Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

a) Die vollständige Rechenvorschrift nach C. F. Gauß

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

keiten entstehen unter Umständen nur durch die Fehlerfortpflanzung der Zahlenrechnung. Diese darf erst dann als beseitigt angesehen werden, wenn die Nennerdeterminante nicht wesentlich kleiner ist als das Produkt der Glieder der Hauptdiagonale.

Die Berechnung mit Determinanten nach S. 166 ist nur bei einer kleinen Anzahl von Wurzeln am Platze, die leicht mit Unterdeterminanten angeschrieben werden können. In allen anderen Fällen wird zunächst eine Wurzel durch Elimination oder Substitution der übrigen gewonnen. Diese selbst folgen dann durch Rekursion. Dabei verdient diejenige Rechenvorschrift den Vorzug, deren Zwischenergebnisse übersichtlich und nachprüfbar angeschrieben und deren Endergebnisse mit der kleinsten Stellenzahl einwandfrei erhalten werden. Die Lösungsfehler treten um so mehr zurück, je größer die Nennerdeterminanten aller Zwischenstufen bleiben. Daher ist die Elimination nach Gauß stets dann am Platze, wenn die Vorzahlen δ_{kk} in der Hauptdiagonale der Matrix groß gegenüber den Nebengliedern sind und diese selbst nach dem Rand zu der Größe nach abnehmen.

Auflösung des Ansatzes durch Elimination. a) Die vollständige Rechenvorschrift nach C. F. Gauß. Die Elimination beruht in der Rückbildung des Systems mit n Unbekannten auf ein System mit $(n-1)$ Unbekannten. Man verwendet Vorwärts- oder Rückwärtselimination, um zunächst die $n$te oder die erste Unbekannte zu bestimmen und findet alle übrigen durch Rekursion der Lösung. Auf diese Weise entsteht eine Rechenvorschrift von großer Übersichtlichkeit.

Bei Substitution der Unbekannten wird eine Unbekannte als Funktion der übrigen in eine andere Gleichung eingesetzt und auf diese Weise in beliebiger, zumeist durch den Ansatz vorgeschriebener Reihenfolge zuerst eine Unbekannte X_k gefunden. Die übrigen ergeben sich wiederum durch Rekursion. Die Substitution eignet sich also bei unregelmäßiger Matrix. Sie führt unter Umständen auch dann noch zu brauchbaren Ergebnissen, wenn die Elimination nach gebundener Rechenvorschrift versagt.

Die Elimination ist als gebundene Rechenvorschrift von C. F. Gauß angegeben worden und als Gaußscher Algorithmus in der Geodäsie seit langem zur Lösung der Normalgleichungen bekannt. Hierbei wird bei n Unbekannten in n Eliminationsstufen stets die linksstehende Unbekannte ausgeschlossen, indem die in geeigneter Form erweiterte erste oder letzte Gleichung von den übrigen Gleichungen der Eliminationsstufe abgezogen wird. Zur Nachprüfung der Zahlenrechnung jeder Elimination werden die algebraischen Summen der Vorzahlen δ_{ik} jeder Zeile gebildet und als Zeilen- oder Quersummen $(\delta_{1\Sigma} \ldots \delta_{n\Sigma})$ mitgeführt.

$$\begin{array}{l}
X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \cdots + X_k\delta_{1k} + \cdots + X_n\delta_{1n} = \delta_{10}\,, \\
X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \cdots + X_k\delta_{2k} + \cdots + X_n\delta_{2n} = \delta_{20}\,, \\
X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + \cdots + X_k\delta_{3k} + \cdots + X_n\delta_{3n} = \delta_{30}\,, \\
\vdots \qquad \vdots \\
X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \cdots + X_k\delta_{nk} + \cdots + X_n\delta_{nn} = \delta_{n0}\,.
\end{array}$$

$$\delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \cdots \delta_{1n} \quad \text{oder} \quad \delta_{1\Sigma'} = \delta_{11} + \delta_{12} + \cdots \delta_{1n} + \delta_{10}\,. \tag{370}$$

Bei Vorwärtselimination wird die erste Gleichung der Reihe nach mit

$$-\varkappa_{12} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\,,\ -\varkappa_{13} = -\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\,, \ldots, -\varkappa_{1n} = -\frac{\delta_{n1}}{\delta_{11}} \tag{371}$$

erweitert und zu den folgenden addiert.

$$\left.\begin{aligned}
&X_2\left(\delta_{22}-\delta_{12}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)+X_3\left(\delta_{23}-\delta_{13}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_k\left(\delta_{2k}-\delta_{1k}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_n\left(\delta_{2n}-\delta_{1n}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)\\
&\qquad=\delta_{20}-\delta_{10}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}};\quad \delta_{2\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}},\quad \text{oder}\quad \delta_{2\Sigma'}-\delta_{1\Sigma'}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}},\\
&X_2\left(\delta_{32}-\delta_{12}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)+X_3\left(\delta_{33}-\delta_{13}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_k\left(\delta_{3k}-\delta_{1k}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)+\cdots+X_n\left(\delta_{3n}-\delta_{1n}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}\right)\\
&\qquad=\delta_{30}-\delta_{10}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}};\quad \delta_{3\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}},\quad \text{oder}\quad \delta_{3\Sigma'}-\delta_{1\Sigma'}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}.
\end{aligned}\right|\qquad (372)$$

Auf diese Weise ist X_1 ausgeschlossen und die erste Eliminationsstufe mit $(n-1)$ Gleichungen gebildet worden. Sie ist nach dem Ergebnis der Rechnung unter Beachtung des Maxwellschen Gesetzes ebenfalls zur Hauptdiagonale symmetrisch. Ihre Vorzahlen erhalten im Sinne von C. F. Gauß folgende Bezeichnung:

$$\left.\begin{aligned}
&X_2\,\delta_{22}^{(1)}+X_3\,\delta_{23}^{(1)}+\cdots+X_k\,\delta_{2k}^{(1)}+\cdots+X_n\,\delta_{2n}^{(1)}=\delta_{20}^{(1)};\qquad \delta_{2\Sigma}^{(1)},\qquad \delta_{2\Sigma'}^{(1)},\\
&X_2\,\delta_{32}^{(1)}+X_3\,\delta_{33}^{(1)}+\cdots+X_k\,\delta_{3k}^{(1)}+\cdots+X_n\,\delta_{3n}^{(1)}=\delta_{30}^{(1)};\qquad \delta_{3\Sigma}^{(1)},\qquad \delta_{3\Sigma'}^{(1)}.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right|\qquad (373)$$

Die Richtigkeit der Zahlenrechnung wird durch die folgende Identität festgestellt:

$$\delta_{2\Sigma}^{(1)}=\delta_{22}^{(1)}+\delta_{23}^{(1)}+\cdots\delta_{2n}^{(1)}=\delta_{2\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}, \qquad (374)$$

$$\delta_{2\Sigma'}^{(1)}=\delta_{2\Sigma}^{(1)}+\delta_{20}^{(1)}. \qquad (375)$$

Hierauf wird X_2 ausgeschlossen, indem die erste Gleichung der ersten Stufe der Reihe nach mit $-\varkappa_{23}=-\delta_{32}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)};\ -\varkappa_{24}=-\delta_{42}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$ erweitert und zu den folgenden addiert wird. Auf diese Weise wird die zweite Eliminationsstufe mit $(n-2)$ Unbekannten $X_3\ldots X_n$ gebildet. Ihre Vorzahlen führen die Bezeichnung $\delta_{33}^{(2)}\ldots\delta_{3n}^{(2)}$ usw. Die Richtigkeit der Rechnung folgt aus

$$\delta_{3\Sigma}^{(2)}=\delta_{33}^{(2)}+\delta_{34}^{(2)}+\cdots\delta_{3n}^{(2)}=\delta_{3\Sigma}^{(1)}-\delta_{2\Sigma}^{(1)}\frac{\delta_{32}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};\qquad \delta_{3\Sigma}^{(1)}=\delta_{3\Sigma}-\delta_{1\Sigma}\frac{\delta_{31}}{\delta_{11}}.$$

Die Elimination ergibt schließlich

$$X_n=\frac{\delta_{n0}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}}. \qquad (376)$$

In dem Ansatz (372) ist $1\,\delta_{21}/\delta_{11}$ die überzählige Größe X_{12}, welche von $-X_2=1$ erzeugt wird. Demnach sind

$$\delta_{22}-\delta_{12}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}=\delta_{22}^{(1)},\qquad \delta_{2k}-\delta_{1k}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}=\delta_{k2}-\delta_{k1}\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}=\delta_{2k}^{(1)} \qquad (377)$$

die Verschiebungen der Punkte $2\ldots k$, welche aus $-X_2=1$ und gleichzeitig durch die $-X_2=1$ zugeordnete überzählige Größe X_{12} entstehen. $\delta_{22}^{(1)}\ldots\delta_{2k}^{(1)}$ sind also Verschiebungen in einem einfach statisch unbestimmten Hauptsystem, in dem X_1 nicht mehr als überzählige Größe auftritt. Ebenso können $\delta_{33}^{(2)}\ldots\delta_{3k}^{(2)}$ als die Verschiebungen der Punkte $3\ldots k$ eines zweifach statisch unbestimmten Hauptsystems angesehen werden, in dem X_1 und X_2 nicht mehr als überzählige Größen enthalten sind.

Vollständige Vorwärtselimination für fünf überzählige Größen (378).

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
I	1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{10}
			$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	—
	2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{20}
	3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{30}
	4	δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{40}
	5	δ_{51}	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{50}
II	$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
				$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	—
	$3^{(1)}$		$\delta_{32}^{(1)}$	$\delta_{33}^{(1)}$	$\delta_{34}^{(1)}$	$\delta_{35}^{(1)}$	$\delta_{30}^{(1)}$
	$4^{(1)}$		$\delta_{42}^{(1)}$	$\delta_{43}^{(1)}$	$\delta_{44}^{(1)}$	$\delta_{45}^{(1)}$	$\delta_{40}^{(1)}$
	$5^{(1)}$		$\delta_{52}^{(1)}$	$\delta_{53}^{(1)}$	$\delta_{54}^{(1)}$	$\delta_{55}^{(1)}$	$\delta_{50}^{(1)}$
III	$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
					$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	—
	$4^{(2)}$			$\delta_{43}^{(2)}$	$\delta_{44}^{(2)}$	$\delta_{45}^{(2)}$	$\delta_{40}^{(2)}$
	$5^{(2)}$			$\delta_{53}^{(2)}$	$\delta_{54}^{(2)}$	$\delta_{55}^{(2)}$	$\delta_{50}^{(2)}$
IV	$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
						$\varkappa_{45}$	—
	$5^{(3)}$				$\delta_{54}^{(3)}$	$\delta_{55}^{(3)}$	$\delta_{50}^{(3)}$
V	$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$

$$\delta_{22}^{(1)} = \delta_{22} - \varkappa_{12}\,\delta_{12},$$
$$\delta_{23}^{(1)} = \delta_{23} - \varkappa_{12}\,\delta_{13},$$
$$\delta_{24}^{(1)} = \delta_{24} - \varkappa_{12}\,\delta_{14},$$
$$\delta_{25}^{(1)} = \delta_{25} - \varkappa_{12}\,\delta_{15},$$
$$\varkappa_{12} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}};$$

$$\begin{aligned}\delta_{33}^{(2)} &= \delta_{33}^{(1)} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)}\\ &= \delta_{33} - \varkappa_{13}\,\delta_{13} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)},\end{aligned}$$
$$\delta_{34}^{(2)} = \delta_{34} - \varkappa_{13}\,\delta_{14} - \varkappa_{23}\,\delta_{24}^{(1)},$$
$$\delta_{35}^{(2)} = \delta_{35} - \varkappa_{13}\,\delta_{15} - \varkappa_{23}\,\delta_{25}^{(1)},$$
$$\varkappa_{13} = \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}};$$
$$\varkappa_{23} = \frac{\delta_{23}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};$$

$$\begin{aligned}\delta_{44}^{(3)} &= \delta_{44}^{(2)} - \varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}\\ &= \delta_{44}^{(1)} - \varkappa_{24}\,\delta_{24}^{(1)} - \varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}\\ &= \delta_{44} - \varkappa_{14}\,\delta_{14} - \varkappa_{24}\,\delta_{24}^{(1)} - \varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)},\end{aligned}$$
$$\delta_{45}^{(3)} = \delta_{45} - \varkappa_{14}\,\delta_{15} - \varkappa_{24}\,\delta_{25}^{(1)} - \varkappa_{34}\,\delta_{35}^{(2)},$$
$$\varkappa_{14} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{11}};$$
$$\varkappa_{24} = \frac{\delta_{24}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};$$
$$\varkappa_{34} = \frac{\delta_{34}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}};$$

$$\begin{aligned}\delta_{55}^{(4)} &= \delta_{55}^{(3)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\\ &= \delta_{55}^{(2)} - \varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\\ &= \delta_{55}^{(1)} - \varkappa_{25}\,\delta_{25}^{(1)} - \varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}\\ &= \delta_{55} - \varkappa_{15}\,\delta_{15} - \varkappa_{25}\,\delta_{25}^{(1)} - \varkappa_{35}\,\delta_{35}^{(2)} - \varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)},\end{aligned}$$
$$\varkappa_{15} = \frac{\delta_{15}}{\delta_{11}};$$
$$\varkappa_{25} = \frac{\delta_{25}^{(1)}}{\delta_{22}^{(1)}};$$
$$\varkappa_{35} = \frac{\delta_{35}^{(2)}}{\delta_{33}^{(2)}};$$
$$\varkappa_{45} = \frac{\delta_{45}^{(3)}}{\delta_{44}^{(3)}};$$

I	1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{10}
II	$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
III	$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
IV	$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
V	$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{22}^{(1)} = \delta_{22} - \varkappa_{12}\,\delta_{12}; \qquad \delta_{33}^{(2)} = \delta_{33}^{(1)} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)} = \delta_{33} - \varkappa_{13}\,\delta_{13} - \varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)},\\
&\delta_{2k}^{(1)} = \delta_{2k} - \varkappa_{12}\,\delta_{1k}, \qquad \delta_{3k}^{(2)} = \delta_{3k}^{(1)} - \varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)} = \delta_{3k} - \varkappa_{13}\,\delta_{1k} - \varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)},\\
&\delta_{kk}^{(k-1)} = \delta_{kk} - \varkappa_{1k}\,\delta_{1k} - \varkappa_{2k}\,\delta_{2k}^{(1)} - \varkappa_{3k}\,\delta_{3k}^{(2)} - \cdots \varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{(k-1)k}^{(k-2)},\\
&\delta_{kn}^{(k-1)} = \delta_{kn} - \varkappa_{1k}\,\delta_{1n} - \varkappa_{2k}\,\delta_{2n}^{(1)} - \varkappa_{3k}\,\delta_{3n}^{(2)} - \cdots \varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{(k-1)n}^{(k-2)},\\
&\delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \varkappa_{1k}\,\delta_{10} - \varkappa_{2k}\,\delta_{20}^{(1)} - \varkappa_{3k}\,\delta_{30}^{(2)} - \cdots \varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{(k-1)0}^{(k-2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{379}$$

Die vollständige Elimination bietet eine mehrfache Möglichkeit zur Substitution der Ergebnisse der einen Gleichung in einer anderen derselben Stufe und damit zur unmittelbaren Nachprüfung der Lösung.

b) Die abgekürzte Rechenvorschrift nach C. F. Gauß. Der Algorithmus von Gauß kann im Gegensatz zu (378) auf die erste Gleichung einer jeden Eliminationsstufe beschränkt werden, so daß ein reduzierter Ansatz von n Elastizitätsgleichungen entsteht, die n Hauptsystemen mit ansteigender statischer Unbestimmtheit zugeordnet sind.

$$\left.\begin{array}{rr}
X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_5\delta_{13} + \quad & + X_n\delta_{1n} = \delta_{10}, \\
X_2\delta_{22}^{(1)} + X_3\delta_{23}^{(1)} + \quad & + X_n\delta_{2n}^{(1)} = \delta_{20}^{(1)}, \\
X_3\delta_{33}^{(2)} + \quad & + X_n\delta_{3n}^{(2)} = \delta_{30}^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & X_{n-1}\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + X_n\delta_{(n-1)n}^{(n-2)} = \delta_{(n-1)0}^{(n-2)}, \\
 & + X_n\delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{n0}^{(n-1)}.
\end{array}\right\} \qquad (380)$$

Die abgekürzte Vorwärtselimination liefert X_n ebenso wie der vollständige Ansatz und genügt zur Berechnung aller anderen überzähligen Größen X_k $(k = n - 1 \ldots 1)$ durch schrittweises Einsetzen der Ergebnisse in die übrigen Gleichungen des reduzierten Ansatzes (380). Er bedeutet mathematisch die Beseitigung aller Glieder der Matrix (319) unterhalb der Hauptdiagonale. Bei Rückwärtselimination verschwinden alle Glieder oberhalb der Hauptdiagonale. Die Rekursion kann auch als wiederholte Anwendung des Gaußschen Algorithmus in der entgegengesetzten Richtung angesehen werden. Ist die Matrix der Elastizitätsgleichungen symmetrisch zur Nebendiagonale, so ist die Vorwärtselimination mit der Rückwärtselimination identisch.

Die Rechenvorschrift wird an einem fünffach statisch unbestimmten System gezeigt (S. 220).

$$X_5 = \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

Die anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus den Gleichungen $4^{(3)}$, $3^{(2)}$, $2^{(1)}$ und 1 gefunden (378):

k	5	4	3	2	1
$-X_2\varkappa_{k2}$	.	.	.	.	$-X_2\varkappa_{12}$
$-X_3\varkappa_{k3}$	.	.	.	$-X_3\varkappa_{23}$	$-X_3\varkappa_{13}$
$-X_4\varkappa_{k4}$	.	.	$-X_4\varkappa_{34}$	$-X_4\varkappa_{24}$	$-X_4\varkappa_{14}$
$-X_5\varkappa_{k5}$	.	$-X_5\varkappa_{45}$	$-X_5\varkappa_{35}$	$-X_5\varkappa_{25}$	$-X_5\varkappa_{15}$
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\delta_{50}^{(4)}/\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{40}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{30}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{20}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(0)}/\delta_{11}^{(0)}$
$\Sigma_{k0} = X_k$	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1
k	5	4	3	2	1

(382)

Zur Nachprüfung der Ergebnisse können die Elastizitätsgleichungen (1) . . . (5) verwendet werden. (Fortsetzung des Textes S. 223.)