Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

29. Algebraische Auflösung der Bedingungsgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

aus einer vorgeschriebenen Belastung der Rahmenstellung nach Abb. 213 (Windrichtung winkelrecht zu Stab 23) geschieht mit zyklischer Vertauschung der Ergebnisse und liefert folgende Lösung. Sie dient zur Berechnung der übrigen Biegungsmomente (Abb. 214).

Längskräfte	X_{23}	$X_1 = X_{21}$	$X_3 = X_{19}$	$X_5 = X_{17}$	$X_7 = X_{15}$	$X_9 = X_{13}$	X_{11}
t	+ 32,94	+ 21,40	− 0,72	− 12,92	− 12,20	− 8,48	− 7,10
Momente	$X_{22} = X_{24}$	$X_{20} = X_2$	$X_{18} = X_4$	$X_{16} = X_6$	$X_{14} = X_8$	$X_{12} = X_{10}$	—
mt	+ 40,222	− 6,247	− 40,626	− 27,463	+ 6,247	+ 27,867	—

Die Untersuchung kann als Grundlage für die vollständige Beurteilung des räumlichen Zusammenhangs der Konstruktion bei Einspannung der Pfosten im Stabeck

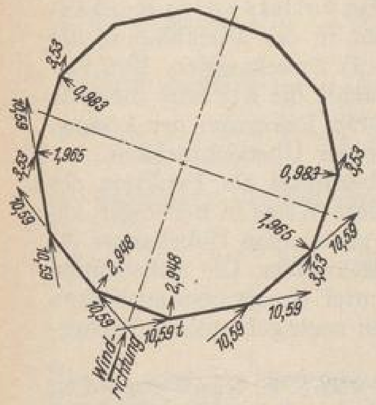

Abb. 213.

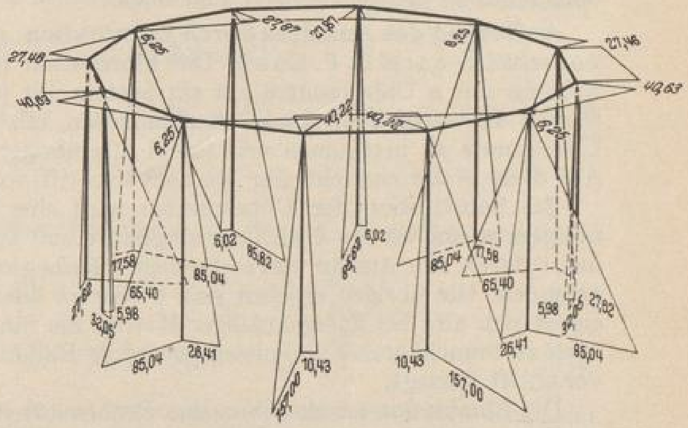

Abb. 214. Biegungsmomente aus Belastung nach Abb. 213.

mit oder ohne Berücksichtigung des Verdrehungswiderstandes der Pfosten und Riegel verwendet werden.

Andrée, L.: Das B.U.-Verfahren. München 1922. — Hertwig, A.: Zur Berechnung symmetrischer statisch unbestimmter Gebilde. Bauing. 1928 Heft 10 und 11. — Vinzenz, J.: Beitrag zur Berechnung des kontinuierlichen Trägers. Bauing. 1921, S. 695.

29. Algebraische Auflösung der Bedingungsgleichungen.

Die statisch unbestimmten Schnittkräfte eines Stabwerks werden je nach der Art der Aufgabe für eine ausgezeichnete Belastung oder nach zahlreichen äußeren Ursachen getrennt angegeben, um daraus die für die Verwendung ungünstigsten Grenzwerte zu entwickeln. Während die Belastungszahlen δ_{k0}, $\delta_{k0}^{(n-h)}$ oder $\delta_{k\otimes}$, $\delta_{k\otimes}^{(n-h)}$ in dem einen Falle in die Auflösung einbezogen werden, ist im anderen die Berechnung der statisch unbestimmten Schnittkräfte mit Hilfe der zu den Vorzahlen δ_{ik} konjugierten Matrix meist einfacher und übersichtlicher. Sie werden dann je nach der Art des Hauptsystems in der folgenden Form angeschrieben:

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\delta_{i0}, \quad (k = 1 \ldots . n); \qquad X_k = \sum_{i=1}^{i=h} \beta_{ki}\delta_{k0}^{(n-h)}, \quad (k = 1 \ldots . h). \quad (369)$$

Jede Aufgabe besteht in der Auflösung von n oder $(n-h)$ linearen Gleichungen mit ebensoviel überzähligen Größen. Sie ist in formaler Beziehung elementar. Schwierigkeiten entstehen unter Umständen nur durch die Fehlerfortpflanzung der Zahlenrechnung. Diese darf erst dann als beseitigt angesehen werden, wenn die Nennerdeterminante nicht wesentlich kleiner ist als das Produkt der Glieder der Hauptdiagonale.

Die Berechnung mit Determinanten nach S. 166 ist nur bei einer kleinen Anzahl von Wurzeln am Platze, die leicht mit Unterdeterminanten angeschrieben werden können. In allen anderen Fällen wird zunächst eine Wurzel durch Elimination oder Substitution der übrigen gewonnen. Diese selbst folgen dann durch Rekursion. Dabei verdient diejenige Rechenvorschrift den Vorzug, deren Zwischenergebnisse übersichtlich und nachprüfbar angeschrieben und deren Endergebnisse mit der kleinsten Stellenzahl einwandfrei erhalten werden. Die Lösungsfehler treten um so mehr zurück, je größer die Nennerdeterminanten aller Zwischenstufen bleiben. Daher ist die Elimination nach Gauß stets dann am Platze, wenn die Vorzahlen δ_{kk} in der Hauptdiagonale der Matrix groß gegenüber den Nebengliedern sind und diese selbst nach dem Rand zu der Größe nach abnehmen.

Auflösung des Ansatzes durch Elimination. a) Die vollständige Rechenvorschrift nach C. F. Gauß. Die Elimination beruht in der Rückbildung des Systems mit n Unbekannten auf ein System mit $(n-1)$ Unbekannten. Man verwendet Vorwärts- oder Rückwärtselimination, um zunächst die $n$te oder die erste Unbekannte zu bestimmen und findet alle übrigen durch Rekursion der Lösung. Auf diese Weise entsteht eine Rechenvorschrift von großer Übersichtlichkeit.

Bei Substitution der Unbekannten wird eine Unbekannte als Funktion der übrigen in eine andere Gleichung eingesetzt und auf diese Weise in beliebiger, zumeist durch den Ansatz vorgeschriebener Reihenfolge zuerst eine Unbekannte X_k gefunden. Die übrigen ergeben sich wiederum durch Rekursion. Die Substitution eignet sich also bei unregelmäßiger Matrix. Sie führt unter Umständen auch dann noch zu brauchbaren Ergebnissen, wenn die Elimination nach gebundener Rechenvorschrift versagt.

Die Elimination ist als gebundene Rechenvorschrift von C. F. Gauß angegeben worden und als Gaußscher Algorithmus in der Geodäsie seit langem zur Lösung der Normalgleichungen bekannt. Hierbei wird bei n Unbekannten in n Eliminationsstufen stets die linksstehende Unbekannte ausgeschlossen, indem die in geeigneter Form erweiterte erste oder letzte Gleichung von den übrigen Gleichungen der Eliminationsstufe abgezogen wird. Zur Nachprüfung der Zahlenrechnung jeder Elimination werden die algebraischen Summen der Vorzahlen δ_{ik} jeder Zeile gebildet und als Zeilen- oder Quersummen $(\delta_{1\Sigma} \ldots \delta_{n\Sigma})$ mitgeführt.

$$\begin{aligned}
X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_k\delta_{1k} + \cdots + X_n\delta_{1n} &= \delta_{10}\,,\\
X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_k\delta_{2k} + \cdots + X_n\delta_{2n} &= \delta_{20}\,,\\
X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + \cdots + X_k\delta_{3k} + \cdots + X_n\delta_{3n} &= \delta_{30}\,,\\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad & \\
X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_k\delta_{nk} + \cdots + X_n\delta_{nn} &= \delta_{n0}\,.
\end{aligned}$$

$$\delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \cdots \delta_{1n} \quad \text{oder} \quad \delta_{1\Sigma'} = \delta_{11} + \delta_{12} + \cdots \delta_{1n} + \delta_{10}\,. \tag{370}$$

Bei Vorwärtselimination wird die erste Gleichung der Reihe nach mit

$$-\varkappa_{12} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\,,\; -\varkappa_{13} = -\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\,, \ldots,\; -\varkappa_{1n} = -\frac{\delta_{n1}}{\delta_{11}} \tag{371}$$

erweitert und zu den folgenden addiert.

$$\left.\begin{aligned} &X_2\left(\delta_{22}-\delta_{12}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)+X_3\left(\delta_{23}-\delta_{13}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_k\left(\delta_{2k}-\delta_{1k}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_n\left(\delta_{2n}-\delta_{1n}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)\\ &\qquad=\delta_{20}-\delta_{10}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}};\quad \delta_{2\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}},\quad\text{oder}\quad \delta_{2\Sigma'}-\delta_{1\Sigma'}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}},\\ &X_2\left(\delta_{32}-\delta_{12}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)+X_3\left(\delta_{33}-\delta_{13}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_k\left(\delta_{3k}-\delta_{1k}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_n\left(\delta_{3n}-\delta_{1n}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)\\ &\qquad=\delta_{30}-\delta_{10}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}};\quad \delta_{3\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}},\quad\text{oder}\quad \delta_{3\Sigma'}-\delta_{1\Sigma'}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}. \end{aligned}\right\} \tag{372}$$

Auf diese Weise ist X_1 ausgeschlossen und die erste Eliminationsstufe mit $(n-1)$ Gleichungen gebildet worden. Sie ist nach dem Ergebnis der Rechnung unter Beachtung des Maxwellschen Gesetzes ebenfalls zur Hauptdiagonale symmetrisch. Ihre Vorzahlen erhalten im Sinne von C. F. Gauß folgende Bezeichnung:

$$\left.\begin{aligned} &X_2\delta_{22}^{(1)}+X_3\delta_{23}^{(1)}+\cdots+X_k\delta_{2k}^{(1)}+\cdots+X_n\delta_{2n}^{(1)}=\delta_{20}^{(1)};\qquad \delta_{2\Sigma}^{(1)},\qquad \delta_{2\Sigma'}^{(1)},\\ &X_2\delta_{32}^{(1)}+X_3\delta_{33}^{(1)}+\cdots+X_k\delta_{3k}^{(1)}+\cdots+X_n\delta_{3n}^{(1)}=\delta_{30}^{(1)};\qquad \delta_{3\Sigma}^{(1)},\qquad \delta_{3\Sigma'}^{(1)}.\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{373}$$

Die Richtigkeit der Zahlenrechnung wird durch die folgende Identität festgestellt:

$$\delta_{2\Sigma}^{(1)}=\delta_{22}^{(1)}+\delta_{23}^{(1)}+\cdots\delta_{2n}^{(1)}=\delta_{2\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \tag{374}$$

$$\delta_{2\Sigma'}^{(1)}=\delta_{2\Sigma}^{(1)}+\delta_{20}^{(1)}. \tag{375}$$

Hierauf wird X_2 ausgeschlossen, indem die erste Gleichung der ersten Stufe der Reihe nach mit $-\varkappa_{23}=-\delta_{32}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$; $-\varkappa_{24}=-\delta_{42}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$ erweitert und zu den folgenden addiert wird. Auf diese Weise wird die zweite Eliminationsstufe mit $(n-2)$ Unbekannten $X_3 \ldots X_n$ gebildet. Ihre Vorzahlen führen die Bezeichnung $\delta_{33}^{(2)} \ldots \delta_{3n}^{(2)}$ usw. Die Richtigkeit der Rechnung folgt aus

$$\delta_{3\Sigma}^{(2)}=\delta_{33}^{(2)}+\delta_{34}^{(2)}+\cdots\delta_{3n}^{(2)}=\delta_{3\Sigma}^{(1)}-\delta_{2\Sigma}^{(1)}\frac{\delta_{32}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};\qquad \delta_{3\Sigma}^{(1)}=\delta_{3\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}.$$

Die Elimination ergibt schließlich

$$X_n=\frac{\delta_{n0}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}}. \tag{376}$$

In dem Ansatz (372) ist $1\,\delta_{21}/\delta_{11}$ die überzählige Größe X_{12}, welche von $-X_2=1$ erzeugt wird. Demnach sind

$$\delta_{22}-\delta_{12}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}=\delta_{22}^{(1)},\qquad \delta_{2k}-\delta_{1k}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}=\delta_{k2}-\delta_{k1}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}=\delta_{2k}^{(1)} \tag{377}$$

die Verschiebungen der Punkte $2 \ldots k$, welche aus $-X_2=1$ und gleichzeitig durch die $-X_2=1$ zugeordnete überzählige Größe X_{12} entstehen. $\delta_{22}^{(1)} \ldots \delta_{2k}^{(1)}$ sind also Verschiebungen in einem einfach statisch unbestimmten Hauptsystem, in dem X_1 nicht mehr als überzählige Größe auftritt. Ebenso können $\delta_{33}^{(2)} \ldots \delta_{3k}^{(2)}$ als die Verschiebungen der Punkte $3 \ldots k$ eines zweifach statisch unbestimmten Hauptsystems angesehen werden, in dem X_1 und X_2 nicht mehr als überzählige Größen enthalten sind.

Vollständige Vorwärtselimination für fünf überzählige Größen (378).

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
I	1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{10}
			$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	—
	2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{20}
	3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{30}
	4	δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{40}
	5	δ_{51}	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{50}
II	$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
				$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	—
	$3^{(1)}$		$\delta_{32}^{(1)}$	$\delta_{33}^{(1)}$	$\delta_{34}^{(1)}$	$\delta_{35}^{(1)}$	$\delta_{30}^{(1)}$
	$4^{(1)}$		$\delta_{42}^{(1)}$	$\delta_{43}^{(1)}$	$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$
	$5^{(1)}$		$\delta_{52}^{(1)}$	$\delta_{53}^{(1)}$	$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$
III	$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
					$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	—
	$4^{(2)}$			$\delta_{43}^{(2)}$	$\delta_{44}^{(2)}$	$\delta_{45}^{(2)}$	$\delta_{40}^{(2)}$
	$5^{(2)}$			$\delta_{53}^{(2)}$	$\delta_{54}^{(2)}$	$\delta_{55}^{(2)}$	$\delta_{50}^{(2)}$
IV	$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
						$\varkappa_{45}$	—
	$5^{(3)}$				$\delta_{54}^{(3)}$	$\delta_{55}^{(3)}$	$\delta_{50}^{(3)}$
V	$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$

$$\delta_{22}^{(1)} = \delta_{22} - \varkappa_{12}\,\delta_{12}\,,$$
$$\delta_{23}^{(1)} = \delta_{23} - \varkappa_{12}\,\delta_{13}\,,$$
$$\delta_{24}^{(1)} = \delta_{24} - \varkappa_{12}\,\delta_{14}\,,$$
$$\delta_{25}^{(1)} = \delta_{25} - \varkappa_{12}\,\delta_{15}\,,$$
$$\varkappa_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}\,;$$

$$\begin{aligned}\delta_{33}^{(2)} &= \delta_{33}^{(1)} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)}\\ &= \delta_{33} - \varkappa_{13}\,\delta_{13} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)}\,,\\ \delta_{34}^{(2)} &= \delta_{34} - \varkappa_{13}\,\delta_{14} - \varkappa_{23}\,\delta_{24}^{(1)}\,,\\ \delta_{35}^{(2)} &= \delta_{35} - \varkappa_{13}\,\delta_{15} - \varkappa_{23}\,\delta_{25}^{(1)}\,,\end{aligned}$$
$$\varkappa_{13} = \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}\,;$$
$$\varkappa_{23} = \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\,;$$

$$\begin{aligned}\delta_{44}^{(3)} &= \delta_{44}^{(2)} - \varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}\\ &= \delta_{44}^{(1)} - \varkappa_{24}\,\delta_{24}^{(1)} - \varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}\\ &= \delta_{44} - \varkappa_{14}\,\delta_{14} - \varkappa_{24}\,\delta_{24}^{(1)} - \varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}\,,\\ \delta_{45}^{(3)} &= \delta_{45} - \varkappa_{14}\,\delta_{15} - \varkappa_{24}\,\delta_{25}^{(1)} - \varkappa_{34}\,\delta_{35}^{(2)}\,,\end{aligned}$$
$$\varkappa_{14} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}\,;$$
$$\varkappa_{24} = \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\,;$$
$$\varkappa_{34} = \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}\,;$$

$$\begin{aligned}\delta_{55}^{(4)} &= \delta_{55}^{(3)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\\ &= \delta_{55}^{(2)} - \varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\\ &= \delta_{55}^{(1)} - \varkappa_{25}\,\delta_{25}^{(1)} - \varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\\ &= \delta_{55} - \varkappa_{15}\,\delta_{15} - \varkappa_{25}\,\delta_{25}^{(1)} - \varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\,,\end{aligned}$$

I	1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{10}
II	$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
III	$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
IV	$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
V	$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$

$$\varkappa_{15} = \frac{\delta_{15}}{\delta_{11}}\,;$$
$$\varkappa_{25} = \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}}\,;$$
$$\varkappa_{35} = \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}}\,;$$
$$\varkappa_{45} = \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}}\,;$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_{22}^{(1)} &= \delta_{22} - \varkappa_{12}\,\delta_{12}\,; \qquad \delta_{33}^{(2)} = \delta_{33}^{(1)} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)} = \delta_{33} - \varkappa_{13}\,\delta_{13} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)}\,,\\ \delta_{2k}^{(1)} &= \delta_{2k} - \varkappa_{12}\,\delta_{1k}\,, \qquad \delta_{3k}^{(2)} = \delta_{3k}^{(1)} - \varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)} = \delta_{3k} - \varkappa_{13}\,\delta_{1k} - \varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)}\,,\\ \delta_{kk}^{(k-1)} &= \delta_{kk} - \varkappa_{1k}\,\delta_{1k} - \varkappa_{2k}\,\delta_{2k}^{(1)} - \varkappa_{3k}\,\delta_{3k}^{(2)} - \cdots \varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{(k-1)k}^{(k-2)}\,,\\ \delta_{kn}^{(k-1)} &= \delta_{kn} - \varkappa_{1k}\,\delta_{1n} - \varkappa_{2k}\,\delta_{2n}^{(1)} - \varkappa_{3k}\,\delta_{3n}^{(2)} - \cdots \varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{(k-1)n}^{(k-2)}\,,\\ \delta_{k0}^{(k-1)} &= \delta_{k0} - \varkappa_{1k}\,\delta_{10} - \varkappa_{2k}\,\delta_{20}^{(1)} - \varkappa_{3k}\,\delta_{30}^{(2)} - \cdots \varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{(k-1)0}^{(k-2)}\,.\end{aligned}\right\} \quad (379)$$

Die vollständige Elimination bietet eine mehrfache Möglichkeit zur Substitution der Ergebnisse der einen Gleichung in einer anderen derselben Stufe und damit zur unmittelbaren Nachprüfung der Lösung.

b) Die abgekürzte Rechenvorschrift nach C. F. Gauß. Der Algorithmus von Gauß kann im Gegensatz zu (378) auf die erste Gleichung einer jeden Eliminationsstufe beschränkt werden, so daß ein reduzierter Ansatz von n Elastizitätsgleichungen entsteht, die n Hauptsystemen mit ansteigender statischer Unbestimmtheit zugeordnet sind.

$$\left.\begin{array}{rrr}
X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_5\delta_{13}+ & +X_n\delta_{1n} & =\delta_{10}, \\
X_2\delta_{22}^{(1)}+X_3\delta_{23}^{(1)}+ & +X_n\delta_{2n}^{(1)} & =\delta_{20}^{(1)}, \\
X_3\delta_{33}^{(2)}+ & +X_n\delta_{3n}^{(2)} & =\delta_{30}^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
X_{n-1}\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} & +X_n\delta_{(n-1)n}^{(n-2)} & =\delta_{(n-1)0}^{(n-2)}, \\
 & +X_n\delta_{nn}^{(n-1)} & =\delta_{n0}^{(n-1)}.
\end{array}\right\} \qquad (380)$$

Die abgekürzte Vorwärtselimination liefert X_n ebenso wie der vollständige Ansatz und genügt zur Berechnung aller anderen überzähligen Größen X_k $(k = n - 1 \ldots 1)$ durch schrittweises Einsetzen der Ergebnisse in die übrigen Gleichungen des reduzierten Ansatzes (380). Er bedeutet mathematisch die Beseitigung aller Glieder der Matrix (319) unterhalb der Hauptdiagonale. Bei Rückwärtselimination verschwinden alle Glieder oberhalb der Hauptdiagonale. Die Rekursion kann auch als wiederholte Anwendung des Gaußschen Algorithmus in der entgegengesetzten Richtung angesehen werden. Ist die Matrix der Elastizitätsgleichungen symmetrisch zur Nebendiagonale, so ist die Vorwärtselimination mit der Rückwärtselimination identisch.

Die Rechenvorschrift wird an einem fünffach statisch unbestimmten System gezeigt (S. 220).

$$X_5 = \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

Die anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus den Gleichungen $4^{(3)}$, $3^{(2)}$, $2^{(1)}$ und 1 gefunden (378):

k	5	4	3	2	1
$-X_2\varkappa_{k2}$	.	.	.	.	$-X_2\varkappa_{12}$
$-X_3\varkappa_{k3}$	.	.	.	$-X_3\varkappa_{23}$	$-X_3\varkappa_{13}$
$-X_4\varkappa_{k4}$	.	.	$-X_4\varkappa_{34}$	$-X_4\varkappa_{24}$	$-X_4\varkappa_{14}$
$-X_5\varkappa_{k5}$	.	$-X_5\varkappa_{45}$	$-X_5\varkappa_{35}$	$-X_5\varkappa_{25}$	$-X_5\varkappa_{15}$
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\delta_{50}^{(4)}/\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{40}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{30}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{20}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(0)}/\delta_{11}^{(0)}$
$\Sigma_{k0} = X_k$	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1
k	5	4	3	2	1

(382)

Zur Nachprüfung der Ergebnisse können die Elastizitätsgleichungen (1) . . . (5) verwendet werden. (Fortsetzung des Textes S. 223.)

Abgekürzte Rechenvorschrift für die Vorwärtselimination von fünf überzähligen Größen (381)**.

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Kontrollen $[\delta_{i\Sigma} = \sum_{k=1}^{k=5} \delta_{ik}]$	Belastungsglieder δ_{i0}: zur Bestimmung von $X_k =$ β_{5k}	β_{4k}	β_{3k}	β_{2k}	β_{1k}	Belastungsfall ( )
i	k	1	2	3	4	5	Σ	0	0	0	0	0	0
1	δ_{1k}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	$\delta_{1\Sigma}$	0	0	0	0	1	δ_{10}
	$\varkappa_{1k}$	·	δ_{12}/δ_{11}	δ_{13}/δ_{11}	δ_{14}/δ_{11}	δ_{15}/δ_{11}	·	·	·	·	·	*	δ_{10}/δ_{11}
2	δ_{2k}	(δ_{21})	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	$\delta_{2\Sigma}$	0	0	0	1	0	δ_{20}
	$-\varkappa_{12}\,\delta_{1k}$	·	$-\varkappa_{12}\,\delta_{12}$	$-\varkappa_{12}\,\delta_{13}$	$-\varkappa_{12}\,\delta_{14}$	$-\varkappa_{12}\,\delta_{15}$	$-\varkappa_{12}\,\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{12}\,\delta_{10}$
	$\Sigma_{2k} = \delta_{2k}^{(1)}$	·	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	0	0	0	1	·	$\delta_{20}^{(1)}$
	$\varkappa_{2k}$	·	·	$\delta_{23}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	·	·	·	·	*	·	$\delta_{20}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$
3	δ_{3k}	(δ_{31})	(δ_{32})	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	$\delta_{3\Sigma}$	0	0	1	0	0	δ_{30}
	$-\varkappa_{13}\,\delta_{1k}$	·	·	$-\varkappa_{13}\,\delta_{13}$	$-\varkappa_{13}\,\delta_{14}$	$-\varkappa_{13}\,\delta_{15}$	$-\varkappa_{13}\,\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{13}\,\delta_{10}$
	$-\varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)}$	·	·	$-\varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\,\delta_{24}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\,\delta_{25}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\,\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{23}\,\delta_{20}^{(1)}$
	$\Sigma_{3k} = \delta_{3k}^{(2)}$	·	·	$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	0	0	1	·	·	$\delta_{30}^{(2)}$
	$\varkappa_{3k}$	·	·	·	$\delta_{34}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	·	·	·	*	·	·	$\delta_{30}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$
4	δ_{4k}	(δ_{41})	(δ_{42})	(δ_{43})	δ_{44}	δ_{45}	$\delta_{4\Sigma}$	0	1	0	0	0	δ_{40}
	$-\varkappa_{14}\,\delta_{1k}$	·	·	·	$-\varkappa_{14}\,\delta_{14}$	$-\varkappa_{14}\,\delta_{15}$	$-\varkappa_{14}\,\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{14}\,\delta_{10}$
	$-\varkappa_{24}\,\delta_{2k}^{(1)}$	·	·	·	$-\varkappa_{24}\,\delta_{24}^{(1)}$	$-\varkappa_{24}\,\delta_{25}^{(1)}$	$-\varkappa_{24}\,\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{24}\,\delta_{20}^{(1)}$
	$-\varkappa_{34}\,\delta_{3k}^{(2)}$	·	·	·	$-\varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\,\delta_{35}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\,\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{34}\,\delta_{30}^{(2)}$
	$\Sigma_{4k} = \delta_{4k}^{(3)}$	·	·	·	$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	0	1	·	·	·	$\delta_{40}^{(3)}$
	$\varkappa_{4k}$	·	·	·	·	$\delta_{45}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$	·	·	*	·	·	·	$\delta_{40}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$
5	δ_{5k}	(δ_{51})	(δ_{52})	(δ_{53})	(δ_{54})	δ_{55}	$\delta_{5\Sigma}$	1	0	0	0	0	δ_{50}
	$-\varkappa_{15}\,\delta_{1k}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{15}\,\delta_{15}$	$-\varkappa_{15}\,\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{15}\,\delta_{10}$
	$-\varkappa_{25}\,\delta_{2k}^{(1)}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{25}\,\delta_{25}^{(1)}$	$-\varkappa_{25}\,\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{25}\,\delta_{20}^{(1)}$
	$-\varkappa_{35}\,\delta_{3k}^{(2)}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)}$	$-\varkappa_{35}\,\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{35}\,\delta_{30}^{(2)}$
	$-\varkappa_{45}\,\delta_{4k}^{(3)}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}$	$-\varkappa_{45}\,\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{45}\,\delta_{40}^{(3)}$
	$\Sigma_{5k} = \delta_{5k}^{(4)}$	·	·	·	·	$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	1	·	·	·	·	$\delta_{50}^{(4)}$
	·	·	·	·	·	·	·	*	·	·	·	·	$\delta_{50}^{(4)}/\delta_{55}^{(4)}$

* Die Quotienten $1/\delta_{kk}^{(k-1)}$ werden unmittelbar in die Rekursionstabelle (385) eingetragen.

** Die eingeklammerten Vorzahlen sind nur zur Erleichterung der Summenbildung $\delta_{k\Sigma}$ beigefügt.

Berechnung der Vorzahlen β_{ik} eines Ansatzes mit fünf überzähligen Größen (384).

a)

β_{15}	β_{25}	β_{35}	β_{45}	β_{55}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	0
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	0
			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	0
				$\varkappa_{45}$	
				$\delta_{55}^{(4)}$	1

Aus a) folgt $\beta_{55} = \dfrac{1}{\delta_{55}^{(4)}}$.

Durch Rekursion sind folgende Vorzahlen bestimmt:

$\beta_{45} = -\varkappa_{45}\beta_{55}$; $\quad \beta_{35} = -\varkappa_{34}\beta_{45} - \varkappa_{35}\beta_{55}$;

$\beta_{25} = -\varkappa_{23}\beta_{35} - \varkappa_{24}\beta_{45} - \varkappa_{25}\beta_{55}$;

$\beta_{15} = -\varkappa_{12}\beta_{25} - \varkappa_{13}\beta_{35} - \varkappa_{14}\beta_{45} - \varkappa_{15}\beta_{55}$;

$\beta_{45} = \beta_{54}$ usw.

Aus a): $\beta_{54} = \beta_{45}$.

b)

β_{14}	β_{24}	β_{34}	β_{44}	β_{54}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	0
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	0
			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	1
				$\varkappa_{45}$	

$\beta_{44} = \dfrac{1}{\delta_{44}^{(3)}} - \varkappa_{45}\beta_{54}$;

$\beta_{34} = -\varkappa_{34}\beta_{44} - \varkappa_{35}\beta_{54}$;

$\beta_{24} = -\varkappa_{23}\beta_{34} - \varkappa_{24}\beta_{44} - \varkappa_{25}\beta_{54}$;

$\beta_{14} = -\varkappa_{12}\beta_{24} - \varkappa_{13}\beta_{34} - \varkappa_{14}\beta_{44} - \varkappa_{15}\beta_{54}$;

$\beta_{34} = \beta_{43}$ usw.

Aus a) u. b): $\beta_{53} = \beta_{35}$, $\beta_{43} = \beta_{34}$.

c)

β_{13}	β_{23}	β_{33}	β_{43}	β_{53}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	0
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	1
			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	

$\beta_{33} = \dfrac{1}{\delta_{33}^{(2)}} - \varkappa_{34}\beta_{43} - \varkappa_{35}\beta_{53}$,

$\beta_{23} = -\varkappa_{23}\beta_{33} - \varkappa_{24}\beta_{43} - \varkappa_{25}\beta_{53}$,

$\beta_{13} = -\varkappa_{12}\beta_{23} - \varkappa_{13}\beta_{33} - \varkappa_{14}\beta_{43} - \varkappa_{15}\beta_{53}$,

$\beta_{23} = \beta_{32}$ usw.

Aus a), b) u. c):

$\beta_{52} = \beta_{25}$, $\beta_{42} = \beta_{24}$, $\beta_{32} = \beta_{23}$.

d)

β_{12}	β_{22}	β_{32}	β_{42}	β_{52}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	1
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	

$\beta_{22} = \dfrac{1}{\delta_{22}^{(1)}} - \varkappa_{23}\beta_{32} - \varkappa_{24}\beta_{42} - \varkappa_{25}\beta_{52}$,

$\beta_{12} = -\varkappa_{12}\beta_{22} - \varkappa_{13}\beta_{32} - \varkappa_{14}\beta_{42} - \varkappa_{15}\beta_{52}$,

$\beta_{12} = \beta_{21}$ usw.

Aus a), b), c) u. d):

$\beta_{51} = \beta_{15}$, $\beta_{41} = \beta_{14}$, $\beta_{31} = \beta_{13}$, $\beta_{21} = \beta_{12}$.

e)

β_{11}	β_{21}	β_{31}	β_{41}	β_{51}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	1
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	

$\beta_{11} = \dfrac{1}{\delta_{11}} - \varkappa_{12}\beta_{21} - \varkappa_{13}\beta_{31} - \varkappa_{14}\beta_{41} - \varkappa_{15}\beta_{51}$.

Rechenvorschrift in Verbindung mit (381) für die Rekursion eines Ansatzes mit fünf überzähligen Größen zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} (385).

			δ_{50}	δ_{40}	δ_{30}	δ_{20}	δ_{10}	
	i	k	5	4	3	2	1	i
X_5	5	$-\beta_{52}\varkappa_{k2}$	·	·	·		$-\beta_{52}\varkappa_{12}$	5
		$-\beta_{53}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{53}\varkappa_{23}$	$-\beta_{53}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{54}\varkappa_{k4}$	·	·	$-\beta_{54}\varkappa_{34}$	$-\beta_{54}\varkappa_{24}$	$-\beta_{54}\varkappa_{14}$	
		$-\beta_{55}\varkappa_{k5}$	·	$-\beta_{55}\varkappa_{45}$	$-\beta_{55}\varkappa_{35}$	$-\beta_{55}\varkappa_{25}$	$-\beta_{55}\varkappa_{15}$	
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$1/\delta_{55}^{(4)}$	0	0	0	0	
		$X_k = \beta_{5k}$	β_{55}	β_{54}	β_{53}	β_{52}	β_{51}	
X_4	4	$-\beta_{42}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{42}\varkappa_{12}$	4
		$-\beta_{43}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{43}\varkappa_{23}$	$-\beta_{43}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{44}\varkappa_{k4}$	·	·	$-\beta_{44}\varkappa_{34}$	$-\beta_{44}\varkappa_{24}$	$-\beta_{44}\varkappa_{14}$	
		$-\beta_{45}\varkappa_{k5}$	·	$-\beta_{45}\varkappa_{45}$	$-\beta_{45}\varkappa_{35}$	$-\beta_{45}\varkappa_{25}$	$-\beta_{45}\varkappa_{15}$	
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	$1/\delta_{44}^{(3)}$	0	0	0	
		$X_k = \beta_{4k}$	β_{45}	β_{44}	β_{43}	β_{42}	β_{41}	
X_3	3	$-\beta_{32}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{32}\varkappa_{12}$	3
		$-\beta_{33}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{33}\varkappa_{23}$	$-\beta_{33}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{34}\varkappa_{k4}$	·	·	$-\beta_{34}\varkappa_{34}$	$-\beta_{34}\varkappa_{24}$	$-\beta_{34}\varkappa_{14}$	
		$-\beta_{35}\varkappa_{k5}$	·	·	$-\beta_{35}\varkappa_{35}$	$-\beta_{35}\varkappa_{25}$	$-\beta_{35}\varkappa_{15}$	
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	·	$1/\delta_{33}^{(2)}$	0	0	
		$X_k = \beta_{3k}$	β_{35}	β_{34}	β_{33}	β_{32}	β_{31}	
X_2	2	$-\beta_{22}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{22}\varkappa_{12}$	2
		$-\beta_{23}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{23}\varkappa_{23}$	$-\beta_{23}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{24}\varkappa_{k4}$	·	·	·	$-\beta_{24}\varkappa_{24}$	$-\beta_{24}\varkappa_{14}$	
		$-\beta_{25}\varkappa_{k5}$	·	·	·	$-\beta_{25}\varkappa_{25}$	$-\beta_{25}\varkappa_{15}$	
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	·	·	$1/\delta_{22}^{(1)}$	0	
		$X_k = \beta_{2k}$	β_{25}	β_{24}	β_{23}	β_{22}	β_{21}	
X_1	1	$-\beta_{12}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{12}\varkappa_{12}$	1
		$-\beta_{13}\varkappa_{k3}$	·	·	·	·	$-\beta_{13}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{14}\varkappa_{k4}$	·	·	·	·	$-\beta_{14}\varkappa_{14}$	
		$-\beta_{15}\varkappa_{k5}$	·	·	·	·	$-\beta_{15}\varkappa_{15}$	
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	·	·	·	$1/\delta_{11}$	
		$X_k = \beta_{1k}$	β_{15}	β_{14}	β_{13}	β_{12}	β_{11}	

k	1	2	3	4	5
$X_1 \delta_{k1}$	$X_1 \delta_{11}$	$X_1 \delta_{21}$	$X_1 \delta_{31}$	$X_1 \delta_{41}$	$X_1 \delta_{51}$
$X_2 \delta_{k2}$	$X_2 \delta_{12}$	$X_2 \delta_{22}$	$X_2 \delta_{32}$	$X_2 \delta_{42}$	$X_2 \delta_{52}$
$X_3 \delta_{k3}$	$X_3 \delta_{13}$	$X_3 \delta_{23}$	$X_3 \delta_{33}$	$X_3 \delta_{43}$	$X_3 \delta_{53}$
$X_4 \delta_{k4}$	$X_4 \delta_{14}$	$X_4 \delta_{24}$	$X_4 \delta_{34}$	$X_4 \delta_{44}$	$X_4 \delta_{54}$
$X_5 \delta_{k5}$	$X_5 \delta_{15}$	$X_5 \delta_{25}$	$X_5 \delta_{35}$	$X_5 \delta_{45}$	$X_5 \delta_{55}$
$\Sigma_k = \delta_{k0}$	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}

(383)

c) Die Berechnung der konjugierten Matrix. Um die überzähligen Größen für mehrere Belastungsfälle ohne Wiederholung der Elimination anzugeben, wird die konjugierte Matrix zu (319) berechnet. Mit dieser ist nach (326)

$$X_k = \sum_{h=1}^{h=n} \beta_{kh} \delta_{h0} \quad \text{und} \quad \beta_{hk} = \beta_{kh}.$$

Die Vorzahlen β_{hk} sind nach S. 166 die überzähligen Größen X_h $(h = 1 \ldots n)$ für $\delta_{k0} = 1$. Um die $1/2 \cdot n\,(n+1)$ unabhängigen Glieder der konjugierten Matrix übersichtlich zu berechnen, wird entweder mit der Bestimmung der β_{kn} aus $\delta_{n0} = 1$ durch Vorwärtselimination oder mit der Bestimmung der β_{k1} aus $\delta_{10} = 1$ in Verbindung mit einer Rückwärtselimination begonnen. Die übrigen Vorzahlen ergeben sich auf Grund der Symmetrie der konjugierten Matrix zur Hauptdiagonale durch Rekursion. Zunächst sind mit β_{nn} die Vorzahlen $\beta_{kn} \ldots \beta_{1n}$ bestimmt. Alle übrigen β_{hk} $(h = k \ldots 1)$ werden stets aus den ersten k Gleichungen bestimmt, da die übrigen Vorzahlen $\beta_{(k+1)k} = \beta_{k(k+1)} \ldots$ bekannt sind. Die Berechnung schließt mit dem Werte von β_{11}. Er wird bei allen unsymmetrischen Systemen, die keine zur Nebendiagonale symmetrische Matrix besitzen, durch Rückwärtselimination mit $\delta_{10} = 1$ geprüft.

Die Untersuchung wird auf S. 221 an einem System mit fünf überzähligen Größen bei Vorwärtselimination nach (381) gezeigt [Rechenvorschrift in Verbindung mit (381): S. 222].

Die Elastizitätsgleichungen (319) müssen nach S. 167 durch die Vorzahlen der konjugierten Matrix erfüllt werden. Sie gelten als Rechenprobe; z. B. ist

Kontrollen:

k	1	2	3	4	5
$\beta_{1k} \delta_{k1}$	$\beta_{11} \delta_{11}$	$\beta_{12} \delta_{21}$	$\beta_{13} \delta_{31}$	$\beta_{14} \delta_{41}$	$\beta_{15} \delta_{51}$
$\beta_{2k} \delta_{k2}$	$\beta_{21} \delta_{12}$	$\beta_{22} \delta_{22}$	$\beta_{23} \delta_{32}$	$\beta_{24} \delta_{42}$	$\beta_{25} \delta_{52}$
$\beta_{3k} \delta_{k3}$	$\beta_{31} \delta_{13}$	$\beta_{32} \delta_{23}$	$\beta_{33} \delta_{33}$	$\beta_{34} \delta_{43}$	$\beta_{35} \delta_{53}$
$\beta_{4k} \delta_{k4}$	$\beta_{41} \delta_{14}$	$\beta_{42} \delta_{24}$	$\beta_{43} \delta_{34}$	$\beta_{44} \delta_{44}$	$\beta_{45} \delta_{54}$
$\beta_{5k} \delta_{k5}$	$\beta_{51} \delta_{15}$	$\beta_{52} \delta_{25}$	$\beta_{53} \delta_{35}$	$\beta_{54} \delta_{45}$	$\beta_{55} \delta_{55}$
$\Sigma_k = 1$	1	1	1	1	1

(386)

Die Bedingungen $\sum_h \beta_{hi} \delta_{kh} = 0$ für $\delta_{i0} = 1$ werden in der Regel nur dann geprüft, wenn nur ein Teil der Nebenglieder der Matrix vorhanden ist.

Anwendung des Gaußschen Algorithmus zur Untersuchung des Sägedachrahmens, Abb. 215. 1. Geometrische Grundlagen.

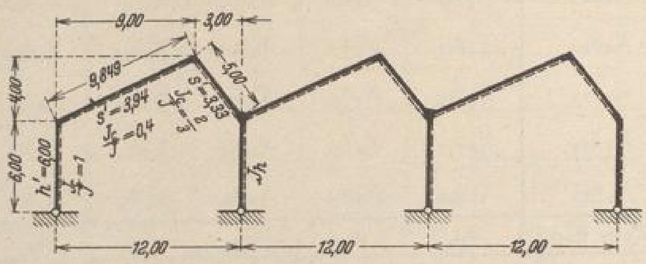

Abb. 215.

Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J, reduzierte Stablängen s', h' Abb. 215.

$$J_c = J_h\,; \qquad \zeta_h = 1\,, \qquad E_b = 210\,\mathrm{t/cm^2}\,, \qquad \alpha_t = 0{,}00001\,.$$

2. Gleichförmig verteilte Belastung der Riegel a, b, c mit $p = 1$ t/m.

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist fünffach statisch unbestimmt. Hauptsystem und statisch unbestimmte Schnittkräfte sind in Abb. 216 angegeben. Als überzählige Größen X_2 und X_4 werden die $1/h$fachen Beträge der waagerechten Komponenten Y_2, Y_4 der Schnittkräfte verwendet. Biegungsmomente des Hauptsystems in Abb. 216.

4. Die Vorzahlen δ_{ik} werden ohne die Mitwirkung der Quer- und Längskräfte angeschrieben und zur Abkürzung der Rechnung dabei in die Anteile zerlegt, die auf die Riegel (a, b, c) und auf die Pfosten d entfallen.

$$\begin{aligned}
\delta_{11} = \delta_{33} &= \delta_{11,a} + \delta_{11,b} &&= 3{,}306 + 1{,}793 = 5{,}1\\
\delta_{12} = \delta_{34} &= \delta_{12,a} + \delta_{11,b} &&= -2{,}668 + 1{,}793 = -0{,}875\\
\delta_{13} = \delta_{23} &= \delta_{13,b} &&= +1{,}086\\
\delta_{14} &= \delta_{14,b} &&= -2{,}635\\
\delta_{22} = \delta_{44} &= \delta_{22,a} + \delta_{11,b} + 2\,\delta_{22,d} &&= 4{,}556 + 1{,}793 + 4{,}0 = 10{,}349\\
\delta_{24} &= \delta_{14,b} - \delta_{22,d} &&= -2{,}635 - 2{,}0 = -4{,}635\\
\delta_{35} &= \delta_{35,c} &&= +3{,}72\\
\delta_{45} &= \delta_{35,c} + \delta_{22,d} &&= +3{,}72 + 2{,}0 = +5{,}72\\
\delta_{55} &= \delta_{55,c} + 2\,\delta_{22,d} &&= +13{,}19 + 4{,}0 = +17{,}19
\end{aligned}$$

$$\delta_{11,a} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2 + 3{,}33 \cdot \frac{1}{3} \cdot (0{,}75^2 + 0{,}75 \cdot 1{,}0 + 1{,}0^2) = 3{,}306$$

$$\delta_{11,b} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 0{,}25 + 0{,}25^2) + 3{,}33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}25^2 = 1{,}793$$

$$\delta_{12,a} = -3{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}75\,(2 \cdot 0{,}917 + 1) - 3{,}33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}917\,(2 \cdot 0{,}75 + 1) = -2{,}668$$

$$\delta_{13,b} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}75\,(2 \cdot 0{,}25 + 1) + 3{,}33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}25\,(2 \cdot 0{,}75 + 1) = 1{,}086$$

$$\delta_{14,b} = -3{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot [1{,}0\,(2 \cdot 1{,}0 + 0{,}917) + 0{,}25\,(2 \cdot 0{,}917 + 1{,}0)] - \frac{3{,}33}{3} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}917 = -2{,}635$$

$$\delta_{22,a} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 0{,}917 + 0{,}917^2) + 3{,}33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}917^2 = 4{,}556\,,$$

$$\delta_{22,d} = 6{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}0^2 = 2{,}00\,; \qquad \delta_{55,c} = (3{,}94 + 3{,}33) \cdot \frac{1}{3} \cdot [1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 1{,}667 + 1{,}667^2] = 13{,}19\,,$$

$$\delta_{35,c} = \frac{3{,}94}{6} \cdot [1{,}0\,(2 \cdot 1{,}0 + 1{,}667) + 0{,}25\,(2 \cdot 1{,}667 + 1{,}0)] + \frac{3{,}33}{6} \cdot 0{,}25 \cdot (2 \cdot 1{,}667 + 1{,}0) = 3{,}72\,.$$

(Fortsetzung des Textes auf S. 228.)

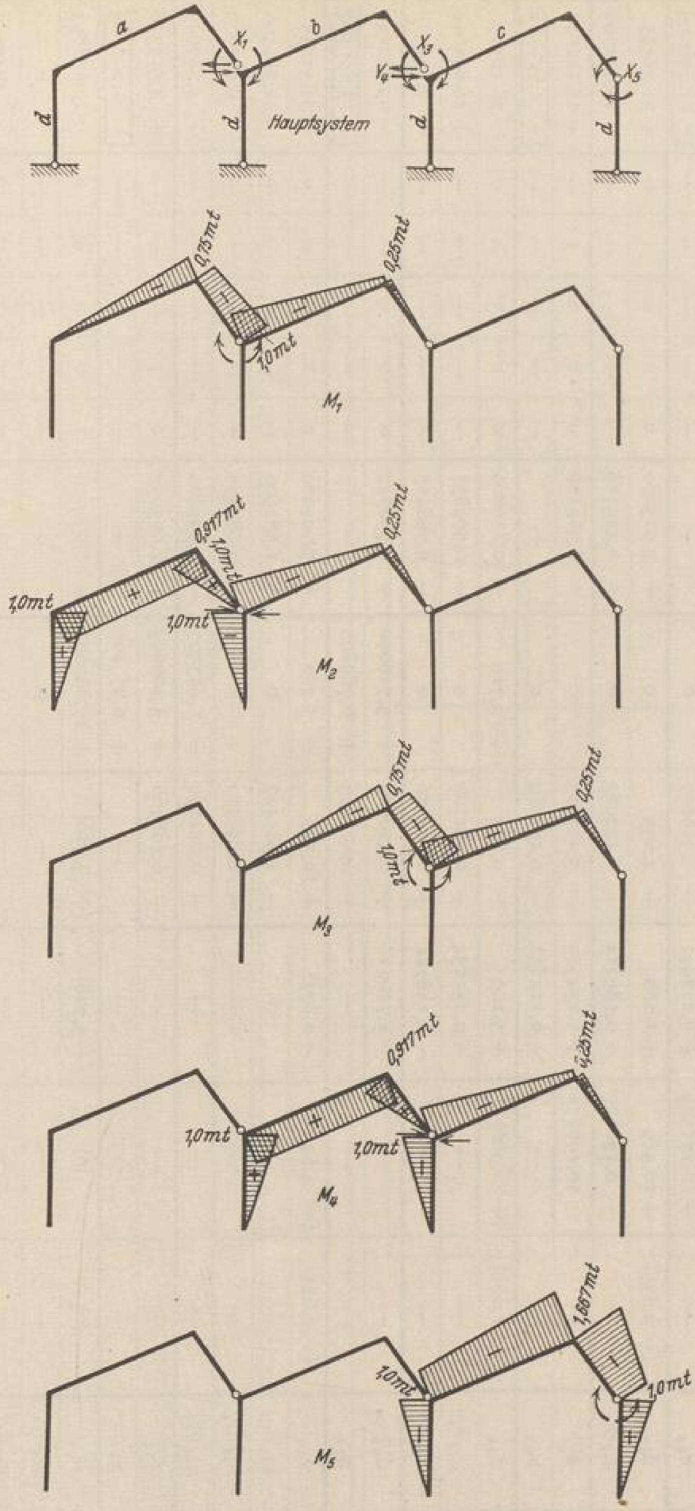
a
b
c
X_1
X_3
X_4
X_5
d
Hauptsystem
0,75mt
0,25mt
1,0mt
M_1
0,917mt
1,0mt
M_2
M_3
M_4
1,667mt
M_5

Abb. 216.

Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus (381).

	X_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\Sigma\,\delta_{i\Sigma}$	Belastungsglieder δ_{i0} zur Bestimmung von $X_k =$					Belastungsglieder δ_{i0} aus 4. für Belastungsfall 2.
i	k	1	2	3	4	5		β_{k5}	β_{k4}	β_{k3}	β_{k2}	β_{k1}	
1	δ_{1k}	+ 5,100	− 0,875	+ 1,086	− 2,635	0	+ 2,676000	0	0	0	0	1	− 78,16527
	$\varkappa_{1k}$	—	− 0,171569	+ 0,212941	− 0,516667	0	—	—	—	—	—	—	$\boxed{-\ 15,326523}$
2	δ_{2k}	(− 0,875)	+ 10,349	+ 1,086	− 4,635	0	+ 5,925000	0	0	0	1	0	+ 31,52335
	$-\varkappa_{12}\,\delta_{1k}$	—	− 0,150123	+ 0,186324	− 0,452083	0	+ 0,459118	—	—	—	—	—	− 13,410708
	$\delta_{2k}^{(1)}$	—	10,198878	+ 1,272324	− 5,087083	0	+ 6,384118	0	0	0	1	—	+ 18,112643
	$\varkappa_{2k}$	—	—	+ 0,124751	− 0,498789	0	—	—	—	—	—	—	$\boxed{+\ 1,775945}$
3	δ_{3k}	(+ 1,086)	(+ 1,086)	+ 5,100	− 0,875	+ 3,720	+ 10,117000	0	0	1	0	0	− 78,16527
	$-\varkappa_{13}\,\delta_{1k}$	—	—	− 0,231254	+ 0,561100	0	− 0,569831	—	—	—	—	—	+ 16,644604
	$-\varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)}$	—	—	− 0,158724	+ 0,634620	0	− 0,796427	—	—	—	—	—	− 2,259576
	$\delta_{3k}^{(2)}$	—	—	+ 4,710028	+ 0,320720	+ 3,720000	+ 8,750742	0	0	1	—	—	− 63,780242
	$\varkappa_{3k}$	—	—	—	+ 0,068093	+ 0,789805	—	—	—	—	—	—	$\boxed{-\ 13,541389}$
4	δ_{4k}	(− 2,635)	(− 4,635)	(− 0,875)	+ 10,349	+ 5,720	+ 7,924000	0	1	0	0	0	+ 31,52335
	$-\varkappa_{14}\,\delta_{1k}$	—	—	—	− 1,361417	0	+ 1,382600	—	—	—	—	—	− 40,385390
	$-\varkappa_{24}\,\delta_{2k}^{(1)}$	—	—	—	− 2,537379	0	+ 3,184325	—	—	—	—	—	+ 9,034379
	$-\varkappa_{34}\,\delta_{3k}^{(2)}$	—	—	—	− 0,021839	− 0,253307	− 0,595866	—	—	—	—	—	+ 4,342999
	$\delta_{4k}^{(3)}$	—	—	—	+ 6,428366	+ 5,466693	+ 11,895059	0	1	—	—	—	+ 4,515338
	$\varkappa_{4k}$	—	—	—	—	+ 0,850402	—	—	—	—	—	—	$\boxed{+\ 0,702408}$
5	δ_{5k}	(0)	(0)	(+ 3,720)	(+ 5,720)	+ 17,19000	+ 26,630000	1	0	0	0	0	− 109,68863
	$-\varkappa_{15}\,\delta_{1k}$	—	—	—	—	0	0	—	—	—	—	—	0
	$-\varkappa_{25}\,\delta_{2k}^{(1)}$	—	—	—	—	0	0	—	—	—	—	—	0
	$-\varkappa_{35}\,\delta_{3k}^{(2)}$	—	—	—	—	− 2,938076	− 6,911382	—	—	—	—	—	+ 50,373970
	$-\varkappa_{45}\,\delta_{4k}^{(3)}$	—	—	—	—	− 4,648886	− 10,115579	—	—	—	—	—	− 3,839851
	$\delta_{5k}^{(4)}$	—	—	—	—	+ 9,603039	+ 9,603039	1	—	—	—	—	− 63,154511
		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\boxed{-\ 6,576513}$

Rekursion zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} (385).

i	5					4			
k	5	4	3	2	1	4	3	2	1
$-\beta_{i2}\varkappa_{k2}$	—	—	—	—	− 0,005947	—	—	—	+ 0,018597
$-\beta_{i3}\varkappa_{k3}$	—	—	—	+ 0,009507	+ 0,016228	—	—	− 0,006762	− 0,011546
$-\beta_{i4}\varkappa_{k4}$	—	—	+ 0,006035	− 0,044172	− 0,045755	—	− 0,015720	+ 0,115154	+ 0,119283
$-\beta_{i5}\varkappa_{k5}$	—	− 0,088559	− 0,082246	0	0	+ 0,075311	+ 0,069944	0	0
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\frac{1}{9{,}60303}$	0	0	0	0	0,155561	0	0	0
$X_k = \beta_{ik}$	+ 0,104134	− 0,088559	− 0,076211	− 0,034665	− 0,035474	+ 0,230872	+ 0,054224	+ 0,108392	+ 0,126334
k	5	4	3	2	1	4	3	2	1
	$X_k = \beta_{5k}$					$X_k = \beta_{4k}$			

i	3			2		1
k	3	2	1	2	1	1
$-\beta_{i2}\varkappa_{k2}$	—	—	− 0,001113	—	+ 0,026237	+ 0,014347
$-\beta_{i3}\varkappa_{k3}$	—	− 0,033535	− 0,057242	+ 0,000809	+ 0,001381	+ 0,006460
$-\beta_{i4}\varkappa_{k4}$	− 0,003693	+ 0,027046	+ 0,028016	+ 0,054065	+ 0,056003	+ 0,065273
$-\beta_{i5}\varkappa_{k5}$	+ 0,060192	0	0	0	0	0
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	+ 0,212313	0	0	+ 0,098050	0	+ 0,196078
$X_k = \beta_{ik}$	+ 0,268812	− 0,006489	− 0,030339	+ 0,152924	+ 0,083621	+ 0,282158
k	3	2	1	2	1	1
	$X_k = \beta_{3k}$			$X_k = \beta_{2k}$		$X_k = \beta_{1k}$

Belastungszahlen (Abb. 217):

$$\delta_{10} = \delta_{30} = \delta_{10,a} + \delta_{10,b} = -44{,}18730 - 33{,}97797 = -78{,}16527;$$
$$\delta_{20} = \delta_{40} = \delta_{20,a} + \delta_{20,b} = 65{,}50132 - 33{,}97797 = +31{,}52335;$$
$$\delta_{50} = -109{,}68863;$$
$$\delta_{10,a} = -\{3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}75 \cdot (13{,}5 + 2 \cdot 16{,}875)] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}75(13{,}5 + 2 \cdot 7{,}875) + 1{,}0 \cdot 2 \cdot 7{,}875]\}$$
$$= -44{,}18730;$$
$$\delta_{10,b} = -\{3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}25 \cdot 47{,}25 + 1{,}0 \cdot 2 \cdot 16{,}875] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 0{,}25 \cdot 29{,}25\} = -33{,}97797;$$
$$\delta_{20,a} = 3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}917 \cdot 47{,}25 + 1{,}0 \cdot 33{,}75] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 0{,}917 \cdot 29{,}25 = +65{,}50132;$$
$$\delta_{20,b} = \delta_{10,b};$$
$$\delta_{50} = -\{3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[1{,}667 \cdot 47{,}25 + 1{,}0 \cdot 33{,}750] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6}[1{,}667 \cdot 29{,}25 + 1{,}0 \cdot 15{,}75]\}$$
$$= -109{,}68863.$$

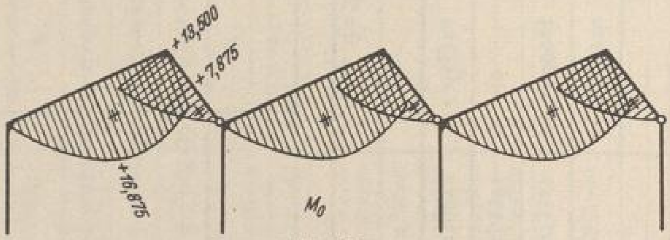

Abb. 217.

5. Matrix der geometrischen Bedingungen mit den Belastungszahlen für die in 2. vorgeschriebene Belastung.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	(δ_{k0})
(1)	5,100	− 0,875	+ 1,086	− 2,635	0	− 78,16527
(2)	− 0,875	+ 10,349	+ 1,086	− 4,635	0	+ 31,52335
(3)	+ 1,086	+ 1,086	+ 5,100	− 0,875	+ 3,720	− 78,16527
(4)	− 2,635	− 4,635	− 0,875	+ 10,349	+ 5,720	+ 31,52335
(5)	0	0	+ 3,720	+ 5,720	+ 17,190	− 109,68863

6. Auflösung des Ansatzes. Die statisch überzähligen Größen werden entweder mit den Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix nach (324) berechnet oder mit Einbeziehung der Belastungszahlen δ_{i0} in den Gaußschen Algorithmus unmittelbar gewonnen. Beide Lösungen sind durch die Vorwärtselimination S. 226 vorbereitet. Rekursion zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} auf S. 227.

Kontrolle (386):

k	1	2	3	4	5
$\beta_{1k} \cdot \delta_{1k}$	+ 1,439006	− 0,073168	− 0,032948	− 0,332890	0
$\beta_{2k} \cdot \delta_{2k}$	− 0,073168	+ 1,582610	− 0,007047	− 0,502397	0
$\beta_{3k} \cdot \delta_{3k}$	− 0,032948	− 0,007047	+ 1,370941	− 0,047446	− 0,283505
$\beta_{4k} \cdot \delta_{4k}$	− 0,332890	− 0,502397	− 0,047446	+ 2,389294	− 0,506557
$\beta_{5k} \cdot \delta_{5k}$	0	0	− 0,283505	− 0,506557	+ 1,790063
1	1,000000	0,999998	0,999995	1,000004	1,000001

Mit $p = 0{,}01$ und $\varphi = \pm p \sum_i \sum_k |\beta_{ik}\,\delta_{ik}| = \pm p\, 12{,}1$ wird nach (331) der mögliche Fehler von X_k aus der Nennerdeterminante der Bedingungsgleichungen ca. $\pm 0{,}12\, X_k$.

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ik}:

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	+ 0,282158	+ 0,083621	− 0,030339	+ 0,126334	− 0,035474
X_2	+ 0,083621	+ 0,152924	− 0,006489	+ 0,108392	− 0,034665
X_3	− 0,030339	− 0,006489	+ 0,268812	+ 0,054224	− 0,076211
X_4	+ 0,126334	+ 0,108392	+ 0,054224	+ 0,230872	− 0,088559
X_5	− 0,035474	− 0,034665	− 0,076211	− 0,088559	+ 0,104134

Anwendung der Matrix zur Berechnung der überzähligen Größen X_k.

$$X_1 = +0{,}282158\,\delta_{10} + 0{,}083621\,\delta_{20} - 0{,}030339\,\delta_{30} + 0{,}126334\,\delta_{40} - 0{,}035474\,\delta_{50},$$
$$X_2 = +0{,}083621\,\delta_{10} + 0{,}152924\,\delta_{20} - 0{,}006489\,\delta_{30} + 0{,}108392\,\delta_{40} - 0{,}034665\,\delta_{50},$$
$$X_3 = -0{,}030339\,\delta_{10} - 0{,}006489\,\delta_{20} + 0{,}268812\,\delta_{30} + 0{,}054224\,\delta_{40} - 0{,}076211\,\delta_{50},$$
$$X_4 = +0{,}126334\,\delta_{10} + 0{,}108392\,\delta_{20} + 0{,}054224\,\delta_{30} + 0{,}230872\,\delta_{40} - 0{,}088559\,\delta_{50},$$
$$X_5 = -0{,}035474\,\delta_{10} - 0{,}034665\,\delta_{20} - 0{,}076211\,\delta_{30} - 0{,}088559\,\delta_{40} + 0{,}104134\,\delta_{50}.$$

Mit den Belastungszahlen nach 4. aus der Belastung 2. ergeben sich folgende statisch überzählige Größen:

$$X_1 = -9{,}174075\text{ mt}; \quad X_2 = +6{,}010664\text{ t}; \quad X_3 = -8{,}775876\text{ mt};$$
$$X_4 = +6{,}295086\text{ t}; \quad X_5 = -6{,}576513\text{ mt}.$$

Die Vorwärtselimination nach Gauß, S. 226, liefert unter Einbeziehung der Belastungszahlen $X_5 = -6{,}576513$ mt. Die anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion gewonnen.

Rekursion mit Rechenprobe (382).

k	5	4	3	2	1
$-X_2\varkappa_{k2}$					+ 1,031241
$-X_3\varkappa_{k3}$				+ 1,094802	+ 1,868746
$-X_4\varkappa_{k4}$			− 0,428652	+ 3,139917	+ 3,252461
$-X_5\varkappa_{k5}$		+ 5,592678	+ 5,194165	0	0
$X_k^{(k)} = \frac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}}$	− 6,576513	+ 0,702408	− 13,541389	+ 1,775945	− 15,326523
$\Sigma_{k0} = X_k =$	− 6,576513	+ 6,295086	− 8,775876	+ 6,010664	− 9,174075
$X_k \cdot \delta_{k0}$	+ 721,368701	+ 198,442199	+ 685,968717	+ 189,476265	+ 717,094049
$X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$	+ 415,336463	+ 3,171610	+ 863,673067	+ 32,167058	+1198,001808
k	5	4	3	2	1

Kontrolle: $\sum X_k \cdot \delta_{k0} = \sum X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$ [vgl. (486) S. 295 mit X_k statt Y_k]

$$\underline{2512{,}3499 \approx 2512{,}3500.}$$

Kontrolle durch Einsetzen in die Bedingungsgleichungen (383):

k	1	2	3	4	5
$X_1 \cdot \delta_{1k}$	$-46{,}787781$	$+\ 8{,}027315$	$-\ 9{,}963045$	$+24{,}173687$	0
$+X_2 \cdot \delta_{2k}$	$-\ 5{,}259331$	$+62{,}204361$	$+\ 6{,}527581$	$-27{,}859428$	0
$+X_3 \cdot \delta_{3k}$	$-\ 9{,}530602$	$-\ 9{,}530602$	$-44{,}756972$	$+\ 7{,}678892$	$-\ 32{,}646262$
$+X_4 \cdot \delta_{4k}$	$-16{,}587553$	$-29{,}177726$	$-\ 5{,}508201$	$+65{,}147851$	$+\ 36{,}007895$
$+X_5 \delta_{5k}$	0	0	$-24{,}464629$	$-37{,}617655$	$-113{,}050260$
δ_{k0}	$-78{,}165267$	$+31{,}523348$	$-78{,}165266$	$+31{,}523347$	$-109{,}688627$

7. Stütz- und Schnittkräfte des Stabwerks für die Belastung 2. Berechnung der Biegungsmomente in den Querschnitten 5, 6 und 9 durch Superposition des statisch bestimmten und statisch unbestimmten Anteils nach (288) (Abb. 218).

$$
\begin{array}{lllllll}
M & = M_0 - & X_1 M_1 & - \quad X_2 M_2 & - X_3 M_3 - & X_4 M_4 & - X_5 M_5 \\
M_{(5)} & = 0 & 0 & -6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \quad = -6{,}0107 \text{ mt} \\
M_{(9)} & = 13{,}5 & -9{,}1741 \cdot 0{,}75 & -6{,}0107 \cdot 0{,}917 & 0 & 0 & 0 \quad = +1{,}1076 \text{ mt}
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lllllll}
M_{(6)(9)} & = 0 & -9{,}1741 \cdot 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0 \quad = -9{,}1741 \text{ mt} \\
M_{(6)(2)} & = 0 & 0 & +6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & -6{,}2951 \cdot 1{,}0 & 0 \quad = -0{,}2844 \text{ mt} \\
M_{(6)(10)} & = 0 & -9{,}1741 \cdot 1{,}0 & +6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & -6{,}2951 \cdot 1{,}0 & 0 \quad = -9{,}4585 \text{ mt}
\end{array}
\right.
$$

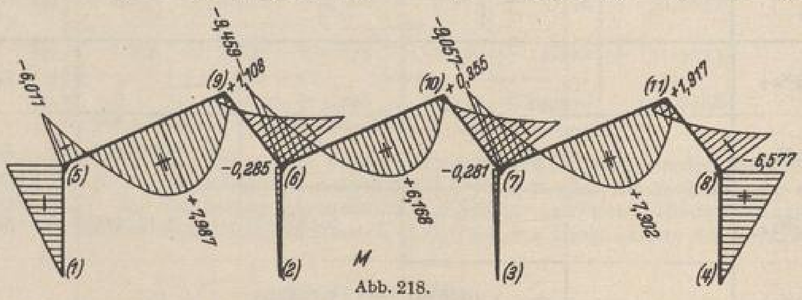

Abb. 218.

Auflösung dreigliedriger Ansätze. Ansätze in der allgemeinen Form (319) sind selten. Die Bedingungen für die Verträglichkeit der Formänderungen der Hauptsysteme hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke liefern meist regelmäßige Ansätze von Gleichungen mit drei, fünf oder sieben Unbekannten, deren Anzahl am Anfang und Ende des Ansatzes abnimmt. Am einfachsten ist der dreigliedrige Ansatz. Er bildet mit der Matrix auf S. 231 die Grundlage für die Berechnung der wichtigsten hochgradig statisch unbestimmten Tragwerke.

Die Vorzahlen δ_{ik}, δ_{i0} bezeichnen einzelne Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems. Während die Hauptglieder δ_{kk} der Matrix stets positiv sind, können beide Nebenglieder $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{k(k+1)}$ einer Gleichung (k) positiv oder negativ sein oder auch das Vorzeichen wechseln. Die Tragwerke mit dreigliedrigen Elastizitätsgleichungen können hiernach in drei Gruppen mit besonderen, von der Vorzeichenfolge abhängigen Eigenschaften des Kräftebildes zusammengefaßt werden.

Die Lösung wird in jedem Falle nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus

Matrix dreigliedriger Gleichungen.

X_1	X_2	X_3		X_{k-2}	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}		X_{n-2}	X_{n-1}	X_n	
δ_{11}	δ_{12}											δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}										δ_{20}
				$\delta_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}$	$\delta_{(k-1)k}$						$\delta_{(k-1)0}$
					$\delta_{k(k-1)}$	δ_{kk}	$\delta_{k(k+1)}$					δ_{k0}
									$\delta_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}$
										$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	δ_{n0}

(387)

Reduzierte Matrix bei Vorwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2	X_3		X_{k-1}	X_k	X_{k+1}		X_{n-1}	X_n		
δ_{11}	δ_{12}									$\varkappa_{12}$	δ_{10}
	$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}								$\varkappa_{23}$	$\delta_{20}^{(1)}$
				$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}$	$\delta_{(k-1)k}$					$\varkappa_{(k-1)k}$	$\delta_{(k-1)0}^{(k-2)}$
					$\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\delta_{k(k+1)}$				$\varkappa_{k(k+1)}$	$\delta_{k0}^{(k-1)}$
								$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\varkappa_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}^{(n-2)}$
									$\delta_{nn}^{(n-1)}$		$\delta_{n0}^{(n-1)}$

(388)

(381) entweder für eine ausgezeichnete Belastung angegeben oder nach (385) zur konjugierten Matrix entwickelt.

a) Rechenvorschrift bei Vorwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 231).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = 2 \ldots n$ aus

$$\delta_{kk}^{(k-1)} = \delta_{kk} - \frac{\delta^2_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}, \ldots \quad \text{und} \quad \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{nn} - \frac{\delta^2_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}},$$

die Belastungsglieder aus

$$\delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \delta^{(k-2)}_{(k-1)0} \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}. \tag{389}$$

Damit wird

$$X_n = \frac{\delta^{(n-1)}_{n0}}{\delta^{(n-1)}_{nn}}. \tag{390}$$

Die überzähligen Größen $X_{n-1} \ldots X_k \ldots X_1$ werden aus den Gleichungen der reduzierten Matrix durch Rekursion gefunden.

Die konjugierte Matrix.

Die Vorzahl $X_n = \beta_{nn}$ der konjugierten Matrix entsteht bei $\delta_{10} = 0, \ldots \delta_{(n-1)0} = 0$, $\delta_{n0} = 1$. Sie ist nach (390)

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta^{(n-1)}_{nn}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \varkappa_{(n-1)n}}. \tag{391}$$

Die Eliminationskoeffizienten $\varkappa_{12} \ldots \varkappa_{(k-1)k} \ldots \varkappa_{(n-1)n}$ sind allein durch die elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und nach der reduzierten Matrix Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen absteigender Richtung X_k, X_{k-1} des homogenen Ansatzes mit $\delta_{n0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{X_1}{X_2} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \varkappa_{12}; \quad -\frac{X_2}{X_3} = \frac{\delta_{23}}{\delta^{(1)}_{22}} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{22} - \delta_{21}\varkappa_{12}} = \varkappa_{23}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)}\varkappa_{(k-2)(k-1)}} = \varkappa_{(k-1)k}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\frac{X_{n-1}}{X_n} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)}\varkappa_{(n-2)(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)n}.
\end{aligned}\right| \tag{392}$$

Die Vorzahl β_{nn} des dreigliedrigen Gleichungssatzes wird demnach durch die allmähliche Entwicklung der Kennbeziehungen in der Form eines Kettenbruches unmittelbar aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen angeschrieben. Hierbei entstehen gleichzeitig auch die Formänderungen $\delta_{kk}^{(k-1)}$ und die Kennbeziehungen $\varkappa_{12} \ldots \varkappa_{(k-1)k} \ldots \varkappa_{(n-1)n}$.

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)}\varkappa_{(n-1)n}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \dfrac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)}\varkappa_{(n-2)(n-1)}}} \tag{393}$$

$$\beta_{nn} = \cfrac{1}{\underbrace{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-1)n}}{\underbrace{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-2)(n-1)}}{\underbrace{\delta_{(n-2)(n-2)} - \cdots \delta_{32} \overbrace{\cfrac{\delta_{23}}{\underbrace{\delta_{22} - \delta_{21} \overbrace{\cfrac{\delta_{12}}{\underbrace{\delta_{11}}_{\delta^{(0)}_{11}}}}^{\varkappa_{12}}}_{\delta^{(1)}_{22}}}}^{\varkappa_{23}}}_{\delta^{(n-3)}_{(n-2)(n-2)}}}}^{\varkappa_{(n-2)(n-1)}}}_{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}}}}^{\varkappa_{(n-1)n}}}_{\delta^{(n-1)}_{nn}}} \tag{394}$$

Die Vorzahlen $\beta_{(n-1)n} \cdots \beta_{(k-1)n} \cdots \beta_{1n}$ werden daraus durch wiederholte Multiplikation mit den negativen Kennziffern berechnet.

Die Spalte $\beta_{k(n-1)}$ der konjugierten Matrix besteht aus den Unbekannten X_k für die Belastungszahlen $\delta_{k0} = 0$ $(k = 1, \ldots, (n-2), n)$; $\delta_{(n-1)0} = 1$. Daher ist auch das Belastungsglied der reduzierten Matrix $\delta^{(n-2)}_{(n-1)0} = \delta_{(n-1)0} = 1$, so daß die Gleichung mit der Ordnungsnummer $(n-1)$ folgende Form annimmt:

$$\beta_{(n-1)(n-1)}\,\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)} + \beta_{n(n-1)}\,\delta_{(n-1)n} = 1\,. \tag{395}$$

Nach Seite 166 ist $\beta_{n(n-1)} = \beta_{(n-1)n}$ und damit bereits bekannt.

$$\beta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1 - \beta_{(n-1)n}\,\delta_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}} = \frac{1}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}} - \beta_{(n-1)n}\,\varkappa_{(n-1)n}\,. \tag{396}$$

Hieraus werden wiederum die Vorzahlen $\beta_{k(n-1)}$ $(k = (n-2)\cdots 1)$ durch Multiplikation mit den negativen Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$ gefunden. Ebenso wird mit $\delta_{(n-2)0} = 1$

$$\beta_{(n-2)(n-2)} = \frac{1 - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\delta_{(n-2)(n-1)}}{\delta^{(n-3)}_{(n-2)(n-2)}} = \frac{1}{\delta^{(n-3)}_{(n-2)(n-2)}} - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\varkappa_{(n-2)(n-1)}\,. \tag{397}$$

Damit sind dann die Vorzahlen $\beta_{k(n-2)}$ $(k = (n-3)\ldots 1)$ durch Rekursion bestimmt. Schließlich wird

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12}\,\varkappa_{12}\,. \tag{398}$$

Die Entwicklung der konjugierten Matrix durch Rekursion verlangt Zwischenwerte mit einer größeren Anzahl von Stellen, um Fehler in der Zahlenrechnung auszuschließen. Das einwandfreie Ergebnis der Lösung kann durch die Berechnung der Vorzahl β_{11} mit Rückwärtselimination geprüft werden, wenn die Matrix nicht zur Nebendiagonale symmetrisch ist. Dies wird bei Symmetrie des Hauptsystems durch die Verwendung von Gruppen symmetrisch liegender Schnittkräfte nach (359) als überzählige Größen vermieden.

b) Rechenvorschrift bei Rückwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 234).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = (n-1)\ldots 1$ aus

$$\left.\begin{aligned} &\delta^{(n-k)}_{kk} = \delta_{kk} - \frac{\delta^2_{k(k+1)}}{\delta^{(n-k-1)}_{(k+1)(k+1)}}\,, \ldots \quad \text{und} \quad \delta^{(n-1)}_{11} = \delta_{11} - \frac{\delta^2_{12}}{\delta^{(n-2)}_{22}}\,,\\ &\text{die Belastungsglieder aus}\\ &\delta^{(n-k)}_{k0} = \delta_{k0} - \delta^{(n-k-1)}_{(k+1)0}\,\frac{\delta_{(k+1)k}}{\delta^{(n-k-1)}_{(k+1)(k+1)}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{400}$$

Damit wird

$$X_1 = \frac{\delta^{(n-1)}_{10}}{\delta^{(n-1)}_{11}}\,. \tag{401}$$

Alle anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus der reduzierten Matrix bestimmt.

Die konjugierte Matrix.

Die Belastungszahlen werden der Reihe nach $\delta^{(n-1)}_{10} = \delta_{10} = 1$, $\delta^{(n-2)}_{20} = \delta_{20} = 1$ usw., während alle übrigen Null sind. Die Eliminationskoeffizienten

$$\varkappa_{21}\ldots\varkappa_{32}\ldots\varkappa_{k(k-1)}\ldots\varkappa_{n(n-1)}$$

sind nach der reduzierten Matrix wiederum Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen aufsteigender Richtung X_{k-1}, X_k des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{X_n}{X_{n-1}} = \frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}} = \varkappa_{n(n-1)}\,; \quad -\frac{X_{n-1}}{X_{n-2}} = \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta^{(1)}_{(n-1)(n-1)}} = \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n}\cdot\varkappa_{n(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)(n-2)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\frac{X_k}{X_{k-1}} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta^{(n-k)}_{kk}} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\,\varkappa_{(k+1)k}} = \varkappa_{k(k-1)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-\frac{X_2}{X_1} = \frac{\delta_{21}}{\delta^{(n-2)}_{22}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\,\varkappa_{32}} = \varkappa_{21}\,. \end{aligned}\right\} \tag{402}$$

Reduzierte Matrix bei Rückwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2		X_{k-2}	X_{k-1}	X_k		X_{n-2}	X_{n-1}	X_n		
$\delta_{11}^{(n-1)}$											$\delta_{10}^{(n-1)}$
δ_{21}	$\delta_{22}^{(n-2)}$									$\varkappa_{21}$	$\delta_{20}^{(n-2)}$
			$\delta_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(n-k+1)}$						$\varkappa_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)0}^{(n-k+1)}$
				$\delta_{k(k-1)}$	$\delta_{kk}^{(n-k)}$					$\varkappa_{k(k-1)}$	$\delta_{k0}^{(n-k)}$
							$\delta_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}$		$\varkappa_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)0}^{(1)}$
								$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	$\varkappa_{n(n-1)}$	δ_{n0}

(399)

Rechenvorschrift zur Bildung der konjugierten Matrix (S. 235).

$-\varkappa_{21}$	$-\varkappa_{32}$			$-\varkappa_{k(k-1)}$	$-\varkappa_{(k+1)k}$			$-\varkappa_{n(n-1)}$		
β_{11}	β_{12}	β_{13}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}	$-\varkappa_{12}$
	β_{22}	β_{23}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}	$-\varkappa_{23}$
		β_{33}		$\beta_{3(k-1)}$	β_{3k}	$\beta_{3(k+1)}$		$\beta_{3(n-1)}$	β_{3n}	
				$\beta_{(k-1)(k-1)}$	$\beta_{(k-1)k}$	$\beta_{(k-1)(k+1)}$		$\beta_{(k-1)(n-1)}$	$\beta_{(k-1)n}$	$-\varkappa_{(k-1)k}$
					β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}	$-\varkappa_{k(k+1)}$
						$\beta_{(k+1)(k+1)}$		$\beta_{(k+1)(k-1)}$	$\beta_{(k+1)n}$	
								$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$	$-\varkappa_{(n-1)n}$
									β_{nn}	

(408)

Daher kann auch β_{11} aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen als Kettenbruch angeschrieben werden. Er enthält die Formänderungen $\delta_{kk}^{(n-k)}$ und die Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\varkappa_{21}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}}} = \cfrac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\cfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\varkappa_{32}}}\,. \tag{403}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{\underbrace{\delta_{11} - \delta_{12} \overset{\varkappa_{21}}{\Big|} \cfrac{\delta_{21}}{\underbrace{\delta_{22} - \delta_{23} \overset{\varkappa_{32}}{\Big|} \cfrac{\delta_{32}}{\underbrace{\delta_{33} - \cdots \cdots - \delta_{(n-2)(n-1)} \overset{\varkappa_{(n-1)(n-2)}}{\Big|} \cfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\underbrace{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n} \overset{\varkappa_{n(n-1)}}{\Big|} \cfrac{\delta_{n(n-1)}}{\underbrace{\delta_{nn}}_{\delta_{nn}^{(0)}}}}_{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}}}}_{\delta_{33}^{(n-3)}}}}_{\delta_{22}^{(n-2)}}}}_{\delta_{11}^{(n-1)}}} \tag{404}$$

Die Vorzahlen $\beta_{21} \ldots \beta_{k1} \ldots \beta_{n1}$ werden durch Rekursion mit den Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt. Die Vorzahl β_{22} entsteht aus $\delta_{20} = 1$ mit $\beta_{12} = \beta_{21}$ und der Gl. (402)

$$\beta_{12}\delta_{21} + \beta_{22}\delta_{22}^{(n-2)} = 1\,; \qquad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(n-2)}} - \beta_{21}\varkappa_{21}\,. \tag{405}$$

Die Vorzahlen $\beta_{32} \ldots \beta_{k2} \ldots \beta_{n2}$ sind dann wieder durch Rekursion bestimmt. Zuletzt wird β_{nn} erhalten.

c) Gleichzeitige Verwendung der Kennbeziehungen aus Vorwärts- und Rückwärtselimination. Die Zwischenwerte der Rückwärtselimination zur Bildung der Vorzahl β_{11}, mit der zunächst nur die aus der Vorwärtselimination (394) gewonnene konjugierte Matrix nachgeprüft wird, dienen zu einer einfachen Berechnung der Hauptglieder der konjugierten Matrix. Sind β_{nn}, $\beta_{(n-1)n}$ usw. durch Vorwärtselimination bekannt, so wird aus Gleichung n der reduzierten Matrix der Rückwärtselimation und mit $\delta_{(n-1)0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{(n-1)(n-1)}\delta_{n(n-1)} + \beta_{n(n-1)}\delta_{nn} = 0\,. \\ &\beta_{(n-1)(n-1)} = -\frac{\delta_{nn}}{\delta_{n(n-1)}}\beta_{n(n-1)} = -\frac{1}{\varkappa_{n(n-1)}}\beta_{(n-1)n}\,. \end{aligned}\right\} \tag{406}$$

In ähnlicher Weise wird β_{kk} für $\delta_{k0} = 1$ aus der Gleichung $(k+1)$ der reduzierten Matrix gefunden.

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{kk}\delta_{(k+1)k} + \beta_{(k+1)k}\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)} = 0\,. \\ &\beta_{kk} = -\beta_{(k+1)k}\frac{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}{\delta_{(k+1)k}} = -\frac{1}{\varkappa_{(k+1)k}}\beta_{k(k+1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{407}$$

Diese Beziehungen können an Stelle von (397) oder zu deren Nachprüfung als Zwischenkontrollen verwendet werden.

Die konjugierte Matrix eines dreigliedrigen Ansatzes wird hiernach am einfachsten mit der Entwicklung von β_{nn} und β_{11} in Gestalt zweier Kettenbrüche begonnen. Damit sind die Kennzahlen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt, mit denen die übrigen Vorzahlen nach (392 u. 402) durch einfache Rekursion gefunden werden. Die Ansätze (397) dienen als Zwischenprüfung.

Die Rechenvorschrift wird in einer Tabelle S. 234 zusammengefaßt. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die Vorzahlen der konjugierten Matrix durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer dazwischenstehenden negativen Kennzahl $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ entstehen. Daher kann das Hauptglied β_{kk}, verglichen mit der Rekursion nach S. 233, durch Multiplikation von $\beta_{k(k+1)}$ mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$ berechnet werden.

Eine mittlere Vorzahl β_{kk} der Hauptdiagonale kann auch aus der Gleichung (k) des Ansatzes (399) mit $\delta_{k0} = 1$ in Verbindung mit den beiden Kennbeziehungen

$$-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \varkappa_{(k-1)k} \quad \text{und} \quad -\frac{X_{k+1}}{X_k} = \varkappa_{(k+1)k} \tag{409}$$

unmittelbar berechnet werden:

$$\beta_{kk} = \frac{1}{-\varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\,\delta_{k(k+1)}}. \tag{410}$$

Anwendung auf die Lösung eines Ansatzes mit sechs Gleichungen.

1. Elastizitätsgleichungen:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	δ_{11}	δ_{12}					δ_{10}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}				δ_{20}
3		δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}			δ_{30}
4			δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}		δ_{40}
5				δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{50}
6					δ_{65}	δ_{66}	δ_{60}

2. Vorwärtselimination nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus (381):

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6			
1	δ_{11}	δ_{12}					$\varkappa_{12}$	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22} $-\varkappa_{12}\delta_{12}$	δ_{23}					$\delta_{2\Sigma}$ $-\varkappa_{12}\delta_{1\Sigma}$	δ_{20} $-\varkappa_{12}\delta_{10}$
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				$\varkappa_{23}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
		(δ_{32})	δ_{33} $-\varkappa_{23}\delta_{23}$	δ_{34}				$\delta_{3\Sigma}$ $-\varkappa_{23}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	δ_{30} $-\varkappa_{23}\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			$\varkappa_{34}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
			(δ_{43})	δ_{44} $-\varkappa_{34}\delta_{34}$	δ_{45}			$\delta_{4\Sigma}$ $-\varkappa_{34}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	δ_{40} $-\varkappa_{34}\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		$\varkappa_{45}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
				(δ_{54})	δ_{55} $-\varkappa_{45}\delta_{45}$	δ_{56}		$\delta_{5\Sigma}$ $-\varkappa_{45}\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	δ_{50} $-\varkappa_{45}\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	$\varkappa_{56}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
					(δ_{65})	δ_{66} $-\varkappa_{56}\delta_{56}$		$\delta_{6\Sigma}$ $-\varkappa_{56}\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	δ_{60} $-\varkappa_{56}\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$

$$X_6 = \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}; \qquad \delta_{60} = \delta_{60}^{(5)} = 1: \qquad X_6 = \beta_{66}.$$

Die anderen überzähligen Größen X_k oder β_{kk} entstehen durch Rekursion.

3. Vorwärts- und Rückwärtselimination als Kettenbruch. a) Kettenbruch zur Vorwärtselimination.

$\varkappa_{56}$ $\quad\varkappa_{45}$ $\quad\varkappa_{34}$ $\quad\varkappa_{23}$ $\quad\varkappa_{12}$

$$\beta_{66} = \frac{1}{\delta_{66}^{(5)}} = \cfrac{1}{\delta_{66} - \delta_{56}\cfrac{\delta_{65}}{\delta_{55} - \delta_{45}\cfrac{\delta_{54}}{\delta_{44} - \delta_{34}\cfrac{\delta_{43}}{\delta_{33} - \delta_{23}\cfrac{\delta_{32}}{\delta_{22} - \delta_{12}\cfrac{\delta_{21}}{\delta_{11}}}}}}}$$

$\delta_{66}^{(5)}$ $\quad\delta_{55}^{(4)}$ $\quad\delta_{44}^{(3)}$ $\quad\delta_{33}^{(2)}$ $\quad\delta_{22}^{(1)}$ $\quad\delta_{11}^{(0)}$

Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\varkappa_{12} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}; \quad \varkappa_{23} = \frac{\delta_{32}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad \varkappa_{34} = \frac{\delta_{43}}{\delta_{33}^{(2)}}; \quad \varkappa_{45} = \frac{\delta_{54}}{\delta_{44}^{(3)}}; \quad \varkappa_{56} = \frac{\delta_{65}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{22}^{(1)} \dots \delta_{66}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur Vorwärtselimination. Die Belastungszahlen werden für jeden Belastungsfall nach (389) berechnet.

$$\delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \delta_{(k-1)0}^{(k-2)} \varkappa_{(k-1)k}.$$

Reduzierte Matrix zur Vorwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
1	δ_{11}	δ_{12}					$\varkappa_{12}$	δ_{10}
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				$\varkappa_{23}$	$\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			$\varkappa_{34}$	$\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		$\varkappa_{45}$	$\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	$\varkappa_{56}$	$\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{60}^{(5)}$

(411)

Darnach wird für jeden Belastungsfall zuerst X_6 bestimmt. Die anderen überzähligen Größen $X_5 \dots X_1$ ergeben sich durch Rekursion.

b) Kettenbruch zur Rückwärtselimination.

$\varkappa_{21}$ $\quad\varkappa_{32}$ $\quad\varkappa_{43}$ $\quad\varkappa_{54}$ $\quad\varkappa_{65}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}^{(5)}} = \cfrac{1}{\delta_{11} - \delta_{21}\cfrac{\delta_{12}}{\delta_{22} - \delta_{32}\cfrac{\delta_{23}}{\delta_{33} - \delta_{43}\cfrac{\delta_{34}}{\delta_{44} - \delta_{54}\cfrac{\delta_{45}}{\delta_{55} - \delta_{65}\cfrac{\delta_{56}}{\delta_{66}}}}}}}$$

$\delta_{11}^{(5)}$ $\quad\delta_{22}^{(4)}$ $\quad\delta_{33}^{(3)}$ $\quad\delta_{44}^{(2)}$ $\quad\delta_{55}^{(1)}$ $\quad\delta_{66}^{(0)}$

Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\varkappa_{65} = \frac{\delta_{56}}{\delta_{66}}; \qquad \varkappa_{54} = \frac{\delta_{45}}{\delta_{55}^{(1)}}; \qquad \varkappa_{43} = \frac{\delta_{34}}{\delta_{44}^{(2)}}; \qquad \varkappa_{32} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{33}^{(3)}}; \qquad \varkappa_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{55}^{(1)} \ldots \delta_{11}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur abgekürzten Rückwärtselimination. Die Belastungszahlen sind nach (400)

$$\delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \varkappa_{(k+1)k}\,\delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}.$$

Reduzierte Matrix zur Rückwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
$1^{(5)}$	$\delta_{11}^{(5)}$							$\delta_{10}^{(5)}$
$2^{(4)}$	δ_{21}	$\delta_{22}^{(4)}$					$\varkappa_{21}$	$\delta_{20}^{(4)}$
$3^{(3)}$		δ_{32}	$\delta_{33}^{(3)}$				$\varkappa_{32}$	$\delta_{30}^{(3)}$
$4^{(2)}$			δ_{43}	$\delta_{44}^{(2)}$			$\varkappa_{43}$	$\delta_{40}^{(2)}$
$5^{(1)}$				δ_{54}	$\delta_{55}^{(1)}$		$\varkappa_{54}$	$\delta_{50}^{(1)}$
6					δ_{65}	δ_{66}	$\varkappa_{65}$	δ_{60}

Der Ansatz liefert für jede Belastung zuerst X_1. Damit sind die anderen statisch überzähligen Größen $X_2 \ldots X_6$ durch Rekursion bestimmt.

4. Konjugierte Matrix. Die konjugierte Matrix kann aus einem der beiden Kettenbrüche entwickelt werden. Bei Vorwärtselimination entsteht β_{66} und $\varkappa_{56} \ldots \varkappa_{12}$. Die Gleichung $5^{(4)}$ der reduzierten Matrix (411) liefert mit $\beta_{65} = \beta_{56}$

$$\beta_{55}\,\delta_{55}^{(4)} + \beta_{65}\,\delta_{56} = 1; \qquad \beta_{55} = \frac{1 - \beta_{56}\,\delta_{56}}{\delta_{55}^{(4)}} = \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}} - \beta_{56}\,\varkappa_{56}.$$

Die Vorzahlen $\beta_{45} \ldots \beta_{15}$ ergeben sich wieder durch Multiplikation mit $-\varkappa_{45}$ usw., die übrigen Vorzahlen in ähnlicher Weise.

$$\beta_{44} = \frac{1 - \beta_{45}\,\delta_{45}}{\delta_{44}^{(3)}} = \frac{1}{\delta_{44}^{(3)}} - \beta_{45}\,\varkappa_{45}, \quad \beta_{34}, \quad \beta_{24}, \quad \beta_{14},$$

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12}\,\varkappa_{12}.$$

Konjugierte Matrix aus

Vorwärtselimination und Rekursion.

$-\varkappa_{21} - \varkappa_{32} - \varkappa_{43} - \varkappa_{54} - \varkappa_{65} \rightarrow$

X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}
X_5					β_{55}	β_{56}
X_6						β_{66}
	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}

$-\varkappa_{12}$, $-\varkappa_{23}$, $-\varkappa_{34}$, $-\varkappa_{45}$, $-\varkappa_{56}$ ↑

$-\varkappa_{21}$, $-\varkappa_{32}$, $-\varkappa_{43}$, $-\varkappa_{54}$, $-\varkappa_{65}$ ↓

Rückwärtselimination und Rekursion.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	
	β_{11}						X_1
	β_{21}	β_{22}					X_2
	β_{31}	β_{32}	β_{33}				X_3
	β_{41}	β_{42}	β_{43}	β_{44}			X_4
	β_{51}	β_{52}	β_{53}	β_{54}	β_{55}		X_5
	β_{61}	β_{62}	β_{63}	β_{64}	β_{65}	β_{66}	X_6

$\leftarrow - \varkappa_{12} - \varkappa_{23} - \varkappa_{34} - \varkappa_{45} - \varkappa_{56}$

Die Berechnung der konjugierten Matrix ist bei Verwendung der Zwischenwerte

$\varkappa_{(k-1)k}$ und $\varkappa_{k(k-1)}$ beider Kettenbrüche kürzer. Die Rekursion mit β_{66} der Vorwärtselimination verwendet die Beziehungen

$$\beta_{55} = -\frac{1}{\varkappa_{65}}\beta_{56}, \ldots, \quad \beta_{11} = -\frac{1}{\varkappa_{21}}\beta_{12},$$

die Rekursion mit β_{11} der Rückwärtselimination die Beziehungen

$$\beta_{22} = -\frac{1}{\varkappa_{12}}\beta_{21}, \ldots, \quad \beta_{66} = -\frac{1}{\varkappa_{56}}\beta_{65}.$$

Die Pfeilrichtungen sind wiederum die Anweisung (S. 235) für die Berechnung der Vorzahlen β_{ik} mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$.

Zur Berechnung der überzähligen Größen X_k für einen beliebigen Belastungsfall $\delta_{1\otimes} \ldots \delta_{6\otimes}$ durch Superposition nach (369) genügt ebenso wie für die Einflußlinie X_k einer der beiden Ansätze, da nach S. 166 $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=6} \beta_{ki}\,\delta_{i\otimes}, \qquad (k = 1 \ldots 6). \tag{412}$$

d) Ausgezeichnete Belastung mit ein oder zwei Belastungszahlen. Der Sonderfall $\delta_{k0} \neq 0$, $\delta_{i0} = 0$ $(i = 1 \ldots k-1, k+1 \ldots n)$ gestattet folgende Umformung der Gleichung (k) der Matrix:

$$X_k(-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{k(k+1)}) = \delta_{k0},$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{(k+1)k}}, \tag{413}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{k-1} &= -\varkappa_{(k-1)k}X_k, \ldots X_1 = -\varkappa_{12}X_2, \\ X_{k+1} &= -\varkappa_{(k+1)k}X_k, \ldots X_n = -\varkappa_{n(n-1)}X_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{414}$$

Sind bei der Belastung des Hauptsystems nur zwei Belastungszahlen $\delta_{(k-1)0}$, δ_{k0} von Null verschieden, so können die zugeordneten Verträglichkeitsbedingungen des Ansatzes

$$\left.\begin{aligned} (k-1)&: \quad X_{k-2}\delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1}\delta_{(k-1)(k-1)} + X_k\delta_{(k-1)k} &&= \delta_{(k-1)0}, \\ (k)&: \quad + X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk} + X_{k+1}\delta_{k(k+1)} &&= \delta_{k0}, \end{aligned}\right\} \tag{415}$$

mit

$$X_{k-2} = -X_{k-1}\varkappa_{(k-2)(k-1)}; \qquad X_{k+1} = -X_k\varkappa_{(k+1)k}$$

in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angeschrieben werden.

$$X_{k-1}(\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)}\varkappa_{(k-2)(k-1)}) + X_k\delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0},$$

$$X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k(\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\varkappa_{(k+1)k}) = \delta_{k0}.$$

Hieraus wird nach Division mit $\delta_{(k-1)k}$ in Verbindung mit (392) und (402)

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_{k-1}}{\varkappa_{(k-1)k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = R_{(k-1)k}, \\ X_{k-1} + \frac{X_k}{\varkappa_{k(k-1)}} &= \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = R_{kk}. \end{aligned}\right\} \tag{416}$$

Die Glieder der rechten Seite sind Quotienten bekannter Verschiebungen des Hauptsystems. Sie besitzen durch das Gleichheitszeichen dieselbe mechanische Bedeutung wie die überzähligen Größen X_k.

$$X_{k-1} = \frac{R_{(k-1)k}\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - R_{kk}}{\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}}\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - 1}; \qquad X_k = \frac{R_{kk}\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}} - R_{(k-1)k}}{\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}}\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - 1}. \tag{417}$$

Die Schnittkräfte $X_{k-2} \ldots X_1$ werden mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k-2)(k-1)} \ldots \varkappa_{12}$, die Schnittkräfte $X_{k+1} \ldots X_n$ mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k+1)k} \ldots \varkappa_{n(n-1)}$ bestimmt.

Die Lösung des Ansatzes kann auch bei einer beliebigen Anzahl von Belastungsgliedern nach deren Aufteilung in Gruppen zu zweien verwendet werden. Das endgültige Ergebnis entsteht durch Superposition der Teilergebnisse.

Durchgehender Träger zur Abstützung eines Ausziehgleises:

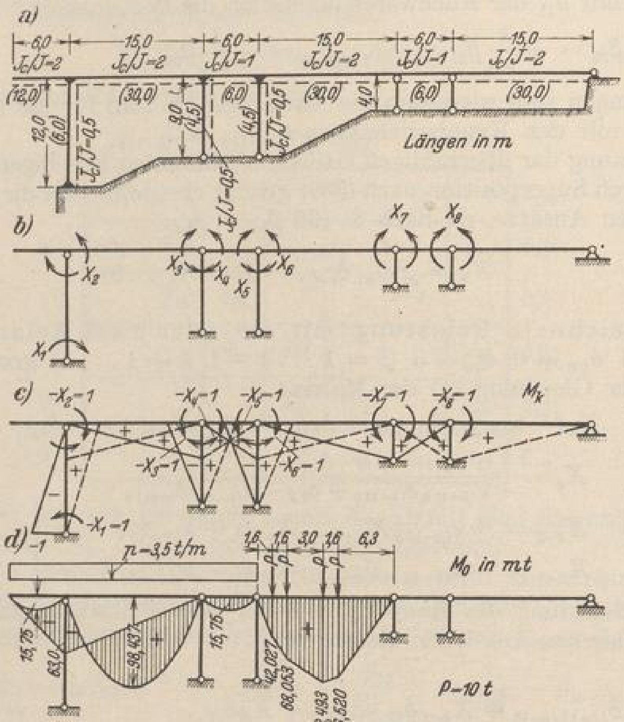

Abb. 219.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J, reduzierte Längen l'_h (Abb. 219a).
2. Belastung. Lastenzug nach Abb. 219d.
3. Hauptsystem. Die Reihe der Balkenträger nach Abb. 219b, Momente M_k aus $-X_k = 1$ (Abb. 219c); Momente M_0 aus der Belastung (Abb. 219d).
4. Matrix der Bedingungsgleichungen.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(δ_{k0})
(1)	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	− 1,0	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	+ 5,0	11,5	− 1,5	—	—	—	—	669,37
(4)	—	—	− 1,5	3,5	+ 1,0	—	—	—	31,50
(5)	—	—	—	+ 1,0	3,5	− 1,5	—	—	31,50
(6)	—	—	—	—	− 1,5	11,5	+ 5,0	—	905,06
(7)	—	—	—	—	—	+ 5,0	12,0	+ 1,0	800,72
(8)	—	—	—	—	—	—	+ 1,0	12,0	0,00

5a) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung von Kettenbrüchen.

α) Vorwärtselimination mit Kettenbruch:

$$\begin{array}{ccccccc} \varkappa_{78} & \varkappa_{67} & \varkappa_{56} & \varkappa_{45} & \varkappa_{34} & \varkappa_{23} & \varkappa_{12} \end{array}$$

$$\beta_{88} = \cfrac{1}{12{,}0 - 1{,}0 \cdot \cfrac{1{,}0}{12{,}0 - 5{,}0 \cdot \cfrac{5{,}0}{11{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 1{,}0 \cdot \cfrac{1{,}0}{3{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 5{,}0 \cdot \cfrac{5{,}0}{12{,}0 + 1{,}0 \cdot \cfrac{-1{,}0}{2{,}0}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \delta_{88}^{(7)} & \delta_{77}^{(6)} & \delta_{66}^{(5)} & \delta_{55}^{(4)} & \delta_{44}^{(3)} & \delta_{33}^{(2)} & \delta_{22}^{(1)} & \delta_{11}^{(0)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\varkappa_{12} = -\dfrac{1}{2} & = -0{,}5\,, & \delta_{11}^{(0)} = 2{,}0\,, \\[2ex]
\varkappa_{23} = \dfrac{5{,}0}{12{,}0 - 0{,}5} & = 0{,}434783\,, & \delta_{22}^{(1)} = 11{,}5\,, \\[2ex]
\varkappa_{34} = \dfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 2{,}173915} & = -0{,}160839\,, & \delta_{33}^{(2)} = 9{,}326085\,, \\[2ex]
\varkappa_{45} = \dfrac{1{,}0}{3{,}5 - 0{,}241259} & = 0{,}306867\,, & \delta_{44}^{(3)} = 3{,}258741\,, \\[2ex]
\varkappa_{56} = \dfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 0{,}306867} & = -0{,}469758\,, & \delta_{55}^{(4)} = 3{,}193133\,, \\[2ex]
\varkappa_{67} = \dfrac{5{,}0}{11{,}5 - 0{,}704637} & = 0{,}463162\,, & \delta_{66}^{(5)} = 10{,}795363\,, \\[2ex]
\varkappa_{78} = \dfrac{1{,}0}{12{,}0 - 2{,}315810} & = 0{,}103261\,, & \delta_{77}^{(6)} = 9{,}684190\,, \\[2ex]
\beta_{88} = \dfrac{1{,}0}{12{,}0 - 0{,}103261} & = 0{,}084057\,, & \delta_{88}^{(7)} = 11{,}896739\,.
\end{array}$$

β) Rückwärtselimination mit Kettenbruch:

$$\begin{array}{ccccccc} \varkappa_{21} & \varkappa_{32} & \varkappa_{43} & \varkappa_{54} & \varkappa_{65} & \varkappa_{76} & \varkappa_{87} \end{array}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{2{,}0 + 1{,}0 \cdot \cfrac{-1{,}0}{12{,}0 - 5{,}0 \cdot \cfrac{5{,}0}{11{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 1{,}0 \cdot \cfrac{+1{,}0}{3{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 5{,}0 \cdot \cfrac{+5{,}0}{12{,}0 - 1{,}0 \cdot \cfrac{+1{,}0}{12{,}0}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \delta_{11}^{(7)} & \delta_{22}^{(6)} & \delta_{33}^{(5)} & \delta_{44}^{(4)} & \delta_{55}^{(3)} & \delta_{66}^{(2)} & \delta_{77}^{(1)} & \delta_{88}^{(0)} \end{array}$$

$$\varkappa_{87} = \frac{1,0}{12,0} = 0,083333\,, \qquad \delta_{88}^{(0)} = 12,00\,,$$

$$\varkappa_{76} = \frac{5,0}{12,0 - 0,083333} = 0,419580\,, \qquad \delta_{77}^{(1)} = 11,916667\,,$$

$$\varkappa_{65} = \frac{-1,5}{11,5 - 2,097900} = -0,159539\,, \qquad \delta_{66}^{(2)} = 9,402100\,,$$

$$\varkappa_{54} = \frac{1,0}{3,5 - 0,239309} = 0,306683\,, \qquad \delta_{55}^{(3)} = 3,260691\,,$$

$$\varkappa_{43} = \frac{-1,5}{3,5 - 0,306683} = -0,469731\,, \qquad \delta_{44}^{(4)} = 3,193317\,,$$

$$\varkappa_{32} = \frac{5,0}{11,5 - 0,704597} = 0,463160\,, \qquad \delta_{33}^{(5)} = 10,795403\,,$$

$$\varkappa_{21} = \frac{-1,0}{12,0 - 2,315800} = -0,103261\,, \qquad \delta_{22}^{(6)} = 9,684200\,,$$

$$\beta_{11} = \frac{1,0}{2,0 - 0,103261} = 0,527221\,, \qquad \delta_{11}^{(7)} = 1,896739\,.$$

γ) Berechnung der Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix (S. 243). Entwicklung von $\beta_{k\,(k+1)}$ aus $\beta_{(k+1)\,(k+1)}$ durch Rekursion mit den Kennbeziehungen $-\varkappa_{k\,(k+1)}$; Entwicklung von β_{kk} aus $\beta_{(k+1)\,k}$ durch Rekursion mit $-1/\varkappa_{(k+1)\,k}$. Nachprüfung von β_{kk} wegen der Fehlerempfindlichkeit mit dem Ansatz (396)

$$\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k\,(k+1)}\varkappa_{k\,(k+1)} \qquad \text{(S. 243).}$$

δ)
$$X_k = \sum_{i=1}^{i=8} \beta_{ki}\,\delta_{i0}\,.$$

$X_1 = +\ 2,48520$; $X_2 = +\ 4,97039$; $X_3 = +\ 59,44205$; $X_4 = +\ 26,04114$;
$X_5 = +\ 29,51865$ $X_6 = +\ 65,23799$; $X_7 = +\ 39,82042$; $X_8 = -\ 3,31856$.

ε) Die Anzahl der Multiplikationen ist durch die Einbeziehung der Belastung in die Elimination kleiner. In diesem Falle wird X_8 nach (390) mit der reduzierten Matrix der Vorwärtselimination bestimmt, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, α) enthalten sind. Die überzähligen Größen X_7 bis X_1 ergeben sich dann durch Rekursion desselben Ansatzes. Das Ergebnis für X_1 kann mit der reduzierten Matrix der Rückwärtselimination nachgeprüft werden, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, β) enthalten sind. Die Belastungsglieder werden in die reduzierte Matrix nach (389) oder (400) eingetragen.

Reduzierte Matrix aus der Vorwärtselimination:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
(1)	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	—	11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	—	9,326085	− 1,5	—	—	—	—	515,30
(4)	—	—	—	3,258741	+ 1,0	—	—	—	114,38
(5)	—	—	—	—	3,193133	− 1,5	—	—	−3,60
(6)	—	—	—	—	—	10,795363	+ 5,0	—	903,37
(7)	—	—	—	—	—	—	9,684190	+ 1,0	382,31
(8)	—	—	—	—	—	—	—	11,896739	−39,48

Die Rekursion beginnt mit $X_8 = \dfrac{-39,48}{11,896739} = -\ 3,31856$ und wird nach der Rechenvorschrift unter 5b, β entwickelt.

Zahlenrechnung: $\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)}$.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$1/\delta_{kk}^{(k-1)}$	0,500000	0,086957	0,107226	0,306864	0,313172	0,092632	0,103261	0,084057
$-\beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)}$	0,027221	0,021926	0,008763	0,031880	0,025372	0,022344	0,000896	—
β_{kk}	0,527221	0,108883	0,115989	0,338744	0,338544	0,114976	0,104157	0,084057

Konjugierte Matrix.

− 0,103261 — + 0,463160 — − 0,469731 — + 0,306683 — − 0,159539 — + 0,419580 — + 0,083333

(1)	0,527221	+ 0,054442	− 0,025215	− 0,011844	+ 0,003633	+ 0,000580	− 0,000243	+ 0,000020
(2)		0,108883	− 0,050430	− 0,023688	+ 0,007265	+ 0,001159	− 0,000486	+ 0,000040
(3)			0,115989	+ 0,054483	− 0,016709	− 0,002666	+ 0,001118	− 0,000093
(4)				0,338744	− 0,103888	− 0,016574	+ 0,006954	− 0,000579
(5)					0,338544	+ 0,054011	− 0,022662	+ 0,001888
(6)						0,114976	− 0,048242	+ 0,004020
(7)							0,104157	− 0,008680
(8)								0,084057
$(\delta_{k0} =)$	0,00	354,37	669,37	31,5	31,5	905,06	800,72	0,00

− 0,500000
+ 0,434783
− 0,160839
+ 0,306867
− 0,469758
+ 0,463162
+ 0,103261

Vorwärtselimination nach C. F. Gauß (5b, α):

i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	$\varkappa_{i(i+1)}$		
	k	1	2	3	4	5	6	7	8		Σ	o
1	δ_{1k}	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	− 0,50000	+ 1,0	+ 0,00
2	δ_{2k}	(− 1,0)	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	—	+ 16,0	354,37
	$-\varkappa_{12}\delta_{1k}$		− 0,5	—	—	—	—	—	—	—	− 0,5	0,00
	$\delta_{2k}^{(1)}$		11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	+ 0,434783	+ 16,5	354,37
3	δ_{3k}		(+ 5,0)	11,5	− 1,5	—	—	—	—	—	+ 15,0	669,37
	$-\varkappa_{23}\delta_{2k}^{(1)}$			− 2,173915	—	—	—	—	—	—	− 7,17392	− 154,07
	$\delta_{3k}^{(2)}$			9,326085	− 1,5	—	—	—	—	− 0,160839	7,82608	515,30
4	δ_{4k}			(− 1,5)	3,5	+ 1,0	—	—	—	—	3,0	31,50
	$-\varkappa_{34}\delta_{3k}^{(2)}$				− 0,241259	—	—	—	—	—	1,25874	82,88
	$\delta_{4k}^{(3)}$				3,258741	+ 1,0	—	—	—	+ 0,306867	4,25874	114,38
5	δ_{5k}				(+ 1,0)	3,5	− 1,5	—	—	—	3,0	31,50
	$-\varkappa_{45}\delta_{4k}^{(3)}$					− 0,306867	—	—	—	—	− 1,30687	− 35,10
	$\delta_{5k}^{(4)}$					3,193133	− 1,5	—	—	− 0,469758	1,69313	− 3,60
6	δ_{6k}					(− 1,5)	11,5	+ 5,0	—	—	+ 15,0	905,06
	$-\varkappa_{56}\delta_{5k}^{(4)}$						− 0,704637	—	—	—	0,79536	− 1,69
	$\delta_{6k}^{(5)}$						10,795363	+ 5,0	—	+ 0,463162	15,79536	903,37
7	δ_{7k}						(+ 5,0)	12,0	+ 1,0	—	18,0	800,72
	$-\varkappa_{67}\delta_{6k}^{(5)}$							− 2,315810	—	—	− 7,31581	− 418,41
	$\delta_{7k}^{(6)}$							9,684190	+ 1,0	+ 0,103261	10,68419	382,31
8	δ_{8k}							(+ 1,0)	12,0	—	13,0	0,00
	$-\varkappa_{78}\delta_{7k}^{(6)}$								− 0,103261	—	− 1,10326	− 39,48
	$\delta_{8k}^{(7)}$								11,896739	—	11,89674	− 39,48

5b) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung des abgekürzten Algorithmus nach C. F. Gauß.

Die Berechnung der Kennbeziehungen und der Hauptglieder der reduzierten Matrix ist übersichtlicher.

α) Vorwärtselimination nach S. 244.

Die Vorzahlen β_{ik} werden nach 5a, γ bestimmt.

β) Rekursion mit Rechenprobe auf gleicher Seite:

Rechenprobe: $\Sigma X_k \delta_{k0}^{(0)} = \Sigma X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$,

(vgl. S. 295) $134229{,}5 \approx 134229{,}7$.

6. Die Schnittkräfte des Tragwerks.

Die Schnittkräfte werden nach (288) berechnet. Biegungsmomente M im vorgelegten Tragwerk für die Belastung 2 (Abb. 220).

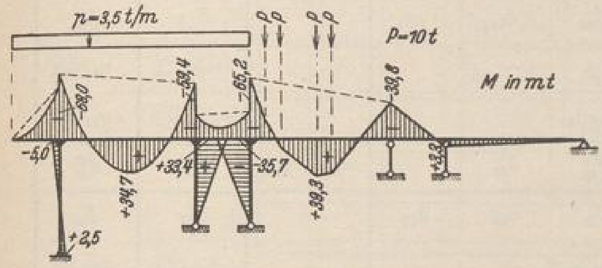

Abb. 220.

Auflösung fünf- und siebengliedriger Ansätze. Die einfache und übersichtliche Lösung eines dreigliedrigen Gleichungssatzes ist durch die unabhängige Kennbeziehung zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen begründet und darf daher bei fünfgliedrigen Gleichungen nicht mehr erwartet werden. Die Untersuchung wird an einem Beispiel mit 7 überzähligen Größen $X_1 \ldots X_7$ gezeigt. Der regelmäßige Ansatz lautet:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & \\
\hline
\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & & & & & \delta_{10} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & & & & \delta_{20} \\
\delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & & & \delta_{30} \\
 & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} & & \delta_{40} \\
 & & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} & \delta_{57} & \delta_{50} \\
 & & & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} & \delta_{67} & \delta_{60} \\
 & & & & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} & \delta_{70}
\end{array} \qquad (418)$$

Rekursion mit Rechenprobe (5b, β):

k	8	7	6	5	4	3	2	1
$-X_{k+1}\,\varkappa_{k\,(k+1)}$	—	+ 0,34268	− 18,44331	+ 30,64607	− 9,05830	+ 4,18843	− 25,84439	+ 2,48520
$X_k^{(k)} = \delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	− 3,31856	+ 39,47774	+ 83,68130	− 1,12742	+ 35,09944	+ 55,25362	+ 30,81478	0,00
$\Sigma_{k0} = X_k$	− 3,31856	+ 39,82042	+ 65,23799	+ 29,51865	+ 26,04114	+ 59,44205	+ 4,97039	+ 2,48520
$X_k\,\delta_{k0}^{(0)}$	0,00	31885,0	59044,3	929,8	820,3	39788,7	1761,4	0,00
$X_k^{(k)}\,\delta_{k0}^{(k-1)}$	131,0	15092,7	75595,2	4,1	4014,7	28472,2	10919,8	0,00
k	8	7	6	5	4	3	2	1

Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus (419)*.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7				
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}					$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}						$\delta_{2\Sigma}$	δ_{20}
		$-\varkappa_{12}\delta_{12}$	$-\varkappa_{12}\delta_{13}$	—						$-\varkappa_{12}\delta_{1\Sigma}$	$-\varkappa_{12}\delta_{10}$
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	δ_{24}				$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
	(δ_{31})	(δ_{32})	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}					$\delta_{3\Sigma}$	δ_{30}
			$-\varkappa_{13}\delta_{13}$	—	—					$-\varkappa_{13}\delta_{1\Sigma}$	$-\varkappa_{13}\delta_{10}$
			$-\varkappa_{23}\delta_{23}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\delta_{24}$	—					$-\varkappa_{23}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	δ_{35}			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
		(δ_{42})	(δ_{43})	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}				$\delta_{4\Sigma}$	δ_{40}
				$-\varkappa_{24}\delta_{24}$	—	—				$-\varkappa_{24}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\varkappa_{24}\delta_{20}^{(1)}$
				$-\varkappa_{34}\delta_{34}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\delta_{35}$	—				$-\varkappa_{34}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	δ_{46}		$\varkappa_{45}$	$\varkappa_{46}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
			(δ_{53})	(δ_{54})	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}			$\delta_{5\Sigma}$	δ_{50}
					$-\varkappa_{35}\delta_{35}$	—	—			$-\varkappa_{35}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\varkappa_{35}\delta_{30}^{(2)}$
					$-\varkappa_{45}\delta_{45}^{(3)}$	$-\varkappa_{45}\delta_{46}$	—			$-\varkappa_{45}\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\varkappa_{45}\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{56}^{(4)}$	δ_{57}	$\varkappa_{56}$	$\varkappa_{57}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
				(δ_{64})	(δ_{65})	δ_{66}	δ_{67}			$\delta_{6\Sigma}$	δ_{60}
						$-\varkappa_{46}\delta_{46}$	—			$-\varkappa_{46}\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\varkappa_{46}\delta_{40}^{(3)}$
						$-\varkappa_{56}\delta_{56}^{(4)}$	$-\varkappa_{56}\delta_{57}$			$-\varkappa_{56}\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\varkappa_{56}\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{67}^{(5)}$	$\varkappa_{67}$		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$
					(δ_{75})	(δ_{76})	δ_{77}			$\delta_{7\Sigma}$	δ_{70}
							$-\varkappa_{57}\delta_{57}$			$-\varkappa_{57}\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\varkappa_{57}\delta_{50}^{(4)}$
							$-\varkappa_{67}\delta_{67}^{(5)}$			$-\varkappa_{67}\varkappa_{6\Sigma}^{(5)}$	$-\varkappa_{67}\delta_{60}^{(5)}$
$7^{(6)}$							$\delta_{77}^{(6)}$			$\delta_{7\Sigma}^{(6)}$	$\delta_{70}^{(6)}$

Die Zeilen $1, 2^{(1)}, 3^{(2)} \ldots 7^{(6)}$ bilden zusammen die reduzierte Matrix.

$$\left.\begin{array}{c} X_7 = \dfrac{\delta_{70}^{(6)}}{\delta_{77}^{(6)}}, \\ X_6\,\delta_{66}^{(5)} = \delta_{60}^{(5)} - X_7\,\delta_{67}^{(5)}, \quad X_5\,\delta_{55}^{(4)} = \delta_{50}^{(4)} - X_7\,\delta_{57} - X_6\,\delta_{56}^{(4)} \text{ usw.} \end{array}\right\}. \tag{420}$$

Der Sonderfall $\delta_{10} = \cdots = \delta_{60} = 0$, $\delta_{70} = 1$ liefert $X_7 = \beta_{77} = \frac{1}{\delta_{77}^{(6)}}$. Für die Rekursion

* Die Klammerwerte sind nur zur Erleichterung der Summenbildung $\delta_{k\Sigma}$ beigefügt.

ist eine Kennbeziehung mit je zwei Kennziffern $\varkappa_{k(k+1)}, \varkappa_{k(k+2)}$ zwischen drei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen $k, (k+1), (k+2)$ charakteristisch.

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_{67} = -\varkappa_{67}\beta_{77}, \quad \beta_{57} = -\varkappa_{56}\beta_{67} - \varkappa_{57}\beta_{77}, \ldots, \beta_{17} = -\varkappa_{12}\beta_{27} - \varkappa_{13}\beta_{37}, \\
&\beta_{66} = \frac{1}{\delta_{66}^{(5)}} - \varkappa_{67}\beta_{67}, \quad \beta_{56} = -\varkappa_{56}\beta_{66} - \varkappa_{57}\beta_{67}, \ldots, \beta_{16} = -\varkappa_{12}\beta_{26} - \varkappa_{13}\beta_{36}, \\
&\beta_{55} = \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}} - \varkappa_{56}\beta_{56} - \varkappa_{57}\beta_{57}, \ldots \qquad \beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} - \varkappa_{12}\beta_{12} - \varkappa_{13}\beta_{13}.
\end{aligned}\right| \quad (421)$$

Das Ergebnis kann durch Rückwärtselimination nachgeprüft werden. Damit ist die konjugierte Matrix durch folgende Rechenvorschrift bestimmt.

(422)

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	δ_{70}	
X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{17}	
								$-\varkappa_{12}; -\varkappa_{13}$
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}	β_{27}	
								$-\varkappa_{23}; -\varkappa_{24}$
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}	β_{37}	
								$-\varkappa_{34}; -\varkappa_{35}$
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}	β_{47}	
								$-\varkappa_{45}; -\varkappa_{46}$
X_5					β_{55}	β_{56}	β_{57}	
								$-\varkappa_{56}; -\varkappa_{57}$
X_6						β_{66}	β_{67}	
								$-\varkappa_{67}$
X_7							β_{77}	

Die Lösung eines siebengliedrigen Ansatzes erfährt keine grundsätzliche Änderung. Die folgenden Bemerkungen genügen zur Anwendung.

Matrix und reduzierte Matrix bei Vorwärtselimination (423).

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}				δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}			δ_{20}
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}		δ_{30}
δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}	δ_{47}	δ_{40}
	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}	δ_{50}
		δ_{63}	δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}	δ_{67}	δ_{60}
			δ_{74}	δ_{75}	δ_{76}	δ_{77}	δ_{70}

δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}				δ_{10}	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	δ_{25}			$\delta_{20}^{(1)}$	$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	δ_{36}		$\delta_{30}^{(2)}$	$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	$\varkappa_{36}$
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{46}^{(3)}$	δ_{47}	$\delta_{40}^{(3)}$	$\varkappa_{45}$	$\varkappa_{46}$	$\varkappa_{47}$
				$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{56}^{(4)}$	$\delta_{57}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$	$\varkappa_{56}$	$\varkappa_{57}$	
					$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{67}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$	$\varkappa_{67}$		
						$\delta_{77}^{(6)}$	$\delta_{70}^{(6)}$			

Die Berechnung von X_7 und die Rekursion sind daher für eine ausgezeichnete Belastung ebenso wie bei dem fünfgliedrigen Ansatz (419ff.) zu behandeln. Dasselbe gilt für die konjugierte Matrix. Rückwärtselimination führt zu einem ähnlichen Ergebnis.

Helmert, R.: Die Ausgleichsrechnung, 2. Aufl. Leipzig 1907. — Hertwig, A.: Die Auflösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Müller-Breslau-Festschrift 1912 S. 37. — Ostenfeld, A.: Rechnerische Auflösung von fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1913

S. 120. — Frandsen, P.: Rechnerische Auflösung von Clapeyronschen Gleichungen. Eisenbau 1913 S. 440. — Lewe, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach dem Verfahren des Zahlenrechtecks. Borna 1915. — Pirlet, J.: Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1916 S. 139. — Lewe, V.: Die mathematisch-rechnerische Auflösung der allgemeinen sowie der drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 175. — Hertwig, A.: Einige besondere Klassen linearer Gleichungen und ihre Auflösung in der Statik der durchlaufenden Träger und der Rahmengebilde. Eisenbau 1917 S. 69. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 111 u. 299. — Derselbe: Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Derselbe: Statik der Baukonstr. Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922; II. Abt. 2. Aufl. Leipzig 1925. — Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1, 7. Aufl. Stuttgart 1920. — Domke, O.: Dachbauten, Handbuch für Eisenbetonbau Bd. 10, 2. Aufl. Berlin 1923. — Bornemann: Rechenvorschrift zur Auflösung symmetrischer Elastizitätsgleichungen. Bautechn. 1926 S. 455. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Mehmke, R.: Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1930 S. 508. — Worch, G.: Über die zweckmäßigste Art lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 175.

30. Auflösung der Gleichungen durch Iteration.

Die Brauchbarkeit der Wurzeln X_h, β_{hk} einer größeren Anzahl von linearen Gleichungen scheitert nicht selten an der Fehlerempfindlichkeit der Zahlenrechnung. Der Ansatz wird durch die Wurzeln nicht mehr identisch erfüllt. Um nun die Auflösung nicht mit einer größeren Anzahl von Stellen von Anfang an zu wiederholen, kann das Ergebnis als Näherung angesehen und durch Iteration verbessert werden. Dieselbe Rechnung ist unter Umständen auch bei nachträglichen Änderungen der Vorzahlen δ_{ik} nützlich. Diese können von Änderungen der Form und der Querschnittsverhältnisse des Stabzugs herrühren. Sie können sich auch durch die nachträgliche Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente und aus der Verschiebung einzelner Stabknoten ergeben haben, wenn zur Vereinfachung der Rechnung zunächst geometrische Bindungen angenommen worden sind (S. 301). Das Ergebnis der Elimination mit den angenäherten Vorzahlen wird dann als erste Näherung für den verbesserten Ansatz δ_{ik}, δ_{i0} verwendet. Auf diese Weise lassen sich unter Umständen auch Systeme mit verschiedenen Abmessungen trotz hochgradiger statischer Unbestimmtheit leicht in bezug auf ihre wirtschaftlichen Eigenschaften vergleichen.

Die Näherungsfolgen können naturgemäß auch aus beliebigen Annahmen $X_{k,0}$ für die überzähligen Schnittkräfte entwickelt werden, wenn die Konvergenz einer Iteration feststeht. Hierbei spielt die Fehlerempfindlichkeit für die endgültige Lösung keine Rolle, da selbst Rechenfehler ausgeglichen werden. Die vorgeschriebene Genauigkeit der Lösung läßt sich jedoch in diesem Falle nur durch unnötig viele Näherungsfolgen erkaufen.

Die Rechenvorschrift. In der Regel wird die schrittweise Auflösung eines linearen Ansatzes (293) von der Form

$$\sum \delta_{kh} X_h - \delta_{k0} = 0, \qquad k, h = 1 \ldots n; \quad \delta_{kh} = \delta_{hk} \tag{424}$$

durch eine Näherungsfolge eingeleitet, bei der die unbekannte Schnittkraft X_k in der Hauptdiagonale der Matrix als Funktion der übrigen Glieder angegeben wird. Diese werden zunächst mit $X_{h,0}$ geschätzt.

$$X_{k,1} = -\frac{1}{\delta_{kk}} \left(\overline{\sum_h} \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{k0} \right); \qquad \left. \begin{matrix} h = 1 \ldots (k-1), (k+1) \ldots n \\ k = 1 \ldots n. \end{matrix} \right\} \tag{425}$$

Die $\overline{\sum_h}$ enthält dabei nur diejenigen Glieder der Zeile k, deren Indizes h von k verschieden sind ($h \neq k$). Der Ansatz konvergiert, wenn die Diagonalglieder in der Matrix der Vorzahlen groß gegenüber den Nebengliedern sind oder genauer, wenn