\int \frac{J^e}{J} ds + 2 \varepsilon_{33}};$$

$X_2, X_3, X_4$  nach (465).

Hauptsystem  $b$  (Abb. 186b). Die Längskraft  $N_c = X_c$  im Scheitel wird durch die statisch unbestimmte Schnittkraft  $H_b$  am Kämpfer ersetzt. Als überzählige Größen werden außer  $X_2$  und  $X_3$  nach Lösung (a) die Gruppenlasten  $X_1 = 1/2 (H_a + H_b)$  und  $X_1^* = 1/2 (H_a - H_b)$  verwendet. Von diesen ist  $X_1^*$  statisch bestimmt und bei symmetrischer Belastung Null. Bei antimetrischer Belastung ist  $H_a = -H_b$ .

Die beiden symmetrischen überzähligen Größen  $X_1, X_3$  werden auch hier durch Erweiterung von  $X_1$  zu einer symmetrischen Gruppenlast  $X_4$  unabhängig voneinander. Diese besteht aus  $X_1$  und einem Anteil von  $X_3$  in Gestalt zweier Kräftepaare  $X_1 y_0$  in  $a$  und  $b$ . Die Strecken  $y_0$  wird derart bestimmt, daß  $\delta_{43} = 0$ .

Hauptsystem *c* (Abb. 186c). An Stelle der Längskraft  $N_c$  dient das Biegemoment  $M_c = X_1$  im Bogenscheitel als statisch unbestimmte Schnittkraft. Das Hauptsystem ist dann ein Dreigelenkträger mit  $X_1$  und den Gruppenlasten  $X_2, X_3$  nach (a) als überzähligen Größen. Der Ansatz erhält wiederum die in (a) angegebene Form. Auch hier kann der symmetrische Teil durch die Ergänzung von  $X_1$  zu einer Gruppenlast  $X_4$  in zwei voneinander unabhängige Gleichungen zerlegt werden, die aus  $X_1$  und zwei Momenten  $\frac{y_0}{l} X_1$  besteht. Die Strecke  $y_0$  wird aus der Bedingung  $\delta_{34} = 0$  berechnet.

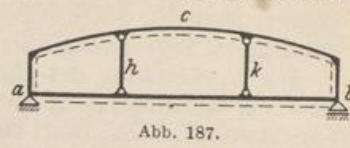


Abb. 187.

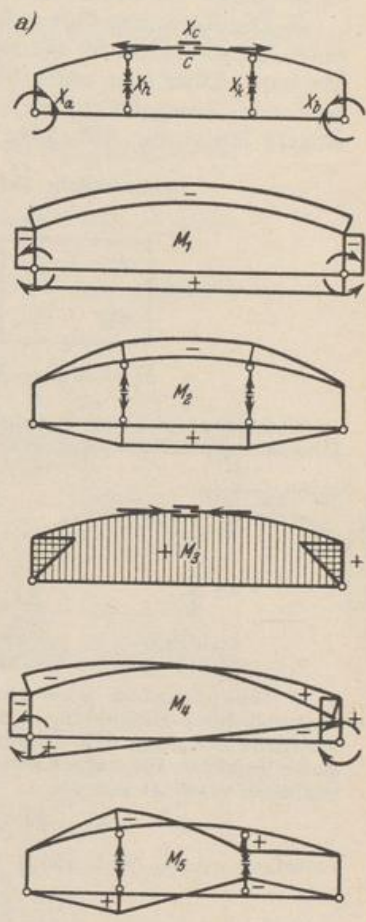
c) Geschlossener Dachrahmen mit Hängestangen in symmetrischer Anordnung (Abb. 187). 1. Statisch bestimmtes Hauptsystem nach Abb. 188a:

Zwei übereinander liegende Balkenträger. Als statisch unbestimmte Schnittkräfte werden die Längskräfte in *c, h* und *k* und die Biegemomente in *a* und *b* verwendet.

Symmetrische überzählige Größen:  
 $X_1 = \frac{1}{2}(X_a + X_b), \quad X_2 = \frac{1}{2}(X_h + X_k), \quad X_3 = X_c.$

Antimetrische überzählige Größen:  
 $X_4 = \frac{1}{2}(X_a - X_b), \quad X_5 = \frac{1}{2}(X_h - X_k).$

Belastungszustände:  $-X_3 = 1, M = M_3,$   
 $-X_1 = 1: \quad -X_a = 1, \quad -X_b = 1, \quad M = M_1,$   
 $-X_2 = 1: \quad -X_h = 1, \quad -X_k = 1, \quad M = M_2,$   
 $-X_4 = 1: \quad -X_a = 1, \quad +X_b = 1, \quad M = M_4,$   
 $-X_5 = 1: \quad -X_h = 1, \quad +X_k = 1, \quad M = M_5.$



Ansatz für symmetrische Belastung:

$X_1$	$X_2$	$X_3$	
$\delta_{11}$	$\delta_{12}$	$\delta_{13}$	$\delta_{10}$
$\delta_{21}$	$\delta_{22}$	$\delta_{23}$	$\delta_{20}$
$\delta_{31}$	$\delta_{32}$	$\delta_{33}$	$\delta_{30}$

Ansatz für antimetrische Belastung:

$X_4$	$X_5$	
$\delta_{44}$	$\delta_{45}$	$\delta_{40}$
$\delta_{54}$	$\delta_{55}$	$\delta_{50}$

Symmetrische Belastung:  $X_4 = X_5 = 0.$   
 $X_1 = {}^{(1)}X_a = {}^{(1)}X_b, \quad X_2 = {}^{(1)}X_h = {}^{(1)}X_k, \quad X_3 = X_c.$

Antimetrische Belastung:  $X_1 = X_2 = X_3 = 0.$   
 $X_4 = {}^{(2)}X_a = -{}^{(2)}X_b, \quad X_5 = {}^{(2)}X_h = -{}^{(2)}X_k.$

Beliebiger Lastangriff:

$$M = {}^{(1)}M_0 + {}^{(2)}M_0 - \sum X_r M_r; \quad r = 1 \dots 5.$$

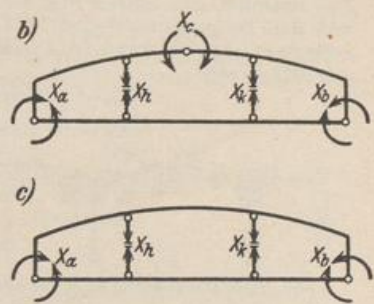


Abb. 188.

Die Längskraft  $X_0 = X_3$  kann ebenso wie  $X_1$  auf S. 196 zu einer Gruppenlast  $X_3^*$  ergänzt werden, so daß  $\delta_{13}$  oder  $\delta_{23}$  Null ist. Die Erweiterung des Ansatzes zur unabhängigen Berechnung aller überzähligen Größen wird in Abschnitt 36 behandelt.

Die Verwendung des Biegemomentes im Scheitelquerschnitt  $c$  (Abb. 188b) oder der Schnittkraft  $H_b$  im Querschnitt  $b$  an Stelle der statisch unbestimmten Längskraft  $X_3 = X_0$  führt zu keinen wesentlichen Änderungen der Lösung. Sie wird dann ebenso wie auf S. 196 behandelt.

2. Die Rechnung läßt sich durch statisch unbestimmte Hauptsysteme abkürzen, deren Schnittkräfte für die Belastung  $\mathfrak{P}$  und  $-X_k = 1$  aus Tabellen bekannt sind. Sie kann daher hier unter Umständen mit Vorteil auf den geschlossenen Stabzug oder den Zweigelenkrahmen mit biegeungssteifem Zugstab bezogen werden. Der Ansatz lautet für Abb. 188c:

Symmetrische Belastung

$X_1$	$X_2$	
$\delta_{11}^{(1)}$	$\delta_{12}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(1)}$
$\delta_{21}^{(1)}$	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$

Antimetrische Belastung

$X_4$	$X_5$	
$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$
$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$

$$M = M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} - X_2 M_2^{(1)} - X_4 M_4^{(1)} - X_5 M_5^{(1)}.$$

**Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch bestimmten Hauptsystem.**

Berechnung einer zweischiffigen, zur Mitte symmetrischen Halle (Abb. 189).

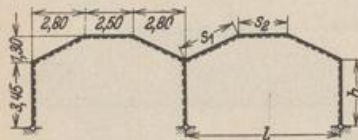


Abb. 189.

1. Geometrische Grundlagen: Trägheitsmomente und reduzierte Stablängen. Riegel:  $J_r = 0,00312 \text{ m}^4 = J_e$ , Pfosten: oberes Ende  $J_b = 0,00540 \text{ m}^4$ , unteres Ende  $J_a = 0,000675 \text{ m}^4$ ,  $J_a : J_b = n = 0,125$ . Maßgebendes mittleres Trägheitsmoment für den Pfosten nach Tabelle 11

$$J_A = k \cdot J_a = 4,90 J_a = 0,00331 \text{ m}^4.$$

$$h' = 3,45 \frac{0,00312}{0,00331} = 3,25 \text{ m}, \quad s'_1 = 3,09 \text{ m}, \quad s'_2 = 2,50 \text{ m}.$$

2. Hauptsystem und überzählige Größen: Die Belastung wird bei Symmetrie des Stabzugs durch Umordnung in den symmetrischen und antimetrischen Anteil zerlegt. Die symmetrische Belastung  $^{(1)}\mathfrak{P}$  erzeugt ein symmetrisches Kräftebild, so daß die symmetrisch zueinander liegenden Biegemomente der Querschnitte  $b, c, d, e$  nach (359) zu überzähligen Gruppenlasten vereinigt und aus

$$X_1 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_b + ^{(1)}M_e); \quad X_2 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_c + ^{(1)}M_d)$$

berechnet werden (Abb. 190 a). Die Differenz der Biegemomente aus  $^{(1)}\mathfrak{P}$  ist Null, daher

$$X_1 = ^{(1)}M_b = ^{(1)}M_e, \quad X_2 = ^{(1)}M_c = ^{(1)}M_d.$$

Der antimetrische Anteil  $^{(2)}\mathfrak{P}$  erzeugt ein antimetrisches Kräftebild, so daß ein Hauptsystem mit den Biegemomenten  $^{(2)}M_b, ^{(2)}M_e$  als überzähligen äußeren Kräften statisch bestimmt berechnet werden kann (Abb. 190 b). Diese werden zu zwei überzähligen Gruppenlasten zusammengefaßt:

$$^{(2)}X_1 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b + ^{(2)}M_e); \quad ^{(2)}X_3 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b - ^{(2)}M_e);$$

$$^{(2)}X_1 = 0 \quad \text{daher} \quad ^{(2)}X_3 = ^{(2)}M_b = - ^{(2)}M_e.$$



Abb. 190 a. Hauptsystem für symmetrische Belastung.

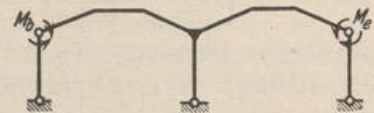


Abb. 190 b. Hauptsystem für antimetrische Belastung.

Das Hauptsystem für den symmetrischen Anteil der Belastung nach Abb. 190 a ist beweglich, aber durch die Art der Belastung im Gleichgewicht. Das Hauptsystem für den antimetrischen Anteil (Abb. 190 b) ist statisch unbestimmt, die statisch unbestimmte Schnittkraft jedoch durch die Art des Lastangriffs Null.