Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

b) Die abgekürzte Rechenvorschrift nach C. F. Gauß

Die vollständige Elimination bietet eine mehrfache Möglichkeit zur Substitution der Ergebnisse der einen Gleichung in einer anderen derselben Stufe und damit zur unmittelbaren Nachprüfung der Lösung.

b) Die abgekürzte Rechenvorschrift nach C. F. Gauß. Der Algorithmus von Gauß kann im Gegensatz zu (378) auf die erste Gleichung einer jeden Eliminationsstufe beschränkt werden, so daß ein reduzierter Ansatz von n Elastizitätsgleichungen entsteht, die n Hauptsystemen mit ansteigender statischer Unbestimmtheit zugeordnet sind.

$$\left.\begin{array}{rrrl}
X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} + X_3\,\delta_{13} + & & + X_n\,\delta_{1n} & = \delta_{10}, \\
X_2\,\delta_{22}^{(1)} + X_3\,\delta_{23}^{(1)} + & & + X_n\,\delta_{2n}^{(1)} & = \delta_{20}^{(1)}, \\
X_3\,\delta_{33}^{(2)} + & & + X_n\,\delta_{3n}^{(2)} & = \delta_{30}^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
 & X_{n-1}\,\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} & + X_n\,\delta_{(n-1)n}^{(n-2)} & = \delta_{(n-1)0}^{(n-2)}, \\
 & & + X_n\,\delta_{nn}^{(n-1)} & = \delta_{n0}^{(n-1)}.
\end{array}\right\} \quad (380)$$

Die abgekürzte Vorwärtselimination liefert X_n ebenso wie der vollständige Ansatz und genügt zur Berechnung aller anderen überzähligen Größen X_k $(k = n - 1 \ldots 1)$ durch schrittweises Einsetzen der Ergebnisse in die übrigen Gleichungen des reduzierten Ansatzes (380). Er bedeutet mathematisch die Beseitigung aller Glieder der Matrix (319) unterhalb der Hauptdiagonale. Bei Rückwärtselimination verschwinden alle Glieder oberhalb der Hauptdiagonale. Die Rekursion kann auch als wiederholte Anwendung des Gaußschen Algorithmus in der entgegengesetzten Richtung angesehen werden. Ist die Matrix der Elastizitätsgleichungen symmetrisch zur Nebendiagonale, so ist die Vorwärtselimination mit der Rückwärtselimination identisch.

Die Rechenvorschrift wird an einem fünffach statisch unbestimmten System gezeigt (S. 220).

$$X_5 = \frac{\delta_{50}^{(4)}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

Die anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus den Gleichungen $4^{(3)}$, $3^{(2)}$, $2^{(1)}$ und 1 gefunden (378):

k	5	4	3	2	1
$-X_2\varkappa_{k2}$	.	.	.	.	$-X_2\varkappa_{12}$
$-X_3\varkappa_{k3}$	.	.	.	$-X_3\varkappa_{23}$	$-X_3\varkappa_{13}$
$-X_4\varkappa_{k4}$	.	.	$-X_4\varkappa_{34}$	$-X_4\varkappa_{24}$	$-X_4\varkappa_{14}$
$-X_5\varkappa_{k5}$	.	$-X_5\varkappa_{45}$	$-X_5\varkappa_{35}$	$-X_5\varkappa_{25}$	$-X_5\varkappa_{15}$
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\delta_{50}^{(4)}/\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{40}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{30}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{20}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{10}^{(0)}/\delta_{11}^{(0)}$
$\Sigma_{k0} = X_k$	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1
k	5	4	3	2	1

(382)

Zur Nachprüfung der Ergebnisse können die Elastizitätsgleichungen (1) ... (5) verwendet werden. (Fortsetzung des Textes S. 223.)

Abgekürzte Rechenvorschrift für die Vorwärtselimination von fünf überzähligen Größen (381)**.

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Kontrollen $[\delta_{i\Sigma} = \sum_{k=1}^{k=5} \delta_{ik}]$	Belastungsglieder δ_{i0} — zur Bestimmung von $X_k =$					Belastungsfall ( )
								β_{5k}	β_{4k}	β_{3k}	β_{2k}	β_{1k}	
i	k	1	2	3	4	5	Σ	0	0	0	0	0	0
1	δ_{1k}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	$\delta_{1\Sigma}$	0	0	0	0	1	δ_{10}
	$\varkappa_{1k}$	·	δ_{12}/δ_{11}	δ_{13}/δ_{11}	δ_{14}/δ_{11}	δ_{15}/δ_{11}	·	·	·	·	·	*	δ_{10}/δ_{11}
2	δ_{2k}	(δ_{21})	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	$\delta_{2\Sigma}$	0	0	0	1	0	δ_{20}
	$-\varkappa_{12}\delta_{1k}$	·	$-\varkappa_{12}\delta_{12}$	$-\varkappa_{12}\delta_{13}$	$-\varkappa_{12}\delta_{14}$	$-\varkappa_{12}\delta_{15}$	$-\varkappa_{12}\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{12}\delta_{10}$
	$\Sigma_{2k} = \delta_{2k}^{(1)}$	·	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	0	0	0	1	·	$\delta_{20}^{(1)}$
	$\varkappa_{2k}$	·	·	$\delta_{23}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$	·	·	·	·	*	·	$\delta_{20}^{(1)}/\delta_{22}^{(1)}$
3	δ_{3k}	(δ_{31})	(δ_{32})	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	$\delta_{3\Sigma}$	0	0	1	0	0	δ_{30}
	$-\varkappa_{13}\delta_{1k}$	·	·	$-\varkappa_{13}\delta_{13}$	$-\varkappa_{13}\delta_{14}$	$-\varkappa_{13}\delta_{15}$	$-\varkappa_{13}\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{13}\delta_{10}$
	$-\varkappa_{23}\delta_{2k}^{(1)}$	·	·	$-\varkappa_{23}\delta_{23}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\delta_{24}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\delta_{25}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{23}\delta_{20}^{(1)}$
	$\Sigma_{3k} = \delta_{3k}^{(2)}$	·	·	$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	0	0	1	·	·	$\delta_{30}^{(2)}$
	$\varkappa_{3k}$	·	·	·	$\delta_{34}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$	·	·	·	*	·	·	$\delta_{30}^{(2)}/\delta_{33}^{(2)}$
4	δ_{4k}	(δ_{41})	(δ_{42})	(δ_{43})	δ_{44}	δ_{45}	$\delta_{4\Sigma}$	0	1	0	0	0	δ_{40}
	$-\varkappa_{14}\delta_{1k}$	·	·	·	$-\varkappa_{14}\delta_{14}$	$-\varkappa_{14}\delta_{15}$	$-\varkappa_{14}\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{14}\delta_{10}$
	$-\varkappa_{24}\delta_{2k}^{(1)}$	·	·	·	$-\varkappa_{24}\delta_{24}^{(1)}$	$-\varkappa_{24}\delta_{25}^{(1)}$	$-\varkappa_{24}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{24}\delta_{20}^{(1)}$
	$-\varkappa_{34}\delta_{3k}^{(2)}$	·	·	·	$-\varkappa_{34}\delta_{34}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\delta_{35}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{34}\delta_{30}^{(2)}$
	$\Sigma_{4k} = \delta_{4k}^{(3)}$	·	·	·	$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	0	1	·	·	·	$\delta_{40}^{(3)}$
	$\varkappa_{4k}$	·	·	·	·	$\delta_{45}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$	·	·	*	·	·	·	$\delta_{40}^{(3)}/\delta_{44}^{(3)}$
5	δ_{5k}	(δ_{51})	(δ_{52})	(δ_{53})	(δ_{54})	δ_{55}	$\delta_{5\Sigma}$	1	0	0	0	0	δ_{50}
	$-\varkappa_{15}\delta_{1k}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{15}\delta_{15}$	$-\varkappa_{15}\delta_{1\Sigma}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{15}\delta_{10}$
	$-\varkappa_{25}\delta_{2k}^{(1)}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{25}\delta_{25}^{(1)}$	$-\varkappa_{25}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{25}\delta_{20}^{(1)}$
	$-\varkappa_{35}\delta_{3k}^{(2)}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{35}\delta_{35}^{(2)}$	$-\varkappa_{35}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{35}\delta_{30}^{(2)}$
	$-\varkappa_{45}\delta_{4k}^{(3)}$	·	·	·	·	$-\varkappa_{45}\delta_{45}^{(3)}$	$-\varkappa_{45}\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	·	·	·	·	·	$-\varkappa_{45}\delta_{40}^{(3)}$
	$\Sigma_{5k} = \delta_{5k}^{(4)}$	·	·	·	·	$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	1	·	·	·	·	$\delta_{50}^{(4)}$
	·	·	·	·	·	·	·	*	·	·	·	·	$\delta_{50}^{(4)}/\delta_{55}^{(4)}$

* Die Quotienten $1/\delta_{kk}^{(k-1)}$ werden unmittelbar in die Rekursionstabelle (385) eingetragen.
** Die eingeklammerten Vorzahlen sind nur zur Erleichterung der Summenbildung $\delta_{k\Sigma}$ beigefügt.

Berechnung der Vorzahlen β_{ik} eines Ansatzes mit fünf überzähligen Größen (384).

a)

β_{15}	β_{25}	β_{35}	β_{45}	β_{55}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	0
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	0
			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	0
				$\varkappa_{45}$	
				$\delta_{55}^{(4)}$	1

Aus a) folgt $\beta_{55} = \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}}$.

Durch Rekursion sind folgende Vorzahlen bestimmt:

$\beta_{45} = -\varkappa_{45}\beta_{55}$; $\quad \beta_{35} = -\varkappa_{34}\beta_{45} - \varkappa_{35}\beta_{55}$;

$\beta_{25} = -\varkappa_{23}\beta_{35} - \varkappa_{24}\beta_{45} - \varkappa_{25}\beta_{55}$;

$\beta_{15} = -\varkappa_{12}\beta_{25} - \varkappa_{13}\beta_{35} - \varkappa_{14}\beta_{45} - \varkappa_{15}\beta_{55}$;

$\beta_{45} = \beta_{54}$ usw.

Aus a): $\beta_{54} = \beta_{45}$.

b)

β_{14}	β_{24}	β_{34}	β_{44}	β_{54}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	0
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	0
			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	1
				$\varkappa_{45}$	

$\beta_{44} = \frac{1}{\delta_{44}^{(3)}} - \varkappa_{45}\beta_{54}$;

$\beta_{34} = -\varkappa_{34}\beta_{44} - \varkappa_{35}\beta_{54}$;

$\beta_{24} = -\varkappa_{23}\beta_{34} - \varkappa_{24}\beta_{44} - \varkappa_{25}\beta_{54}$;

$\beta_{14} = -\varkappa_{12}\beta_{24} - \varkappa_{13}\beta_{34} - \varkappa_{14}\beta_{44} - \varkappa_{15}\beta_{54}$;

$\beta_{34} = \beta_{43}$ usw.

Aus a) u. b): $\beta_{53} = \beta_{35}$, $\beta_{43} = \beta_{34}$.

c)

β_{13}	β_{23}	β_{33}	β_{43}	β_{53}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	0
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	1
			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	

$\beta_{33} = \frac{1}{\delta_{33}^{(2)}} - \varkappa_{34}\beta_{43} - \varkappa_{35}\beta_{53}$,

$\beta_{23} = -\varkappa_{23}\beta_{33} - \varkappa_{24}\beta_{43} - \varkappa_{25}\beta_{53}$,

$\beta_{13} = -\varkappa_{12}\beta_{23} - \varkappa_{13}\beta_{33} - \varkappa_{14}\beta_{43} - \varkappa_{15}\beta_{53}$,

$\beta_{23} = \beta_{32}$ usw.

Aus a), b) u. c):

$\beta_{52} = \beta_{25}$, $\beta_{42} = \beta_{24}$, $\beta_{32} = \beta_{23}$.

d)

β_{12}	β_{22}	β_{32}	β_{42}	β_{52}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	0
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	$\delta_{25}^{(1)}$	1
		$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$	

$\beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(1)}} - \varkappa_{23}\beta_{32} - \varkappa_{24}\beta_{42} - \varkappa_{25}\beta_{52}$,

$\beta_{12} = -\varkappa_{12}\beta_{22} - \varkappa_{13}\beta_{32} - \varkappa_{14}\beta_{42} - \varkappa_{15}\beta_{52}$,

$\beta_{12} = \beta_{21}$ usw.

Aus a), b), c) u. d):

$\beta_{51} = \beta_{15}$, $\beta_{41} = \beta_{14}$, $\beta_{31} = \beta_{13}$, $\beta_{21} = \beta_{12}$.

e)

β_{11}	β_{21}	β_{31}	β_{41}	β_{51}	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	1
	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$	$\varkappa_{15}$	

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} - \varkappa_{12}\beta_{21} - \varkappa_{13}\beta_{31} - \varkappa_{14}\beta_{41} - \varkappa_{15}\beta_{51}.$$

Rechenvorschrift in Verbindung mit (381) für die Rekursion eines Ansatzes mit fünf überzähligen Größen zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} (385).

			δ_{50}	δ_{40}	δ_{30}	δ_{20}	δ_{10}	
	i	k	5	4	3	2	1	i
		$-\beta_{52}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{52}\varkappa_{12}$	
		$-\beta_{53}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{53}\varkappa_{23}$	$-\beta_{53}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{54}\varkappa_{k4}$	·	·	$-\beta_{54}\varkappa_{34}$	$-\beta_{54}\varkappa_{24}$	$-\beta_{54}\varkappa_{14}$	
X_5	5	$-\beta_{55}\varkappa_{k5}$	·	$-\beta_{55}\varkappa_{45}$	$-\beta_{55}\varkappa_{35}$	$-\beta_{55}\varkappa_{25}$	$-\beta_{55}\varkappa_{15}$	5
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$1/\delta_{55}^{(4)}$	0	0	0	0	
		$X_k = \beta_{5k}$	β_{55}	β_{54}	β_{53}	β_{52}	β_{51}	
		$-\beta_{42}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{42}\varkappa_{12}$	
		$-\beta_{43}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{43}\varkappa_{23}$	$-\beta_{43}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{44}\varkappa_{k4}$	·	·	$-\beta_{44}\varkappa_{34}$	$-\beta_{44}\varkappa_{24}$	$-\beta_{44}\varkappa_{14}$	
X_4	4	$-\beta_{45}\varkappa_{k5}$	·	$-\beta_{45}\varkappa_{45}$	$-\beta_{45}\varkappa_{35}$	$-\beta_{45}\varkappa_{25}$	$-\beta_{45}\varkappa_{15}$	4
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	$1/\delta_{44}^{(3)}$	0	0	0	
		$X_k = \beta_{4k}$	β_{45}	β_{44}	β_{43}	β_{42}	β_{41}	
		$-\beta_{32}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{32}\varkappa_{12}$	
		$-\beta_{33}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{33}\varkappa_{23}$	$-\beta_{33}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{34}\varkappa_{k4}$	·	·	$-\beta_{34}\varkappa_{34}$	$-\beta_{34}\varkappa_{24}$	$-\beta_{34}\varkappa_{14}$	
X_3	3	$-\beta_{35}\varkappa_{k5}$	·	·	$-\beta_{35}\varkappa_{35}$	$-\beta_{35}\varkappa_{25}$	$-\beta_{35}\varkappa_{15}$	3
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	·	$1/\delta_{33}^{(2)}$	0	0	
		$X_k = \beta_{3k}$	β_{35}	β_{34}	β_{33}	β_{32}	β_{31}	
		$-\beta_{22}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{22}\varkappa_{12}$	
		$-\beta_{23}\varkappa_{k3}$	·	·	·	$-\beta_{23}\varkappa_{23}$	$-\beta_{23}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{24}\varkappa_{k4}$	·	·	·	$-\beta_{24}\varkappa_{24}$	$-\beta_{24}\varkappa_{14}$	
X_2	2	$-\beta_{25}\varkappa_{k5}$	·	·	·	$-\beta_{25}\varkappa_{25}$	$-\beta_{25}\varkappa_{15}$	2
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	·	·	$1/\delta_{22}^{(1)}$	0	
		$X_k = \beta_{2k}$	β_{25}	β_{24}	β_{23}	β_{22}	β_{21}	
		$-\beta_{12}\varkappa_{k2}$	·	·	·	·	$-\beta_{12}\varkappa_{12}$	
		$-\beta_{13}\varkappa_{k3}$	·	·	·	·	$-\beta_{13}\varkappa_{13}$	
		$-\beta_{14}\varkappa_{k4}$	·	·	·	·	$-\beta_{14}\varkappa_{14}$	
X_1	1	$-\beta_{15}\varkappa_{k5}$	·	·	·	·	$-\beta_{15}\varkappa_{15}$	1
		$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	·	·	·	·	$1/\delta_{11}$	
		$X_k = \beta_{1k}$	β_{15}	β_{14}	β_{13}	β_{12}	β_{11}	

k	1	2	3	4	5
$X_1\delta_{k1}$	$X_1\delta_{11}$	$X_1\delta_{21}$	$X_1\delta_{31}$	$X_1\delta_{41}$	$X_1\delta_{51}$
$X_2\delta_{k2}$	$X_2\delta_{12}$	$X_2\delta_{22}$	$X_2\delta_{32}$	$X_2\delta_{42}$	$X_2\delta_{52}$
$X_3\delta_{k3}$	$X_3\delta_{13}$	$X_3\delta_{23}$	$X_3\delta_{33}$	$X_3\delta_{43}$	$X_3\delta_{53}$
$X_4\delta_{k4}$	$X_4\delta_{14}$	$X_4\delta_{24}$	$X_4\delta_{34}$	$X_4\delta_{44}$	$X_4\delta_{54}$
$X_5\delta_{k5}$	$X_5\delta_{15}$	$X_5\delta_{25}$	$X_5\delta_{35}$	$X_5\delta_{45}$	$X_5\delta_{55}$
$\Sigma_k = \delta_{k0}$	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}

(383)

c) Die Berechnung der konjugierten Matrix. Um die überzähligen Größen für mehrere Belastungsfälle ohne Wiederholung der Elimination anzugeben, wird die konjugierte Matrix zu (319) berechnet. Mit dieser ist nach (326)

$$X_k = \sum_{h=1}^{h=n} \beta_{kh}\,\delta_{h0} \quad \text{und} \quad \beta_{hk} = \beta_{kh}\,.$$

Die Vorzahlen β_{hk} sind nach S. 166 die überzähligen Größen X_h $(h = 1 \ldots n)$ für $\delta_{k0} = 1$. Um die $1/2 \cdot n\,(n+1)$ unabhängigen Glieder der konjugierten Matrix übersichtlich zu berechnen, wird entweder mit der Bestimmung der β_{kn} aus $\delta_{n0} = 1$ durch Vorwärtselimination oder mit der Bestimmung der β_{k1} aus $\delta_{10} = 1$ in Verbindung mit einer Rückwärtselimination begonnen. Die übrigen Vorzahlen ergeben sich auf Grund der Symmetrie der konjugierten Matrix zur Hauptdiagonale durch Rekursion. Zunächst sind mit β_{nn} die Vorzahlen $\beta_{kn} \ldots \beta_{1n}$ bestimmt. Alle übrigen β_{hk} $(h = k \ldots 1)$ werden stets aus den ersten k Gleichungen bestimmt, da die übrigen Vorzahlen $\beta_{(k+1)k} = \beta_{k(k+1)} \ldots$ bekannt sind. Die Berechnung schließt mit dem Werte von β_{11}. Er wird bei allen unsymmetrischen Systemen, die keine zur Nebendiagonale symmetrische Matrix besitzen, durch Rückwärtselimination mit $\delta_{10} = 1$ geprüft.

Die Untersuchung wird auf S. 221 an einem System mit fünf überzähligen Größen bei Vorwärtselimination nach (381) gezeigt [Rechenvorschrift in Verbindung mit (381): S. 222].

Die Elastizitätsgleichungen (319) müssen nach S. 167 durch die Vorzahlen der konjugierten Matrix erfüllt werden. Sie gelten als Rechenprobe; z. B. ist

Kontrollen:

k	1	2	3	4	5
$\beta_{1k}\delta_{k1}$	$\beta_{11}\delta_{11}$	$\beta_{12}\delta_{21}$	$\beta_{13}\delta_{31}$	$\beta_{14}\delta_{41}$	$\beta_{15}\delta_{51}$
$\beta_{2k}\delta_{k2}$	$\beta_{21}\delta_{12}$	$\beta_{22}\delta_{22}$	$\beta_{23}\delta_{32}$	$\beta_{24}\delta_{42}$	$\beta_{25}\delta_{52}$
$\beta_{3k}\delta_{k3}$	$\beta_{31}\delta_{13}$	$\beta_{32}\delta_{23}$	$\beta_{33}\delta_{33}$	$\beta_{34}\delta_{43}$	$\beta_{35}\delta_{53}$
$\beta_{4k}\delta_{k4}$	$\beta_{41}\delta_{14}$	$\beta_{42}\delta_{24}$	$\beta_{43}\delta_{34}$	$\beta_{44}\delta_{44}$	$\beta_{45}\delta_{54}$
$\beta_{5k}\delta_{k5}$	$\beta_{51}\delta_{15}$	$\beta_{52}\delta_{25}$	$\beta_{53}\delta_{35}$	$\beta_{54}\delta_{45}$	$\beta_{55}\delta_{55}$
$\Sigma_k = 1$	1	1	1	1	1

(386)

Die Bedingungen $\sum_h \beta_{hi}\,\delta_{kh} = 0$ für $\delta_{i0} = 1$ werden in der Regel nur dann geprüft, wenn nur ein Teil der Nebenglieder der Matrix vorhanden ist.