



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Das Hauptsystem mit Symmetrie nach zwei Achsen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die übrigen waagerechten Stützkräfte werden wiederum nach 6. berechnet.

$$H_a = -1,788 \text{ t}, \quad H_b = +0,841 \text{ t}, \quad H_c = -0,202 \text{ t}, \quad H_d = 0,294 \text{ t}.$$

Sie dienen zur Ermittlung der Schnittkräfte. Die Superposition nach (289) liefert

$$M = M_0^{(2)} - 2,048 M_1^{(2)} - 1,198 M_2^{(2)} - 0,496 M_3^{(2)}.$$

Zum Nachweis der Richtigkeit des Ergebnisses (Abb. 204) wird festgestellt, daß die gegenseitige Verschiebung der Stützpunkte der inneren Pfosten Null ist:

$$\delta_{30}^{(5)} = \int M_0^{(5)} M_3^{(0)} \frac{J_c}{J} ds = 51,618 - 51,617 = 0,001 \approx 0.$$

Das Hauptsystem mit Symmetrie nach zwei Achsen. Die Symmetrie des Tragwerks zu einer Achse führt mit der Bildung eines symmetrischen Hauptsystems zur

Symmetrie der Matrix in bezug auf die Nebendiagonale und zur Zerlegung des Ansatzes in zwei unabhängige Gruppen von Gleichungen. Durch die Addition und Sub-

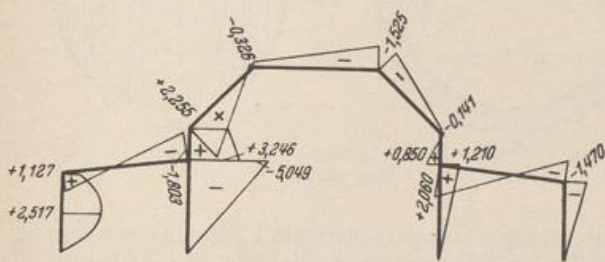


Abb. 204. Biegemomente infolge Windlast.

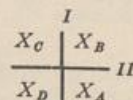


Abb. 205.

traktion von Gleichungen mit symmetrischen Ordnungsnummern sind neue Unbekannte entstanden, die in statischer Beziehung als Gruppen von überzähligen, zueinander symmetrisch liegenden Schnittkräften erkannt wurden.

Besitzt das Hauptsystem zwei Symmetrieachsen, so ist die Matrix durch vier Achsen ausgezeichnet. Der Ansatz kann dann durch wiederholte Addition und Subtraktion in vier voneinander unabhängige Teile λ, μ, ν, τ zerlegt werden. Die Unbekannten dieser Gleichungen bestehen aus Gruppen von je vier statisch unbestimmten, einander nach Abb. 205 symmetrisch zugeordneten Schnittkräften. Sie können ähnlich wie bei einfacher Symmetrie des Hauptsystems symmetrisch oder antisymmetrisch zu einer der beiden Achsen entwickelt und zur Bildung der vier unabhängigen Abschnitte des Ansatzes unmittelbar angeschrieben werden. Die Unbekannten U_k der Gleichungen λ sind zu beiden Achsen symmetrisch, die Unbekannten V_k des Ansatzes μ zu beiden Achsen antisymmetrisch. Die Unbekannten Y_k der Gleichungen ν sind symmetrisch zur Achse I und antisymmetrisch zur Achse II, die Unbekannten Z_k des Ansatzes τ antisymmetrisch zur Achse I und symmetrisch zur Achse II. Bilden daher X_A, X_B, X_C, X_D eine Gruppe statisch unbestimmter, einander symmetrisch zugeordneter Schnittkräfte, so ist

$$\left. \begin{aligned} U_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B + X_C + X_D), & Y_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B - X_C + X_D), \\ Z_k &= \frac{1}{4}(X_A + X_B - X_C - X_D), & V_k &= \frac{1}{4}(X_A - X_B + X_C - X_D). \end{aligned} \right\} (367)$$

Der Faktor $1/4$ ist durch die nachträgliche Erweiterung der Summanden der Ansätze λ bis τ entstanden, um die Schnittkräfte für $-U_k = 1$ aus der Belastung $-X_A = 1, -X_B = 1, -X_C = 1, -X_D = 1$ usw. zu entwickeln. Die Vorzeichen und die Belastungszahlen der Ansätze λ bis τ folgen aus derselben algebraischen Entwicklung wie die Gruppenlasten, also durch Addition und Subtraktion der Vorzeichen δ_{ik} und der Belastungszahlen δ_{k0} des allgemeinen Ansatzes. Sie erscheinen nach der erwähnten Erweiterung der linken Seiten der Gleichungen im vierfachen Betrage. Die Vorzeichen δ_{hh} und δ_{ht} aus $-X_h = 1$ werden jedoch dabei halbiert, wenn X_h eine überzählige Größe in der Symmetrieachse ist. Die Entwicklung kann nach dem An-

satz (362) auf S. 193 verfolgt werden. Die Vorzahlen der Ansätze λ bis τ werden je nach der Art der Gruppenbildung mit $\lambda_{hk}, \mu_{hk}, \nu_{hk}, \tau_{hk}$ bezeichnet und unabhängig von der algebraischen Grundlage ebenso wie auf S. 193 unmittelbar als die Arbeiten $1_k \cdot \lambda_{kh}, 1_k \cdot \mu_{kh}, 1_k \cdot \nu_{kh}, 1_k \cdot \tau_{kh}$ einer virtuellen Belastung $-U_k = 1, -V_k = 1, -Y_k = 1, -Z_k = 1$ bei einer Formänderung aus $-U_h = 1$ usw. entwickelt. Dasselbe gilt von den Belastungszahlen $\lambda_{k0}, \mu_{k0}, \nu_{k0}, \tau_{k0}$.

Die Gruppenlasten U bis Z können in dieser Form nur dann entwickelt

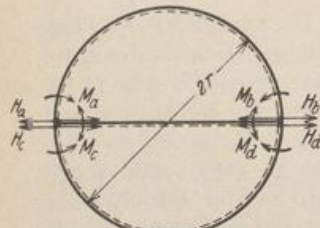


Abb. 206.

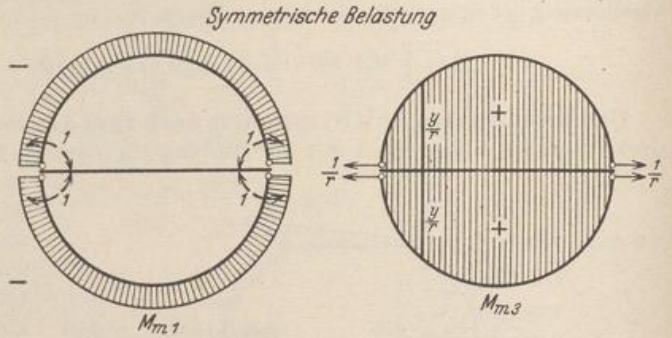


Abb. 207 a, b.

werden, wenn die Anzahl der überzähligen Schnittkräfte ein Vielfaches von vier ist. Sie werden deshalb unter Umständen durch symmetrisch liegende, statisch bestimmte Schnittkräfte ergänzt. Daher tritt in der Regel zur Bildung von Gruppenlasten die Umordnung der Belastung nach den ausgezeichneten Systemachsen (Abschnitt 27).

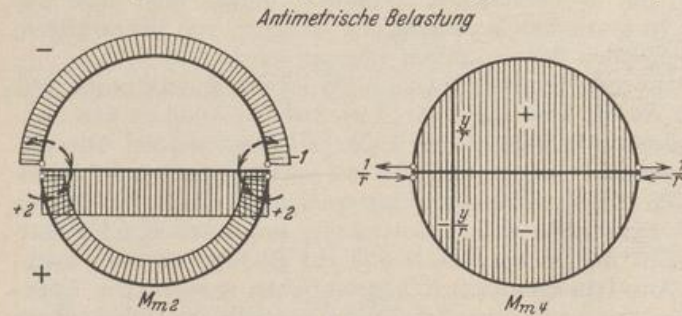


Abb. 207 c, d.

Ansatz und Lösung derartiger Aufgaben werden an der folgenden Rechnung gezeigt.

Der kreisförmige, durch eine Querwand unterteilte Behälterring (Abb. 206) ist sechsfach statisch unbestimmt. Er ist zu zwei Achsen symmetrisch. Um diese Eigenschaft für die Berechnung zu benutzen,

werden neben H_a und H_c auch H_b und H_d als äußere Kräfte verwendet, so daß durch deren Umordnung nach den vier Achsen acht überzählige Gruppenlasten entstehen. Da das Kräftebild auch bei der Füllung einer Kammer zur senkrechten Achse symmetrisch ist, sind die für diese Achse antisymmetrischen Gruppen Null. Daher werden nur die folgenden überzähligen Größen angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} U_1 = X_1 &= \frac{1}{4} (M_a + M_b + M_c + M_d), & U_2 = X_3 &= \frac{r}{4} (H_a + H_b + H_c + H_d), \\ Z_1 = X_2 &= \frac{1}{4} (M_a + M_b - M_c - M_d), & Z_2 = X_4 &= \frac{r}{4} (H_a + H_b - H_c - H_d). \end{aligned} \right\} (368)$$

Die Elastizitätsgleichungen entstehen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (156)

$$\delta_{10} - \sum \delta_{1k} X_k = 0 \quad \text{usw.}, \quad \delta_{40} - \sum \delta_{4k} X_k = 0; \quad k = 1, \dots, 4.$$

Die Vorzahlen haben die folgende Bedeutung:

$$\delta_{11} = \frac{J_c}{F_c} \int N_1^2 \frac{F_c}{F} ds + \int M_1^2 \frac{J_c}{J} ds; \quad \delta_{40} = \frac{J_c}{F_c} \int N_0 N_1 \frac{F_c}{F} ds + \int M_0 M_1 \frac{J_c}{J} ds.$$

N_1 und M_1 sind die Schnittkräfte aus $-X_1 = 1, X_2 = X_3 = X_4 = 0$. Dieser Belastungszustand ist gleichbedeutend mit $-M_a = 1, -M_b = 1, -M_c = 1, -M_d = 1$ (Abb. 207 a).

1. Um die viergliedrige Matrix zur Bestimmung der überzähligen Größen $X_1 \dots X_4$ zu zerlegen, wird die Belastung in einen symmetrischen und in einen antisymmetrischen Anteil aufgespalten.

$$\text{Symmetrische Gruppe: } \begin{array}{|c|c|} \hline X_1 & X_3 \\ \hline \delta_{11} & \delta_{13} \\ \hline \delta_{31} & \delta_{33} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \delta_{10} \\ \delta_{30} \end{array} \quad \text{Antisymmetrische Gruppe: } \begin{array}{|c|c|} \hline X_2 & X_4 \\ \hline \delta_{22} & \delta_{24} \\ \hline \delta_{42} & \delta_{44} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \delta_{20} \\ \delta_{40} \end{array}$$

2. Die Vorzahlen (Abb. 207):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 ds = 2r\pi; & \delta_{13} &= -2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} yr d\varphi = -4r, \\ \delta_{33} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y^2}{r^2} r d\varphi + 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{J_c}{F_c} r d\varphi + \left(\frac{2}{r}\right)^2 2r \frac{J_c}{F_c} = \pi r + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi}{r} + \frac{J_c}{F_c} \frac{8}{r}, \\ \delta_{22} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 1 r d\varphi + 2^2 \cdot 2r \frac{J_c}{F_c} = 2r(\pi + 4 \frac{J_c}{F_c}); & \delta_{24} &= -2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} yr d\varphi = -4r, \\ \delta_{44} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{y^2}{r^2} r d\varphi + 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r^2} \cos^2 \varphi \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = \pi r + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi}{r}. \end{aligned}$$

3. Die Belastungszahlen für einen zur waagerechten Achse symmetrischen oder antisymmetrischen Wasserdruck p :

$$\begin{aligned} (1)\delta_{10} &= 0, & (1)\delta_{30} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{r} \cos \varphi pr \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = 4pr \frac{J_c}{F_c}, \\ (2)\delta_{20} &= 2 \cdot \frac{2}{3} p \frac{(2r)^2}{4} \cdot 2r \frac{J_c}{F_c}, & (2)\delta_{40} &= 2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \varphi \frac{1}{r} pr \frac{J_c}{F_c} r d\varphi = 4pr \frac{J_c}{F_c}. \end{aligned}$$

4. Die überzähligen Größen sind nach den Ansätzen 1.:

$$\begin{aligned} (1)X_1 &= \frac{\delta_{10}\delta_{33} - \delta_{30}\delta_{13}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2} = \frac{8pr \frac{J_c}{F_c}}{r(\pi^2 - 8) + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi^2}{r} + \frac{J_c}{F_c} 8 \frac{\pi}{r}}, \\ (1)X_3 &= \frac{\delta_{30}\delta_{11} - \delta_{10}\delta_{31}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2} = \frac{4p\pi r \frac{J_c}{F_c}}{r(\pi^2 - 8) + \frac{J_c}{F_c} \frac{\pi^2}{r} + \frac{J_c}{F_c} 8 \frac{\pi}{r}}, \\ (2)X_2 &= \frac{\delta_{20}\delta_{44} - \delta_{40}\delta_{24}}{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2} = pr \frac{\frac{4}{3} \pi \frac{J_c}{F_c} \left(r^2 + \frac{J_c}{F_c}\right) + 8 \frac{J_c}{F_c}}{\pi \left(4 \frac{J_c}{F_c} + \pi\right) \left(r + \frac{1}{r} \frac{J_c}{F_c}\right) - 8r}, \\ (2)X_4 &= \frac{\delta_{40}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{42}}{\delta_{22}\delta_{44} - \delta_{24}^2} = 4pr \frac{\frac{J_c}{F_c} \left(4 \frac{J_c}{F_c} + \pi\right) + \frac{4}{3} r^2 \frac{J_c}{F_c}}{\pi \left(4 \frac{J_c}{F_c} + \pi\right) \left(r + \frac{1}{r} \frac{J_c}{F_c}\right) - 8r}. \end{aligned}$$

5. Die Schnittkräfte aus der Füllung eines Abteils entstehen durch Überlagerung des symmetrischen und antisymmetrischen Anteils aus $p/2$. Daher ist bei Füllung beider Hälften des Behälters

$$M_a = M_b = M_c = M_d = X_1, \quad H_a = H_b = H_c = H_d = \frac{X_3}{r},$$

bei Füllung eines Abteils

$$M_a = M_b = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad M_c = M_d = \frac{X_1 - X_2}{2};$$

$$H_a = H_b = \frac{X_3 + X_4}{2r}; \quad H_c = H_d = \frac{X_3 - X_4}{2r}.$$

Die Abmessungen nach Abb. 208a liefern für $p = 6,0$ t/m folgendes Ergebnis:

$$J_c = \frac{0,15^3 \cdot 1,0}{12} = 0,000281 \text{ m}^4,$$

$$J_z = \frac{0,30^3 \cdot 1,0}{12} = 0,00225 \text{ m}^4,$$

$$F_c = 0,15 \cdot 1,0 = 0,15 \text{ m}^2,$$

$$F_z = 0,30 \cdot 1,0 = 0,30 \text{ m}^2,$$

$$J_c : J_z = 0,125,$$

$$J_c : F_c = 0,001873 \text{ m}^2,$$

$$J_c : F_z = 0,000936 \text{ m}^2,$$

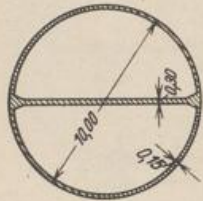


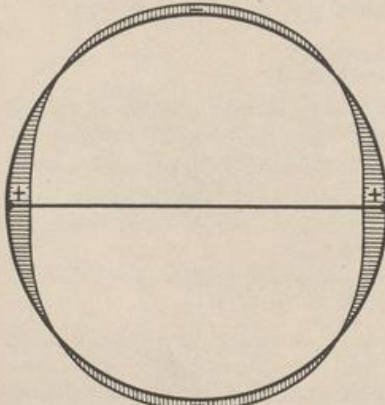
Abb. 208a.

$$X_1 = 8 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873}{5,0 (\pi^2 - 8) + 0,001873 \cdot \frac{\pi^2}{5,0} + 0,000936 \cdot \frac{8\pi}{5,0}} = 0,0478 \text{ mt},$$

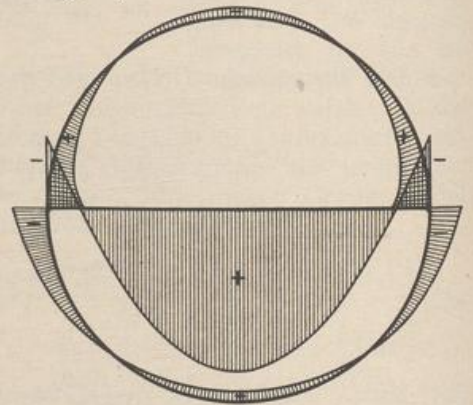
$$X_2 = 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{1,333\pi \cdot 0,125 (5,0^2 + 0,001873) + 8 \cdot 0,001873}{\pi (4 \cdot 0,125 + \pi) \left(5,0 + \frac{0,001873}{5,0} \right) - 8 \cdot 5,0} = 22,85 \text{ mt},$$

$$X_3 = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873 \cdot \pi}{5,0 (\pi^2 - 8) + 0,001873 \cdot \frac{\pi^2}{5,0} + 0,000936 \cdot \frac{8\pi}{5,0}} = 0,0751 \text{ mt},$$

$$X_4 = 4 \cdot 6,0 \cdot 5,0 \cdot \frac{0,001873 (4 \cdot 0,125 + \pi) + 1,333 \cdot 5,0^2 \cdot 0,125}{\pi (4 \cdot 0,125 + \pi) \left(5,0 + \frac{0,001873}{5,0} \right) - 8 \cdot 5,0} = 29,15 \text{ mt}.$$



Füllung beider Kammern,
1 mt \equiv 66% mm.



Füllung einer Kammer,
1 mt \equiv 0,4 mm.

Abb. 208b. Biegemomente.

Statische Untersuchung eines Kühlturmunterbaues. Um auch die Bedeutung der mehrfachen Symmetrie eines Tragwerks für die Vereinfachung der statischen