



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiele

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Längskraft $X_0 = X_3$ kann ebenso wie X_1 auf S. 196 zu einer Gruppenlast X_3^* ergänzt werden, so daß $\delta_{13}^{(1)}$ oder $\delta_{23}^{(1)}$ Null ist. Die Erweiterung des Ansatzes zur unabhängigen Berechnung aller überzähligen Größen wird in Abschnitt 36 behandelt.

Die Verwendung des Biegemomentes im Scheitelquerschnitt c (Abb. 188b) oder der Schnittkraft H_b im Querschnitt b an Stelle der statisch unbestimmten Längskraft $X_3 = X_0$ führt zu keinen wesentlichen Änderungen der Lösung. Sie wird dann ebenso wie auf S. 196 behandelt.

2. Die Rechnung läßt sich durch statisch unbestimmte Hauptsysteme abkürzen, deren Schnittkräfte für die Belastung \mathfrak{P} und $-X_k = 1$ aus Tabellen bekannt sind. Sie kann daher hier unter Umständen mit Vorteil auf den geschlossenen Stabzug oder den Zweigelenkrahmen mit biegeungssteifem Zugstab bezogen werden. Der Ansatz lautet für Abb. 188c:

Symmetrische Belastung

X_1	X_2	
$\delta_{11}^{(1)}$	$\delta_{12}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(1)}$
$\delta_{21}^{(1)}$	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$

Antimetrische Belastung

X_4	X_5	
$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$
$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$

$$M = M_0^{(1)} - X_1 M_1^{(1)} - X_2 M_2^{(1)} - X_4 M_4^{(1)} - X_5 M_5^{(1)}.$$

Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch bestimmten Hauptsystem.

Berechnung einer zweischiffigen, zur Mitte symmetrischen Halle (Abb. 189).

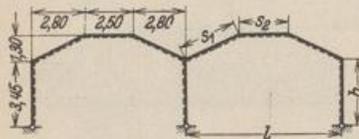


Abb. 189.

1. Geometrische Grundlagen: Trägheitsmomente und reduzierte Stablängen. Riegel: $J_r = 0,00312 \text{ m}^4 = J_e$, Pfosten: oberes Ende $J_b = 0,00540 \text{ m}^4$, unteres Ende $J_a = 0,000675 \text{ m}^4$, $J_a : J_b = n = 0,125$. Maßgebendes mittleres Trägheitsmoment für den Pfosten nach Tabelle 11

$$J_A = k \cdot J_a = 4,90 J_a = 0,00331 \text{ m}^4.$$

$$h' = 3,45 \frac{0,00312}{0,00331} = 3,25 \text{ m}, \quad s'_1 = 3,09 \text{ m}, \quad s'_2 = 2,50 \text{ m}.$$

2. Hauptsystem und überzählige Größen: Die Belastung wird bei Symmetrie des Stabzugs durch Umordnung in den symmetrischen und antimetrischen Anteil zerlegt. Die symmetrische Belastung $^{(1)}\mathfrak{P}$ erzeugt ein symmetrisches Kräftebild, so daß die symmetrisch zueinander liegenden Biegemomente der Querschnitte b, c, d, e nach (359) zu überzähligen Gruppenlasten vereinigt und aus

$$X_1 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_b + ^{(1)}M_e); \quad X_2 = \frac{1}{2} (^{(1)}M_c + ^{(1)}M_d)$$

berechnet werden (Abb. 190 a). Die Differenz der Biegemomente aus $^{(1)}\mathfrak{P}$ ist Null, daher

$$X_1 = ^{(1)}M_b = ^{(1)}M_e, \quad X_2 = ^{(1)}M_c = ^{(1)}M_d.$$

Der antimetrische Anteil $^{(2)}\mathfrak{P}$ erzeugt ein antimetrisches Kräftebild, so daß ein Hauptsystem mit den Biegemomenten $^{(2)}M_b, ^{(2)}M_e$ als überzähligen äußeren Kräften statisch bestimmt berechnet werden kann (Abb. 190 b). Diese werden zu zwei überzähligen Gruppenlasten zusammengefaßt:

$$^{(2)}X_1 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b + ^{(2)}M_e); \quad ^{(2)}X_3 = \frac{1}{2} (^{(2)}M_b - ^{(2)}M_e);$$

$$^{(2)}X_1 = 0 \quad \text{daher} \quad ^{(2)}X_3 = ^{(2)}M_b = - ^{(2)}M_e.$$

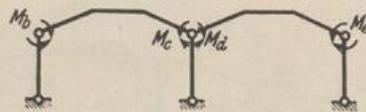


Abb. 190 a. Hauptsystem für symmetrische Belastung.

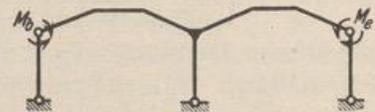


Abb. 190 b. Hauptsystem für antimetrische Belastung.

Das Hauptsystem für den symmetrischen Anteil der Belastung nach Abb. 190 a ist beweglich, aber durch die Art der Belastung im Gleichgewicht. Das Hauptsystem für den antimetrischen Anteil (Abb. 190 b) ist statisch unbestimmt, die statisch unbestimmte Schnittkraft jedoch durch die Art des Lastangriffs Null.

Ansatz:

Symmetrischer Anteil

X_1	X_2	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{20}

Antimetrischer Anteil

$$X_3 \delta_{33} = \delta_{30}$$

3. Vorzahlen der Elastizitätsgleichungen: Berechnung nach (300) mit den Abb. 191a—c

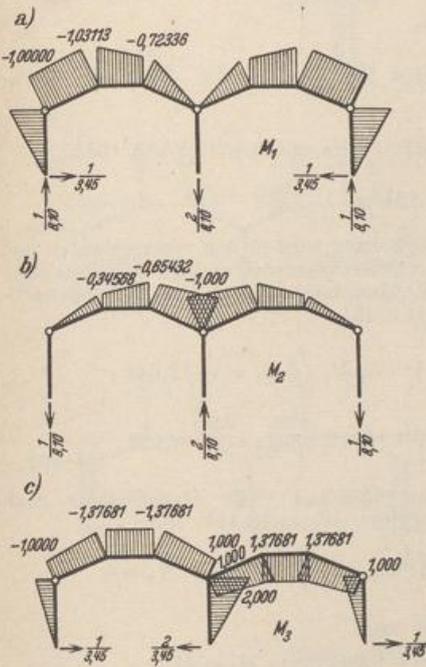


Abb. 191. Biegemomente im Hauptsystem infolge $-X_i = 1$.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int M_1^2 \frac{J^c}{J} ds = 13,506, \\ \delta_{12} &= \int M_1 M_2 \frac{J^c}{J} ds = 4,964, \\ \delta_{22} &= \int M_2^2 \frac{J^c}{J} ds = 5,826, \\ \delta_{33} &= \int M_3^2 \frac{J^c}{J} ds = 33,580. \end{aligned}$$

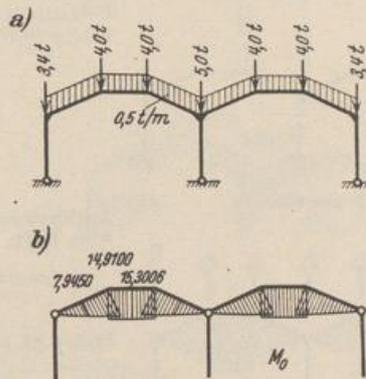


Abb. 192.

Auflösung des Ansatzes nach (347):

$$\begin{aligned} X_1 &= + 0,10780 \delta_{10} - 0,09185 \delta_{20}, \\ X_2 &= - 0,09185 \delta_{10} + 0,24990 \delta_{20}, \\ X_3 &= + 0,02978 \delta_{30}. \end{aligned}$$

4. Die überzähligen Größen und Schnittkräfte aus einzelnen Belastungsfällen. a) Eigengewicht (Abb. 192a). Die Belastung ist symmetrisch. Hauptsystem: Abb. 190a, $X_3 = 0$. Schnittkräfte: Abb. 192b.

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = - 138,57, \\ \delta_{20} &= \int M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = - 86,017, \\ \delta_{30} &= 0, \\ X_1 &= - 7,037 \text{ mt} = M_b = M_e, \\ X_2 &= - 8,769 \text{ mt} = M_c = M_d. \end{aligned}$$

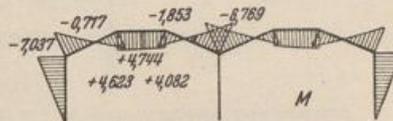


Abb. 193. Biegemomente aus Eigengewicht.

Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 193):

$$M = M_0 + 7,037 M_1 + 8,769 M_2.$$

Probe: Die gegenseitige Verschiebung δ_k der äußeren Fußgelenke muß als Null nachgewiesen werden. Die virtuelle Belastung 1_k nach Abb. 194 a liefert

$$1_k^{(9)} \delta_{k0}^{(9)} = \int \bar{M}_k M_0^{(9)} \frac{J^c}{J} ds = 0,02 = \Delta > 0,$$

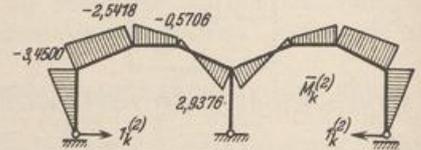
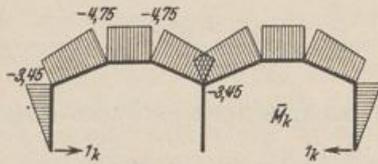


Abb. 194 a und b.

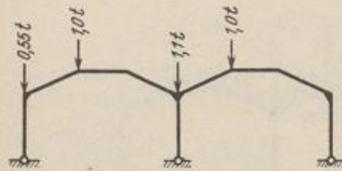
so daß die waagerechte Komponente H der äußeren Stützkräfte nach (333) den Fehler $\Delta H = \Delta / \delta_{kk}^{(n-1)}$ enthält:

$$1_k^{(n-1)} \delta_{kk}^{(n-1)} = 1_k^{(2)} \delta_{kk}^{(2)} = \int \bar{M}_k^{(2)} \bar{M}_k^{(2)} \frac{J^c}{J} ds = 110,403 \quad (\text{Abb. 194 b}),$$

$$\Delta H = 0,02 / 110,403 = 0,181 \text{ kg},$$

gegenüber $H = 2,040 \text{ t}$.

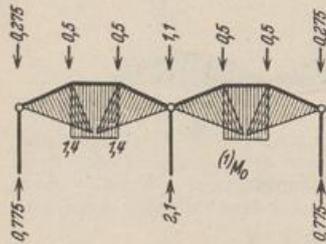
b) Einseitige Schneebelastung (Abb. 195 a). Die Belastung wird in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Belastungsanteil zerlegt. Symmetrischer Belastungsanteil $(1)\mathfrak{P}$: Hauptsystem nach Abb. 190 a, Schnittkräfte $(1)M_0$, nach Abb. 195 b



Schneebelastung.

$$(1)\delta_{10} = \int (1)M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = -12,643,$$

$$(1)\delta_{20} = \int (1)M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = -7,826.$$



Symmetrischer Anteil.

Antisymmetrischer Belastungsanteil $(2)\mathfrak{P}$: Hauptsystem nach Abb. 190 b. Schnittkräfte $(2)M_0$ nach Abb. 195 c.

$$(2)\delta_{30} = \int (2)M_0 M_3 \frac{J^c}{J} ds = 0, \quad X_3 = 0.$$

Daher ist nach 3.:

$$X_1 = -0,644 \text{ mt} = M_b = M_e,$$

$$X_2 = -0,794 \text{ mt} = M_c = M_d.$$

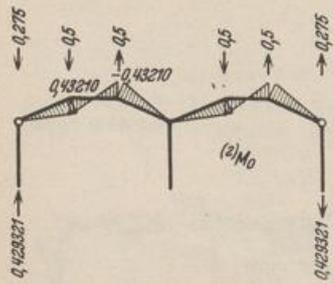
Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 196):

$$M = (1)M_0 + (2)M_0 + 0,644 M_1 + 0,794 M_2.$$

Probe wie bei a):

$$\delta_{k0}^{(9)} = 0,02 = \Delta.$$

c) Windbelastung (Abb. 197 a). Die Belastung wird in den symmetrischen und in den antisymmetrischen Belastungsanteil zerlegt (Abb. 197 b und d). Symmetrischer Belastungs-



Antisymmetrischer Anteil.
Abb. 195.

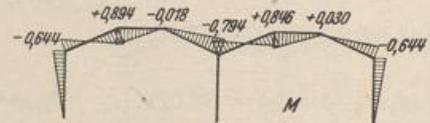


Abb. 196. Biegemomente aus Schneebelastung.

anteil: Hauptsystem nach Abb. 190 a. Schnittkräfte $(1)M_0$ nach Abb. 197 c

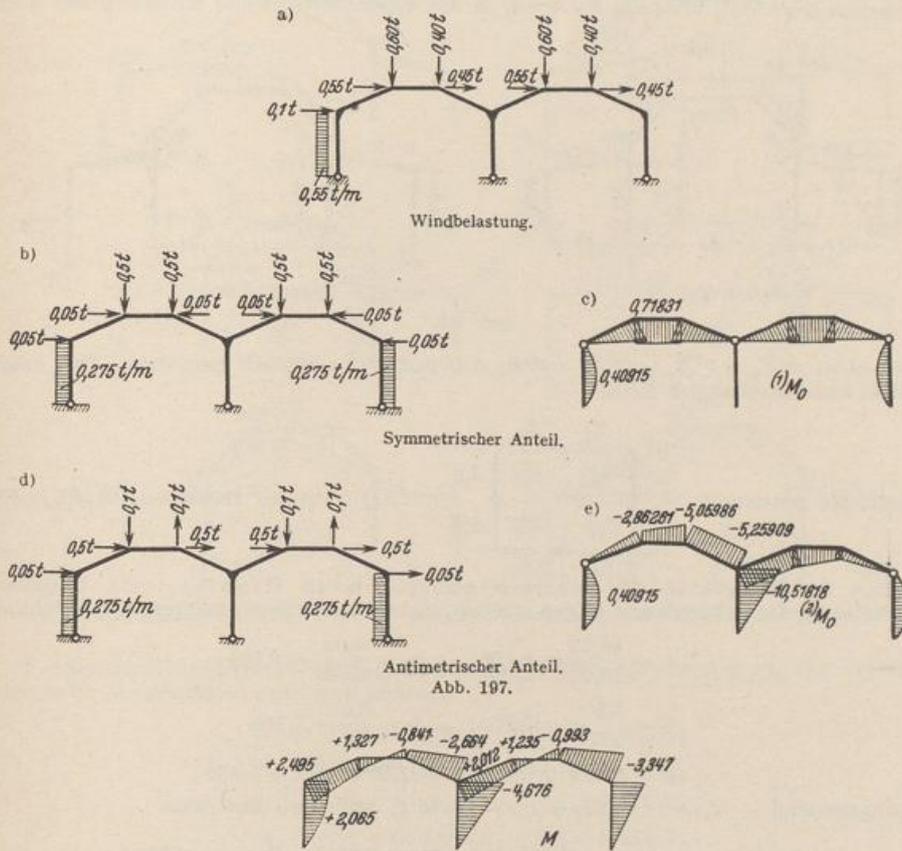
$$(1)\delta_{10} = \int (1)M_0 M_1 \frac{J^c}{J} ds = -7,373, \quad (1)\delta_{20} = \int (1)M_0 M_2 \frac{J^c}{J} ds = -4,015.$$

Antimetrischer Belastungsanteil: Hauptsystem nach Abb. 190 b. Schnittkräfte $^{(2)}M_0$ nach Abb. 197 e

$$^{(2)}\delta_{30} = \int ^{(2)}M_0 M_3 \frac{J_c}{J} ds = 98,05.$$

Daher ist nach 3.:

$$X_1 = -0,426 \text{ mt}, \quad X_2 = -0,326 \text{ mt}, \quad X_3 = +2,921 \text{ mt}.$$



Momente im statisch unbestimmten System (Abb. 198):

$$M = ^{(1)}M_0 + ^{(2)}M_0 + 0,426 M_1 + 0,326 M_2 - 2,921 M_3.$$

Probe wie bei a):

$$\delta_{k_0}^{(3)} = 0,025 = \Delta.$$

Mit $^{(1)}\delta_{1,1} = \Delta/h = 0,025/3,45 = 0,00725$, $^{(1)}\delta_{2,2} = ^{(2)}\delta_{3,3} = 0$ ergibt sich nach S. 169 ein Fehler $\Delta X_1 = 0,10780 \cdot 0,00725 = 0,000782 \text{ mt}$ und damit ein Fehler der äußeren horizontalen Stützkkräfte

$$\Delta H = 0,000782/3,45 = 0,23 \text{ kg} \text{ gegenüber } 723 \text{ kg}.$$

Zahlenbeispiel in Verbindung mit einem statisch unbestimmten Hauptsystem. (Abb. 199 a.)

1. Geometrische Grundlagen. Trägheitsmomente:

$$J_1 = 0,0416 \text{ m}^4 = J_c, \quad J_2 = 0,0213 \text{ m}^4, \quad J_3 = 0,0114 \text{ m}^4.$$

Reduzierte Stablängen:

$$h'_1 = 5,00 \cdot \frac{0,0416}{0,0114} = 18,245 \text{ m}, \quad s'_1 = 8,06 \cdot \frac{0,0416}{0,0213} = 15,746 \text{ m},$$

$$h'_2 = 6,00 \text{ m}, \quad h' = 2,00 \text{ m}, \quad s'_2 = 5,657 \text{ m}, \quad l'_1 = 8,00 \text{ m}.$$

5. Auflösung des Ansatzes in 2. nach (345):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(2)} + 0,11351 \delta_{20}^{(2)}}{19,34467}, \quad X_2 = \frac{\delta_{20}^{(2)}}{16,05370}, \quad X_3 = \frac{\delta_{30}^{(2)} + 2,75309 \delta_{10}^{(2)}}{469,1904}$$

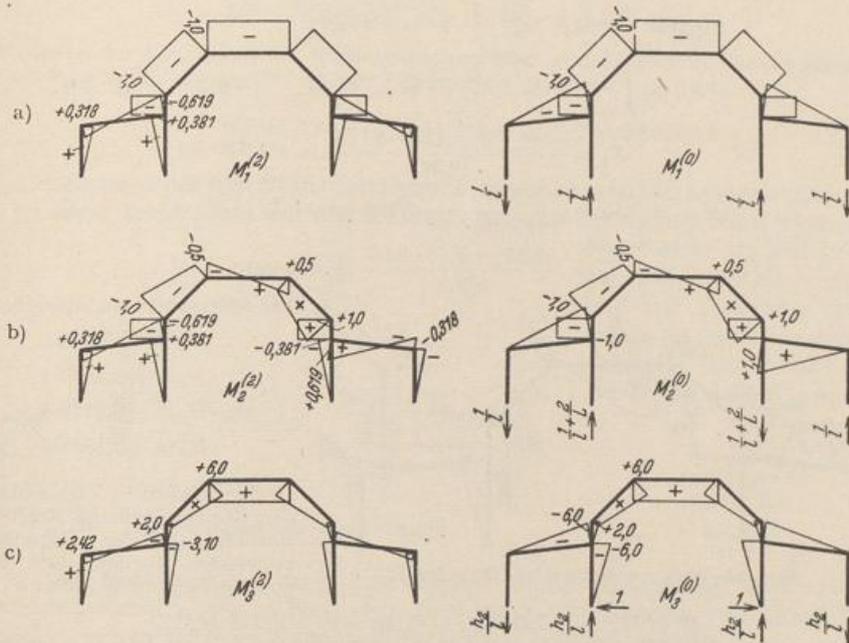


Abb. 200. Biegemomente infolge $-X_i = 1$ im statisch unbestimmten und statisch bestimmten Hauptsystem.

6. Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Stabwerks können aus den Stützkraften oder durch Superposition gewonnen werden:

$$\begin{aligned} H_a &= H_{a0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 + X_2) + 0,484 X_3, \\ H_b &= H_{b0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 + X_2) - 0,516 X_3, \\ H_c &= H_{c0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 - X_2) - 0,516 X_3, \\ H_d &= H_{d0}^{(2)} + 0,0636 (X_1 - X_2) + 0,484 X_3. \end{aligned}$$

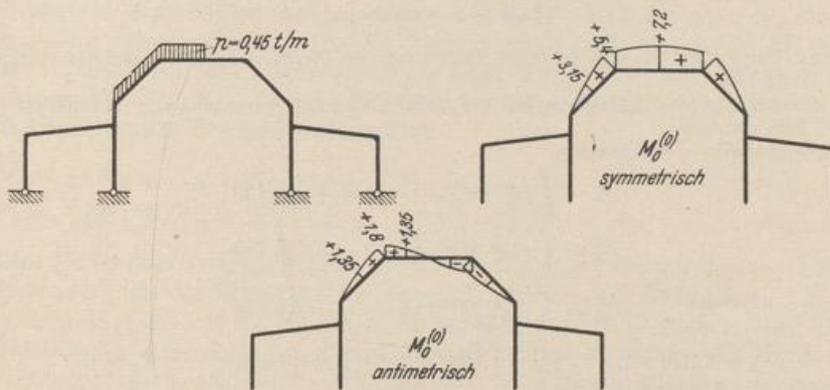


Abb. 201. Schneebelastung.

7. Belastungsfall I: Einseitige Belastung des Mittelschiffs durch Schnee mit $p = 0,45$ t/m nach Abb. 201. Sie wird in den symmetrischen und antisymmetrischen Lastanteil mit $p = 0,225$ t/m zerlegt, so daß $X_1 = {}^{(1)}M_1 = {}^{(1)}M_r$, $X_3 = {}^{(1)}H_1 = {}^{(1)}H_r$, $X_2 = {}^{(2)}M_1 = -{}^{(2)}M_r$. Die Be-

lastungsglieder des Ansatzes werden als gegenseitige Verschiebungen im statisch unbestimmten Hauptsystem nach (305) berechnet.

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\delta_{10}^{(2)} &= \int {}^{(1)}M_0^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = -86,7; & {}^{(1)}\delta_{20}^{(2)} &= 0; \\ {}^{(1)}\delta_{30}^{(2)} &= \int {}^{(1)}M_0^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +472,9; \\ {}^{(2)}\delta_{20}^{(2)} &= \int {}^{(2)}M_0^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = -12,33; & {}^{(2)}\delta_{10}^{(2)} &= {}^{(2)}\delta_{30}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{-86,7 + 0,1135 \cdot 472,9}{19,34} = -1,710 \text{ mt,}$$

$$X_2 = -\frac{12,33}{16,05} = -0,768 \text{ mt,}$$

$$X_3 = \frac{472,9 - 2,75 \cdot 86,7}{469,2} = +0,499 \text{ t.}$$

Die Stützkkräfte sind dann nach 6.:

$$H_a = +0,0840 \text{ t,}$$

$$H_b = -0,4150 \text{ t,}$$

$$H_c = -0,3173 \text{ t,}$$

$$H_d = +0,1817 \text{ t.}$$

Sie können in Verbindung mit den übrigen äußeren Kräften zur Bestimmung der Schnittkräfte verwendet werden. Die Superposition nach (289) liefert

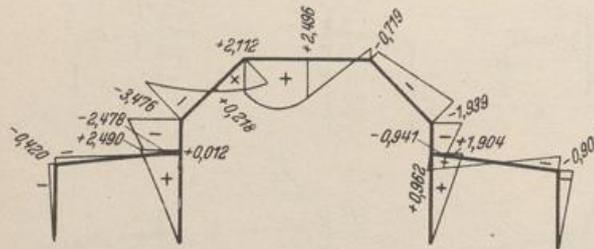


Abb. 202. Biegemomente infolge Schneelast.

$$M = M_0^{(2)} + 1,710 M_1^{(2)} + 0,768 M_2^{(2)} - 0,499 M_3^{(2)}.$$

Um die Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 202) nachzuweisen, wird festgestellt, daß die Summe der gegenseitigen Verdrehungen der Querschnitte l und r Null ist.

$$\delta_{10}^{(3)} = \int M_0^{(3)} M_1^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 16,81809 - 16,79790 = 0,02 \approx 0.$$

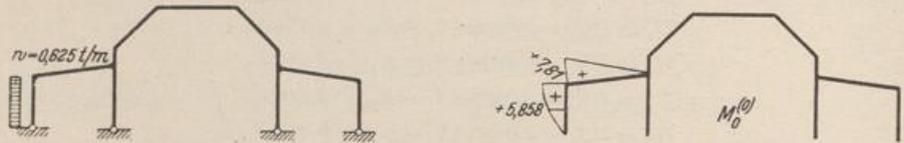


Abb. 203. Windbelastung.

8. Belastungsfall II: Waagerechte Belastung des Pfostens des Seitenschiffs durch Wind mit $w = 0,625 \text{ t/m}$.

Die Umordnung der Belastung ist bei dem einfachen Schaubild der Schnittkräfte $M_0^{(0)}$ nach Abb. 203 unnötig.

Belastungsglieder des Ansatzes:

$$\delta_{10}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_1^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +19,236,$$

$$\delta_{20}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_2^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +19,236,$$

$$\delta_{30}^{(2)} = \int M_0^{(0)} M_3^{(2)} \frac{J_c}{J} ds = +179,552;$$

$$X_1 = 2,048 \text{ mt,} \quad X_2 = 1,198 \text{ mt,} \quad X_3 = 0,496 \text{ t,} \quad X_4 = 0.$$

Nach Abschn. 61 wird

$$\Phi = \frac{2 + 0,833(4 + 5 \cdot 1,159)}{4 \cdot 4,456} = 0,5701 \text{ t;}$$

$$H_{00}^{(2)} = -\frac{0,625 \cdot 5,00}{2} (-0,5701) = 0,891 \text{ t;} \quad H_{d0}^{(2)} = 0,891 - 0,625 \cdot 5,00 = -2,234 \text{ t.}$$

Die übrigen waagerechten Stützkräfte werden wiederum nach 6. berechnet.

$$H_a = -1,788 \text{ t}, \quad H_b = +0,841 \text{ t}, \quad H_c = -0,202 \text{ t}, \quad H_d = 0,294 \text{ t}.$$

Sie dienen zur Ermittlung der Schnittkräfte. Die Superposition nach (289) liefert

$$M = M_0^{(2)} - 2,048 M_1^{(2)} - 1,198 M_2^{(2)} - 0,496 M_3^{(2)}.$$

Zum Nachweis der Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 204) wird festgestellt, daß die gegenseitige Verschiebung der Stützpunkte der inneren Pfosten Null ist:

$$\delta_{30}^{(5)} = \int M_0^{(5)} M_3^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 51,618 - 51,617 = 0,001 \approx 0.$$

Das Hauptsystem mit Symmetrie nach zwei Achsen. Die Symmetrie des Tragwerks zu einer Achse führt mit der Bildung eines symmetrischen Hauptsystems zur

Symmetrie der Matrix in bezug auf die Nebendiagonale und zur Zerlegung des Ansatzes in zwei unabhängige Gruppen von Gleichungen. Durch die Addition und Sub-

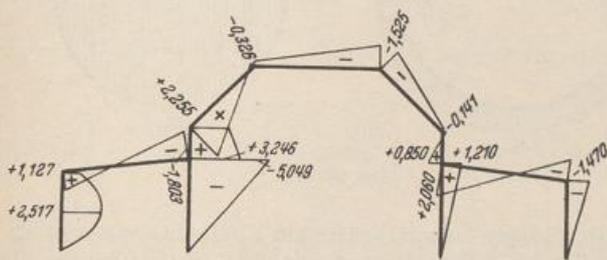


Abb. 204. Biegemomente infolge Windlast.

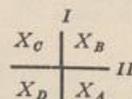


Abb. 205.

traktion von Gleichungen mit symmetrischen Ordnungsnummern sind neue Unbekannte entstanden, die in statischer Beziehung als Gruppen von überzähligen, zueinander symmetrisch liegenden Schnittkräften erkannt wurden.

Besitzt das Hauptsystem zwei Symmetrieachsen, so ist die Matrix durch vier Achsen ausgezeichnet. Der Ansatz kann dann durch wiederholte Addition und Subtraktion in vier voneinander unabhängige Teile λ, μ, ν, τ zerlegt werden. Die Unbekannten dieser Gleichungen bestehen aus Gruppen von je vier statisch unbestimmten, einander nach Abb. 205 symmetrisch zugeordneten Schnittkräften. Sie können ähnlich wie bei einfacher Symmetrie des Hauptsystems symmetrisch oder antisymmetrisch zu einer der beiden Achsen entwickelt und zur Bildung der vier unabhängigen Abschnitte des Ansatzes unmittelbar angeschrieben werden. Die Unbekannten U_k der Gleichungen λ sind zu beiden Achsen symmetrisch, die Unbekannten V_k des Ansatzes μ zu beiden Achsen antisymmetrisch. Die Unbekannten Y_k der Gleichungen ν sind symmetrisch zur Achse I und antisymmetrisch zur Achse II, die Unbekannten Z_k des Ansatzes τ antisymmetrisch zur Achse I und symmetrisch zur Achse II. Bilden daher X_A, X_B, X_C, X_D eine Gruppe statisch unbestimmter, einander symmetrisch zugeordneter Schnittkräfte, so ist

$$\left. \begin{aligned} U_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B + X_C + X_D), & Y_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B - X_C + X_D), \\ Z_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B - X_C - X_D), & V_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B + X_C - X_D). \end{aligned} \right\} (367)$$

Der Faktor $1/4$ ist durch die nachträgliche Erweiterung der Summanden der Ansätze λ bis τ entstanden, um die Schnittkräfte für $-U_k = 1$ aus der Belastung $-X_A = 1, -X_B = 1, -X_C = 1, -X_D = 1$ usw. zu entwickeln. Die Vorzeichen und die Belastungszahlen der Ansätze λ bis τ folgen aus derselben algebraischen Entwicklung wie die Gruppenlasten, also durch Addition und Subtraktion der Vorzeichen δ_{ik} und der Belastungszahlen δ_{k0} des allgemeinen Ansatzes. Sie erscheinen nach der erwähnten Erweiterung der linken Seiten der Gleichungen im vierfachen Betrage. Die Vorzeichen δ_{hh} und δ_{ht} aus $-X_h = 1$ werden jedoch dabei halbiert, wenn X_h eine überzählige Größe in der Symmetrieachse ist. Die Entwicklung kann nach dem An-