Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Anwendung des Gaußschen Algorithmus zur Untersuchung des Sägedachrahmens, Abb. 215. 1. Geometrische Grundlagen.

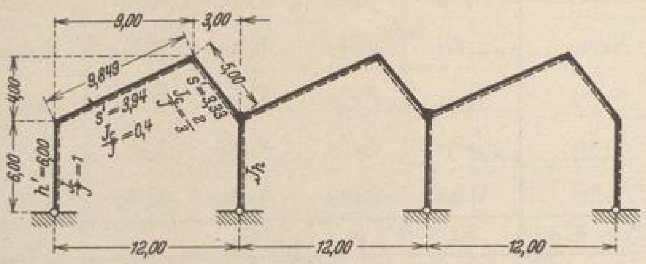

Abb. 215.

Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J, reduzierte Stablängen s', h' Abb. 215.

$$J_c = J_h\,; \qquad \zeta_h = 1\,, \qquad E_b = 210\ \mathrm{t/cm^2}\,, \qquad \alpha_t = 0{,}00001\,.$$

2. Gleichförmig verteilte Belastung der Riegel a, b, c mit $p = 1$ t/m.

3. Hauptsystem: Das Tragwerk ist fünffach statisch unbestimmt. Hauptsystem und statisch unbestimmte Schnittkräfte sind in Abb. 216 angegeben. Als überzählige Größen X_2 und X_4 werden die $1/h$fachen Beträge der waagerechten Komponenten Y_2, Y_4 der Schnittkräfte verwendet. Biegungsmomente des Hauptsystems in Abb. 216.

4. Die Vorzahlen δ_{ik} werden ohne die Mitwirkung der Quer- und Längskräfte angeschrieben und zur Abkürzung der Rechnung dabei in die Anteile zerlegt, die auf die Riegel (a, b, c) und auf die Pfosten d entfallen.

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \delta_{33} = \delta_{11,a} + \delta_{11,b} && = 3{,}306 + 1{,}793 = 5{,}1\\
\delta_{12} &= \delta_{34} = \delta_{12,a} + \delta_{11,b} && = -2{,}668 + 1{,}793 = -0{,}875\\
\delta_{13} &= \delta_{23} = \delta_{13,b} && = +1{,}086\\
\delta_{14} &= \delta_{14,b} && = -2{,}635\\
\delta_{22} &= \delta_{44} = \delta_{22,a} + \delta_{11,b} + 2\,\delta_{22,d} && = 4{,}556 + 1{,}793 + 4{,}0 = 10{,}349\\
\delta_{24} &= \delta_{14,b} - \delta_{22,d} && = -2{,}635 - 2{,}0 = -4{,}635\\
\delta_{35} &= \delta_{35,c} && = +3{,}72\\
\delta_{45} &= \delta_{35,c} + \delta_{22,d} && = +3{,}72 + 2{,}0 = +5{,}72\\
\delta_{55} &= \delta_{55,c} + 2\,\delta_{22,d} && = +13{,}19 + 4{,}0 = +17{,}19
\end{aligned}$$

$$\delta_{11,a} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}75^2 + 3{,}33 \cdot \frac{1}{3} \cdot (0{,}75^2 + 0{,}75 \cdot 1{,}0 + 1{,}0^2) = 3{,}306$$

$$\delta_{11,b} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 0{,}25 + 0{,}25^2) + 3{,}33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}25^2 = 1{,}793$$

$$\delta_{12,a} = -3{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}75\,(2 \cdot 0{,}917 + 1) - 3{,}33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}917\,(2 \cdot 0{,}75 + 1) = -2{,}668$$

$$\delta_{13,b} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}75\,(2 \cdot 0{,}25 + 1) + 3{,}33 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}25\,(2 \cdot 0{,}75 + 1) = 1{,}086$$

$$\delta_{14,b} = -3{,}94 \cdot \frac{1}{6} \cdot [1{,}0\,(2 \cdot 1{,}0 + 0{,}917) + 0{,}25\,(2 \cdot 0{,}917 + 1{,}0)] - \frac{3{,}33}{3} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}917 = -2{,}635$$

$$\delta_{22,a} = 3{,}94 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 0{,}917 + 0{,}917^2) + 3{,}33 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}917^2 = 4{,}556\,,$$

$$\delta_{22,d} = 6{,}0 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1{,}0^2 = 2{,}00; \qquad \delta_{55,c} = (3{,}94 + 3{,}33) \cdot \frac{1}{3} \cdot [1{,}0^2 + 1{,}0 \cdot 1{,}667 + 1{,}667^2] = 13{,}19,$$

$$\delta_{35,c} = \frac{3{,}94}{6} \cdot [1{,}0\,(2 \cdot 1{,}0 + 1{,}667) + 0{,}25\,(2 \cdot 1{,}667 + 1{,}0)] + \frac{3{,}33}{6} \cdot 0{,}25 \cdot (2 \cdot 1{,}667 + 1{,}0) = 3{,}72.$$

(Fortsetzung des Textes auf S. 228.)

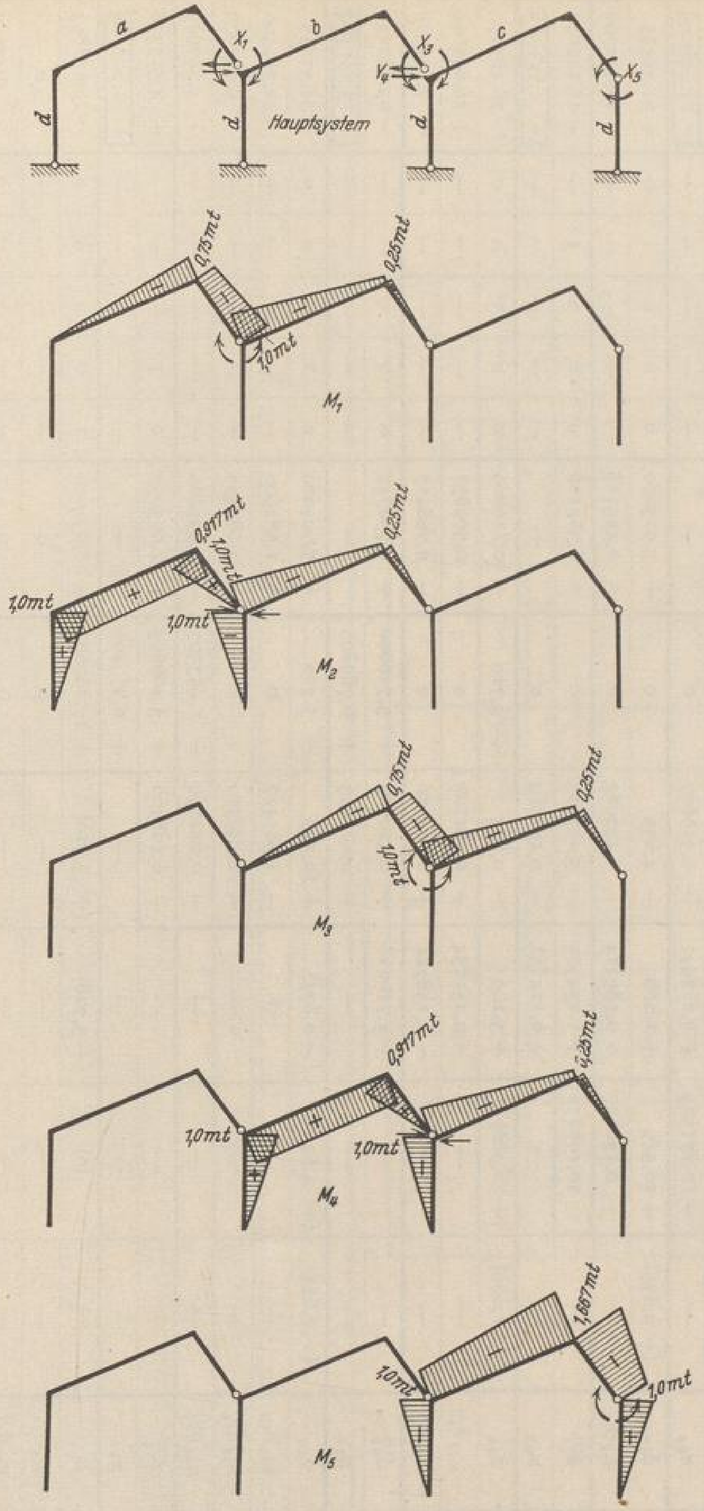
a
b
c
d
X_1
X_3
X_4
X_5
Hauptsystem
0,75mt
0,25mt
1,0mt
M_1
0,917mt
1,0mt
M_2
M_3
M_4
1,667mt
M_5

Abb. 216.

Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus (381).

	X_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$\Sigma\,\delta_{i\Sigma}$	Belastungsglieder δ_{i0} zur Bestimmung von $X_k =$					Belastungsglieder δ_{i0} aus 4. für Belastungsfall 2.
i	k	1	2	3	4	5		β_{k5}	β_{k4}	β_{k3}	β_{k2}	β_{k1}	
1	δ_{1k}	+ 5,100	− 0,875	+ 1,086	− 2,635	0	+ 2,676000	0	0	0	0	1	− 78,16527
	$\varkappa_{1k}$	—	− 0,171569	+ 0,212941	− 0,516667	0	—	—	—	—	—	—	$\boxed{-\ 15{,}326523}$
2	δ_{2k}	(− 0,875)	+ 10,349	+ 1,086	− 4,635	0	+ 5,925000	0	0	0	1	0	+ 31,52335
	$-\varkappa_{12}\,\delta_{1k}$	—	− 0,150123	+ 0,186324	− 0,452083	0	+ 0,459118	—	—	—	—	—	− 13,410708
	$\delta_{2k}^{(1)}$	—	10,198878	+ 1,272324	− 5,087083	0	+ 6,384118	0	0	0	1	—	+ 18,112643
	$\varkappa_{2k}$	—	—	+ 0,124751	− 0,498789	0	—	—	—	—	—	—	$\boxed{+\ 1{,}775945}$
3	δ_{3k}	(+ 1,086)	(+ 1,086)	+ 5,100	− 0,875	+ 3,720	+ 10,117000	0	0	1	0	0	− 78,16527
	$-\varkappa_{13}\,\delta_{1k}$	—	—	− 0,231254	+ 0,561100	0	− 0,569831	—	—	—	—	—	+ 16,644604
	$-\varkappa_{23}\,\delta_{2k}^{(1)}$	—	—	− 0,158724	+ 0,634620	0	− 0,796427	—	—	—	—	—	− 2,259576
	$\delta_{3k}^{(2)}$	—	—	+ 4,710028	+ 0,320720	+ 3,720000	+ 8,750742	0	0	1	—	—	− 63,780242
	$\varkappa_{3k}$	—	—	—	+ 0,068093	+ 0,789805	—	—	—	—	—	—	$\boxed{-\ 13{,}541389}$
4	δ_{4k}	(− 2,635)	(− 4,635)	(− 0,875)	+ 10,349	+ 5,720	+ 7,924000	0	1	0	0	0	+ 31,52335
	$-\varkappa_{14}\,\delta_{1k}$	—	—	—	− 1,361417	0	+ 1,382600	—	—	—	—	—	− 40,385390
	$-\varkappa_{24}\,\delta_{2k}^{(1)}$	—	—	—	− 2,537379	0	+ 3,184325	—	—	—	—	—	+ 9,034379
	$-\varkappa_{34}\,\delta_{3k}^{(2)}$	—	—	—	− 0,021839	− 0,253307	− 0,595866	—	—	—	—	—	+ 4,342999
	$\delta_{4k}^{(3)}$	—	—	—	+ 6,428366	+ 5,466693	+ 11,895059	0	1	—	—	—	+ 4,515338
	$\varkappa_{4k}$	—	—	—	—	+ 0,850402	—	—	—	—	—	—	$\boxed{+\ 0{,}702408}$
5	δ_{5k}	(0)	(0)	(+ 3,720)	(+ 5,720)	+ 17,19000	+ 26,630000	1	0	0	0	0	− 109,68863
	$-\varkappa_{15}\,\delta_{1k}$	—	—	—	—	0	0	—	—	—	—	—	0
	$-\varkappa_{25}\,\delta_{2k}^{(1)}$	—	—	—	—	0	0	—	—	—	—	—	0
	$-\varkappa_{35}\,\delta_{3k}^{(2)}$	—	—	—	—	− 2,938076	− 6,911382	—	—	—	—	—	+ 50,373970
	$-\varkappa_{45}\,\delta_{4k}^{(3)}$	—	—	—	—	− 4,648886	− 10,115579	—	—	—	—	—	− 3,839851
	$\delta_{5k}^{(4)}$	—	—	—	—	+ 9,603039	+ 9,603039	1	—	—	—	—	− 63,154511
		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\boxed{-\ 6{,}576513}$

Rekursion zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} (385).

i	5					4			
k	5	4	3	2	1	4	3	2	1
$-\beta_{i2}\varkappa_{k2}$	—	—	—	—	$-0{,}005947$	—	—	—	$+0{,}018597$
$-\beta_{i3}\varkappa_{k3}$	—	—	—	$+0{,}009507$	$+0{,}016228$	—	—	$-0{,}006762$	$-0{,}011546$
$-\beta_{i4}\varkappa_{k4}$	—	—	$+0{,}006035$	$-0{,}044172$	$-0{,}045755$	—	$-0{,}015720$	$+0{,}115154$	$+0{,}119283$
$-\beta_{i5}\varkappa_{k5}$	—	$-0{,}088559$	$-0{,}082246$	0	0	$+0{,}075311$	$+0{,}069944$	0	0
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\frac{1}{9{,}60303}$	0	0	0	0	0,155561	0	0	0
$X_k = \beta_{ik}$	$+0{,}104134$	$-0{,}088559$	$-0{,}076211$	$-0{,}034665$	$-0{,}035474$	$+0{,}230872$	$+0{,}054224$	$+0{,}108392$	$+0{,}126334$
k	5	4	3	2	1	4	3	2	1
	$X_k = \beta_{5k}$					$X_k = \beta_{4k}$			

i	3			2		1
k	3	2	1	2	1	1
$-\beta_{i2}\varkappa_{k2}$	—	—	$-0{,}001113$	—	$+0{,}026237$	$+0{,}014347$
$-\beta_{i3}\varkappa_{k3}$	—	$-0{,}033535$	$-0{,}057242$	$+0{,}000809$	$+0{,}001381$	$+0{,}006460$
$-\beta_{i4}\varkappa_{k4}$	$-0{,}003693$	$+0{,}027046$	$+0{,}028016$	$+0{,}054065$	$+0{,}056003$	$+0{,}065273$
$-\beta_{i5}\varkappa_{k5}$	$+0{,}060192$	0	0	0	0	0
$\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	$+0{,}212313$	0	0	$+0{,}098050$	0	$+0{,}196078$
$X_k = \beta_{ik}$	$+0{,}268812$	$-0{,}006489$	$-0{,}030339$	$+0{,}152924$	$+0{,}083621$	$+0{,}282158$
k	3	2	1	2	1	1
	$X_k = \beta_{3k}$			$X_k = \beta_{2k}$		$X_k = \beta_{1k}$

Belastungszahlen (Abb. 217):

$$\delta_{10} = \delta_{30} = \delta_{10,a} + \delta_{10,b} = -44{,}18730 - 33{,}97797 = -78{,}16527;$$

$$\delta_{20} = \delta_{40} = \delta_{20,a} + \delta_{20,b} = 65{,}50132 - 33{,}97797 = +31{,}52335;$$

$$\delta_{50} = -109{,}68863;$$

$$\delta_{10,a} = -\{3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}75 \cdot (13{,}5 + 2 \cdot 16{,}875)] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}75(13{,}5 + 2 \cdot 7{,}875) + 1{,}0 \cdot 2 \cdot 7{,}875]\}$$
$$= -44{,}18730;$$

$$\delta_{10,b} = -\{3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}25 \cdot 47{,}25 + 1{,}0 \cdot 2 \cdot 16{,}875] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 0{,}25 \cdot 29{,}25\} = -33{,}97797;$$

$$\delta_{20,a} = 3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[0{,}917 \cdot 47{,}25 + 1{,}0 \cdot 33{,}75] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot 0{,}917 \cdot 29{,}25 = +65{,}50132;$$

$$\delta_{20,b} = \delta_{10,b};$$

$$\delta_{50} = -\{3{,}94 \cdot \tfrac{1}{6}[1{,}667 \cdot 47{,}25 + 1{,}0 \cdot 33{,}750] + 3{,}33 \cdot \tfrac{1}{6}[1{,}667 \cdot 29{,}25 + 1{,}0 \cdot 15{,}75]\}$$
$$= -109{,}68863.$$

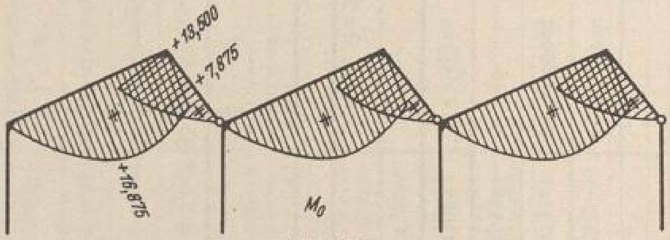

Abb. 217.

5. Matrix der geometrischen Bedingungen mit den Belastungszahlen für die in 2. vorgeschriebene Belastung.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	(δ_{k0})
(1)	5,100	− 0,875	+ 1,086	− 2,635	0	− 78,16527
(2)	− 0,875	+ 10,349	+ 1,086	− 4,635	0	+ 31,52335
(3)	+ 1,086	+ 1,086	+ 5,100	− 0,875	+ 3,720	− 78,16527
(4)	− 2,635	− 4,635	− 0,875	+ 10,349	+ 5,720	+ 31,52335
(5)	0	0	+ 3,720	+ 5,720	+ 17,190	− 109,68863

6. Auflösung des Ansatzes. Die statisch überzähligen Größen werden entweder mit den Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix nach (324) berechnet oder mit Einbeziehung der Belastungszahlen δ_{i0} in den Gaußschen Algorithmus unmittelbar gewonnen. Beide Lösungen sind durch die Vorwärtselimination S. 226 vorbereitet. Rekursion zur Bestimmung der Vorzahlen β_{ik} auf S. 227.

Kontrolle (386):

k	1	2	3	4	5
$\beta_{1k} \cdot \delta_{1k}$	+ 1,439006	− 0,073168	− 0,032948	− 0,332890	0
$\beta_{2k} \cdot \delta_{2k}$	− 0,073168	+ 1,582610	− 0,007047	− 0,502397	0
$\beta_{3k} \cdot \delta_{3k}$	− 0,032948	− 0,007047	+ 1,370941	− 0,047446	− 0,283505
$\beta_{4k} \cdot \delta_{4k}$	− 0,332890	− 0,502397	− 0,047446	+ 2,389294	− 0,506557
$\beta_{5k} \cdot \delta_{5k}$	0	0	− 0,283505	− 0,506557	+ 1,790063
1	1,000000	0,999998	0,999995	1,000004	1,000001

Mit $p = 0{,}01$ und $\varphi = \pm p \sum_i \sum_k |\beta_{ik}\,\delta_{ik}| = \pm p\, 12{,}1$ wird nach (331) der mögliche Fehler von X_k aus der Nennerdeterminante der Bedingungsgleichungen ca. $\pm 0{,}12\, X_k$.

Konjugierte Matrix der Vorzahlen β_{ik}:

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}
X_1	+ 0,282158	+ 0,083621	− 0,030339	+ 0,126334	− 0,035474
X_2	+ 0,083621	+ 0,152924	− 0,006489	+ 0,108392	− 0,034665
X_3	− 0,030339	− 0,006489	+ 0,268812	+ 0,054224	− 0,076211
X_4	+ 0,126334	+ 0,108392	+ 0,054224	+ 0,230872	− 0,088559
X_5	− 0,035474	− 0,034665	− 0,076211	− 0,088559	+ 0,104134

Anwendung der Matrix zur Berechnung der überzähligen Größen X_k.

$$X_1 = +0{,}282158\,\delta_{10} + 0{,}083621\,\delta_{20} - 0{,}030339\,\delta_{30} + 0{,}126334\,\delta_{40} - 0{,}035474\,\delta_{50},$$
$$X_2 = +0{,}083621\,\delta_{10} + 0{,}152924\,\delta_{20} - 0{,}006489\,\delta_{30} + 0{,}108392\,\delta_{40} - 0{,}034665\,\delta_{50},$$
$$X_3 = -0{,}030339\,\delta_{10} - 0{,}006489\,\delta_{20} + 0{,}268812\,\delta_{30} + 0{,}054224\,\delta_{40} - 0{,}076211\,\delta_{50},$$
$$X_4 = +0{,}126334\,\delta_{10} + 0{,}108392\,\delta_{20} + 0{,}054224\,\delta_{30} + 0{,}230872\,\delta_{40} - 0{,}088559\,\delta_{50},$$
$$X_5 = -0{,}035474\,\delta_{10} - 0{,}034665\,\delta_{20} - 0{,}076211\,\delta_{30} - 0{,}088559\,\delta_{40} + 0{,}104134\,\delta_{50}.$$

Mit den Belastungszahlen nach 4. aus der Belastung 2. ergeben sich folgende statisch überzählige Größen:

$$X_1 = -9{,}174075\ \text{mt}; \quad X_2 = +6{,}010664\ \text{t}; \quad X_3 = -8{,}775876\ \text{mt};$$
$$X_4 = +6{,}295086\ \text{t}; \quad X_5 = -6{,}576513\ \text{mt}.$$

Die Vorwärtselimination nach Gauß, S. 226, liefert unter Einbeziehung der Belastungszahlen $X_5 = -6{,}576513$ mt. Die anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion gewonnen.

Rekursion mit Rechenprobe (382).

k	5	4	3	2	1
$-X_2\varkappa_{k2}$					+ 1,031241
$-X_3\varkappa_{k3}$				+ 1,094802	+ 1,868746
$-X_4\varkappa_{k4}$			− 0,428652	+ 3,139917	+ 3,252461
$-X_5\varkappa_{k5}$		+ 5,592678	+ 5,194165	0	0
$X_k^{(k)} = \dfrac{\delta_{k0}^{(k-1)}}{\delta_{kk}^{(k-1)}}$	− 6,576513	+ 0,702408	− 13,541389	+ 1,775945	− 15,326523
$\Sigma_{k0} = X_k =$	− 6,576513	+ 6,295086	− 8,775876	+ 6,010664	− 9,174075
$X_k \cdot \delta_{k0}$	+ 721,368701	+ 198,442199	+ 685,968717	+ 189,476265	+ 717,094049
$X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$	+ 415,336463	+ 3,171610	+ 863,673067	+ 32,167058	+ 1198,001808
k	5	4	3	2	1

Kontrolle: $\sum X_k \cdot \delta_{k0} = \sum X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$ [vgl. (486) S. 295 mit X_k statt Y_k]

$2512{,}3499 \approx 2512{,}3500.$

Kontrolle durch Einsetzen in die Bedingungsgleichungen (383):

k	1	2	3	4	5
$X_1 \cdot \delta_{1k}$	− 46,787781	+ 8,027315	− 9,963045	+ 24,173687	0
$+X_2 \cdot \delta_{2k}$	− 5,259331	+ 62,204361	+ 6,527581	− 27,859428	0
$+X_3 \cdot \delta_{3k}$	− 9,530602	− 9,530602	− 44,756972	+ 7,678892	− 32,646262
$+X_4 \cdot \delta_{4k}$	− 16,587553	− 29,177726	− 5,508201	+ 65,147851	+ 36,007895
$+X_5 \delta_{5k}$	0	0	− 24,464629	− 37,617655	− 113,050260
δ_{k0}	− 78,165267	+ 31,523348	− 78,165266	+ 31,523347	− 109,688627

7. Stütz- und Schnittkräfte des Stabwerks für die Belastung 2. Berechnung der Biegungsmomente in den Querschnitten 5, 6 und 9 durch Superposition des statisch bestimmten und statisch unbestimmten Anteils nach (288) (Abb. 218).

$$\begin{array}{lllllllll}
M & = M_0 - & X_1 M_1 & - \quad X_2 M_2 & - X_3 M_3 - & X_4 M_4 & - X_5 M_5 & \\
M_{(5)} & = 0 & 0 & -6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & = -6{,}0107 \text{ mt} \\
M_{(9)} & = 13{,}5 & -9{,}1741 \cdot 0{,}75 & -6{,}0107 \cdot 0{,}917 & 0 & 0 & 0 & = +1{,}1076 \text{ mt}
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
M_{(6)(9)} & = 0 & -9{,}1741 \cdot 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = -9{,}1741 \text{ mt} \\
M_{(6)(2)} & = 0 & 0 & +6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & -6{,}2951 \cdot 1{,}0 & 0 & = -0{,}2844 \text{ mt} \\
M_{(6)(10)} & = 0 & -9{,}1741 \cdot 1{,}0 & +6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & -6{,}2951 \cdot 1{,}0 & 0 & = -9{,}4585 \text{ mt}
\end{array}\right.$$

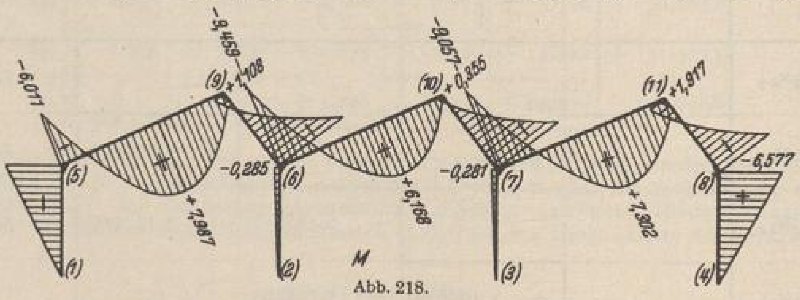

Abb. 218.

Auflösung dreigliedriger Ansätze. Ansätze in der allgemeinen Form (319) sind selten. Die Bedingungen für die Verträglichkeit der Formänderungen der Hauptsysteme hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke liefern meist regelmäßige Ansätze von Gleichungen mit drei, fünf oder sieben Unbekannten, deren Anzahl am Anfang und Ende des Ansatzes abnimmt. Am einfachsten ist der dreigliedrige Ansatz. Er bildet mit der Matrix auf S. 231 die Grundlage für die Berechnung der wichtigsten hochgradig statisch unbestimmten Tragwerke.

Die Vorzahlen δ_{ik}, δ_{i0} bezeichnen einzelne Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems. Während die Hauptglieder δ_{kk} der Matrix stets positiv sind, können beide Nebenglieder $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{k(k+1)}$ einer Gleichung (k) positiv oder negativ sein oder auch das Vorzeichen wechseln. Die Tragwerke mit dreigliedrigen Elastizitätsgleichungen können hiernach in drei Gruppen mit besonderen, von der Vorzeichenfolge abhängigen Eigenschaften des Kräftebildes zusammengefaßt werden.

Die Lösung wird in jedem Falle nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus