Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Auflösung dreigliedriger Ansätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Kontrolle durch Einsetzen in die Bedingungsgleichungen (383):

k	1	2	3	4	5
$X_1 \cdot \delta_{1k}$	$-46{,}787781$	$+8{,}027315$	$-9{,}963045$	$+24{,}173687$	0
$+X_2 \cdot \delta_{2k}$	$-5{,}259331$	$+62{,}204361$	$+6{,}527581$	$-27{,}859428$	0
$+X_3 \cdot \delta_{3k}$	$-9{,}530602$	$-9{,}530602$	$-44{,}756972$	$+7{,}678892$	$-32{,}646262$
$+X_4 \cdot \delta_{4k}$	$-16{,}587553$	$-29{,}177726$	$-5{,}508201$	$+65{,}147851$	$+36{,}007895$
$+X_5 \delta_{5k}$	0	0	$-24{,}464629$	$-37{,}617655$	$-113{,}050260$
δ_{k0}	$-78{,}165267$	$+31{,}523348$	$-78{,}165266$	$+31{,}523347$	$-109{,}688627$

7. Stütz- und Schnittkräfte des Stabwerks für die Belastung 2. Berechnung der Biegungsmomente in den Querschnitten 5, 6 und 9 durch Superposition des statisch bestimmten und statisch unbestimmten Anteils nach (288) (Abb. 218).

$$
\begin{array}{llllllll}
M & = M_0 - & X_1 M_1 & - \quad X_2 M_2 & - X_3 M_3 - & X_4 M_4 & - X_5 M_5 & \\
M_{(5)} & = 0 & 0 & -6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & = -6{,}0107 \text{ mt} \\
M_{(9)} & = 13{,}5 & -9{,}1741 \cdot 0{,}75 & -6{,}0107 \cdot 0{,}917 & 0 & 0 & 0 & = +1{,}1076 \text{ mt}
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
M_{(6)(9)} & = 0 & -9{,}1741 \cdot 1{,}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = -9{,}1741 \text{ mt} \\
M_{(6)(2)} & = 0 & 0 & +6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & -6{,}2951 \cdot 1{,}0 & 0 & = -0{,}2844 \text{ mt} \\
M_{(6)(10)} & = 0 & -9{,}1741 \cdot 1{,}0 & +6{,}0107 \cdot 1{,}0 & 0 & -6{,}2951 \cdot 1{,}0 & 0 & = -9{,}4585 \text{ mt}
\end{array}
\right.
$$

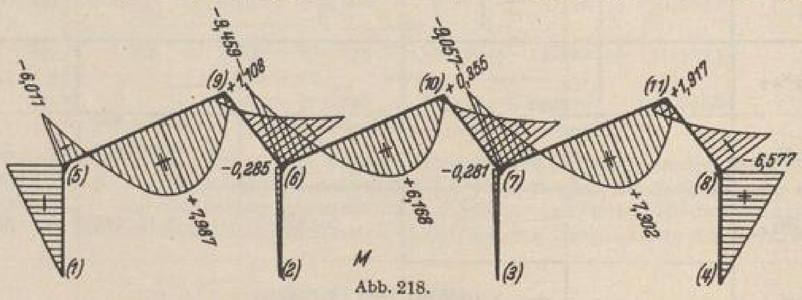

Abb. 218.

Auflösung dreigliedriger Ansätze. Ansätze in der allgemeinen Form (319) sind selten. Die Bedingungen für die Verträglichkeit der Formänderungen der Hauptsysteme hochgradig statisch unbestimmter Tragwerke liefern meist regelmäßige Ansätze von Gleichungen mit drei, fünf oder sieben Unbekannten, deren Anzahl am Anfang und Ende des Ansatzes abnimmt. Am einfachsten ist der dreigliedrige Ansatz. Er bildet mit der Matrix auf S. 231 die Grundlage für die Berechnung der wichtigsten hochgradig statisch unbestimmten Tragwerke.

Die Vorzahlen δ_{ik}, δ_{i0} bezeichnen einzelne Verschiebungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Hauptsystems. Während die Hauptglieder δ_{kk} der Matrix stets positiv sind, können beide Nebenglieder $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{k(k+1)}$ einer Gleichung (k) positiv oder negativ sein oder auch das Vorzeichen wechseln. Die Tragwerke mit dreigliedrigen Elastizitätsgleichungen können hiernach in drei Gruppen mit besonderen, von der Vorzeichenfolge abhängigen Eigenschaften des Kräftebildes zusammengefaßt werden.

Die Lösung wird in jedem Falle nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus

Matrix dreigliedriger Gleichungen.

X_1	X_2	X_3		X_{k-2}	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}		X_{n-2}	X_{n-1}	X_n	
δ_{11}	δ_{12}											δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}										δ_{20}
				$\delta_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}$	$\delta_{(k-1)k}$						$\delta_{(k-1)0}$
					$\delta_{k(k-1)}$	δ_{kk}	$\delta_{k(k+1)}$					δ_{k0}
									$\delta_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}$
										$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	δ_{n0}

(387)

Reduzierte Matrix bei Vorwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2	X_3		X_{k-1}	X_k	X_{k+1}		X_{n-1}	X_n		
δ_{11}	δ_{12}									$\varkappa_{12}$	δ_{10}
	$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}								$\varkappa_{23}$	$\delta_{20}^{(1)}$
				$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}$	$\delta_{(k-1)k}$					$\varkappa_{(k-1)k}$	$\delta_{(k-1)0}^{(k-2)}$
					$\delta_{kk}^{(k-1)}$	$\delta_{k(k+1)}$				$\varkappa_{k(k+1)}$	$\delta_{k0}^{(k-1)}$
								$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}$	$\delta_{(n-1)n}$	$\varkappa_{(n-1)n}$	$\delta_{(n-1)0}^{(n-2)}$
									$\delta_{nn}^{(n-1)}$		$\delta_{n0}^{(n-1)}$

(388)

(381) entweder für eine ausgezeichnete Belastung angegeben oder nach (385) zur konjugierten Matrix entwickelt.

a) Rechenvorschrift bei Vorwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 231).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = 2 \ldots n$ aus

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{kk}^{(k-1)} = \delta_{kk} - \frac{\delta^2_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}, \ldots \quad \text{und} \quad \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{nn} - \frac{\delta^2_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}}, \\ &\text{die Belastungsglieder aus} \\ &\qquad \delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \delta^{(k-2)}_{(k-1)0} \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{389}$$

Damit wird

$$X_n = \frac{\delta_{n0}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}}. \tag{390}$$

Die überzähligen Größen $X_{n-1} \ldots X_k \ldots X_1$ werden aus den Gleichungen der reduzierten Matrix durch Rekursion gefunden.

Die konjugierte Matrix.

Die Vorzahl $X_n = \beta_{nn}$ der konjugierten Matrix entsteht bei $\delta_{10} = 0, \ldots \delta_{(n-1)0} = 0$, $\delta_{n0} = 1$. Sie ist nach (390)

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn}^{(n-1)}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \varkappa_{(n-1)n}}. \tag{391}$$

Die Eliminationskoeffizienten $\varkappa_{12} \ldots \varkappa_{(k-1)k} \ldots \varkappa_{(n-1)n}$ sind allein durch die elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und nach der reduzierten Matrix Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen absteigender Richtung X_k, X_{k-1} des homogenen Ansatzes mit $\delta_{n0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{X_1}{X_2} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \varkappa_{12}; \quad -\frac{X_2}{X_3} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{22}^{(1)}} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{22} - \delta_{21}\varkappa_{12}} = \varkappa_{23} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)}\varkappa_{(k-2)(k-1)}} = \varkappa_{(k-1)k} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\frac{X_{n-1}}{X_n} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)}\varkappa_{(n-2)(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)n}. \end{aligned}\right| \tag{392}$$

Die Vorzahl β_{nn} des dreigliedrigen Gleichungssatzes wird demnach durch die allmähliche Entwicklung der Kennbeziehungen in der Form eines Kettenbruches unmittelbar aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen angeschrieben. Hierbei entstehen gleichzeitig auch die Formänderungen $\delta_{kk}^{(k-1)}$ und die Kennbeziehungen $\varkappa_{12} \ldots \varkappa_{(k-1)k} \ldots \varkappa_{(n-1)n}$.

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)}\varkappa_{(n-1)n}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \dfrac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)}\varkappa_{(n-2)(n-1)}}} \tag{393}$$

$$\beta_{nn} = \cfrac{1}{\underbrace{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-1)n}}{\underbrace{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-2)(n-1)}}{\underbrace{\delta_{(n-2)(n-2)} - \cdots \delta_{32} \overbrace{\cfrac{\delta_{23}}{\underbrace{\delta_{22} - \delta_{21} \overbrace{\cfrac{\delta_{12}}{\underbrace{\delta_{11}}_{\delta_{11}^{(0)}}}}^{\varkappa_{12}}}_{\delta_{22}^{(1)}}}}^{\varkappa_{23}}}_{\delta^{(n-3)}_{(n-2)(n-2)}}}}^{\varkappa_{(n-2)(n-1)}}}_{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}}}}^{\varkappa_{(n-1)n}}}_{\delta_{nn}^{(n-1)}}} \tag{394}$$

Die Vorzahlen $\beta_{(n-1)n} \cdots \beta_{(k-1)n} \cdots \beta_{1n}$ werden daraus durch wiederholte Multiplikation mit den negativen Kennziffern berechnet.

Die Spalte $\beta_{k(n-1)}$ der konjugierten Matrix besteht aus den Unbekannten X_k für die Belastungszahlen $\delta_{k0} = 0$ $(k = 1, \ldots, (n-2), n)$; $\delta_{(n-1)0} = 1$. Daher ist auch das Belastungsglied der reduzierten Matrix $\delta_{(n-1)0}^{(n-2)} = \delta_{(n-1)0} = 1$, so daß die Gleichung mit der Ordnungsnummer $(n-1)$ folgende Form annimmt:

$$\beta_{(n-1)(n-1)}\,\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + \beta_{n(n-1)}\,\delta_{(n-1)n} = 1\,. \tag{395}$$

Nach Seite 166 ist $\beta_{n(n-1)} = \beta_{(n-1)n}$ und damit bereits bekannt.

$$\beta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1 - \beta_{(n-1)n}\,\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} = \frac{1}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} - \beta_{(n-1)n}\,\varkappa_{(n-1)n}\,. \tag{396}$$

Hieraus werden wiederum die Vorzahlen $\beta_{k(n-1)}$ $(k = (n-2)\cdots 1)$ durch Multiplikation mit den negativen Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$ gefunden. Ebenso wird mit $\delta_{(n-2)0} = 1$

$$\beta_{(n-2)(n-2)} = \frac{1 - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\delta_{(n-2)(n-1)}}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} = \frac{1}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\varkappa_{(n-2)(n-1)}\,. \tag{397}$$

Damit sind dann die Vorzahlen $\beta_{k(n-2)}$ $(k = (n-3)\ldots 1)$ durch Rekursion bestimmt. Schließlich wird

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12}\,\varkappa_{12}\,. \tag{398}$$

Die Entwicklung der konjugierten Matrix durch Rekursion verlangt Zwischenwerte mit einer größeren Anzahl von Stellen, um Fehler in der Zahlenrechnung auszuschließen. Das einwandfreie Ergebnis der Lösung kann durch die Berechnung der Vorzahl β_{11} mit Rückwärtselimination geprüft werden, wenn die Matrix nicht zur Nebendiagonale symmetrisch ist. Dies wird bei Symmetrie des Hauptsystems durch die Verwendung von Gruppen symmetrisch liegender Schnittkräfte nach (359) als überzählige Größen vermieden.

b) Rechenvorschrift bei Rückwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 234).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = (n-1)\ldots 1$ aus

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{kk}^{(n-k)} = \delta_{kk} - \frac{\delta_{k(k+1)}^2}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}\,, \ldots \quad \text{und} \quad \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}^{(n-2)}}\,, \\ &\text{die Belastungsglieder aus} \\ &\delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}\,\frac{\delta_{(k+1)k}}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{400}$$

Damit wird

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}\,. \tag{401}$$

Alle anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus der reduzierten Matrix bestimmt.

Die konjugierte Matrix.

Die Belastungszahlen werden der Reihe nach $\delta_{10}^{(n-1)} = \delta_{10} = 1$, $\delta_{20}^{(n-2)} = \delta_{20} = 1$ usw., während alle übrigen Null sind. Die Eliminationskoeffizienten

$$\varkappa_{21}\ldots\varkappa_{32}\ldots\varkappa_{k(k-1)}\ldots\varkappa_{n(n-1)}$$

sind nach der reduzierten Matrix wiederum Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen aufsteigender Richtung X_{k-1}, X_k des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{X_n}{X_{n-1}} = \frac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}} = \varkappa_{n(n-1)}; \quad -\frac{X_{n-1}}{X_{n-2}} = \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}} = \frac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n}\cdot\varkappa_{n(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)(n-2)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &-\frac{X_k}{X_{k-1}} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk}^{(n-k)}} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\,\varkappa_{(k+1)k}} = \varkappa_{k(k-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &-\frac{X_2}{X_1} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\,\varkappa_{32}} = \varkappa_{21}\,. \end{aligned}\right\} \tag{402}$$

Reduzierte Matrix bei Rückwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2		X_{k-2}	X_{k-1}	X_k		X_{n-2}	X_{n-1}	X_n		
$\delta_{11}^{(n-1)}$											$\delta_{10}^{(n-1)}$
δ_{21}	$\delta_{22}^{(n-2)}$									$\varkappa_{21}$	$\delta_{20}^{(n-2)}$
			$\delta_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(n-k+1)}$						$\varkappa_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)0}^{(n-k+1)}$
				$\delta_{k(k-1)}$	$\delta_{kk}^{(n-k)}$					$\varkappa_{k(k-1)}$	$\delta_{k0}^{(n-k)}$
							$\delta_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}$		$\varkappa_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)0}^{(1)}$
								$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	$\varkappa_{n(n-1)}$	δ_{n0}

(399)

Rechenvorschrift zur Bildung der konjugierten Matrix (S. 235).

	$-\varkappa_{21}$	$-\varkappa_{32}$		$-\varkappa_{k(k-1)}$	$-\varkappa_{(k+1)k}$			$-\varkappa_{n(n-1)}$		
β_{11}	β_{12}	β_{13}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}	
	β_{22}	β_{23}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}	$-\varkappa_{12}$
		β_{33}		$\beta_{3(k-1)}$	β_{3k}	$\beta_{3(k+1)}$		$\beta_{3(n-1)}$	β_{3n}	$-\varkappa_{23}$
				$\beta_{(k-1)(k-1)}$	$\beta_{(k-1)k}$	$\beta_{(k-1)(k+1)}$		$\beta_{(k-1)(n-1)}$	$\beta_{(k-1)n}$	
					β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}	$-\varkappa_{(k-1)k}$
						$\beta_{(k+1)(k+1)}$		$\beta_{(k+1)(k-1)}$	$\beta_{(k+1)n}$	$-\varkappa_{k(k+1)}$
								$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$	
									β_{nn}	$-\varkappa_{(n-1)n}$

(408)

Daher kann auch β_{11} aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen als Kettenbruch angeschrieben werden. Er enthält die Formänderungen $\delta_{kk}^{(n-k)}$ und die Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\varkappa_{21}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\varkappa_{32}}}\,. \tag{403}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\cfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\cfrac{\delta_{32}}{\delta_{33} - \cdots \cdots - \delta_{(n-2)(n-1)}\cfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n}\cfrac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}}}}}} \tag{404}$$

$$\varkappa_{21}\,,\quad \varkappa_{32}\,,\quad \ldots\,,\quad \varkappa_{(n-1)(n-2)}\,,\quad \varkappa_{n(n-1)}$$

$$\delta_{11}^{(n-1)}\,,\quad \delta_{22}^{(n-2)}\,,\quad \delta_{33}^{(n-3)}\,,\quad \ldots\,,\quad \delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}\,,\quad \delta_{nn}^{(0)}$$

Die Vorzahlen $\beta_{21} \ldots \beta_{k1} \ldots \beta_{n1}$ werden durch Rekursion mit den Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt. Die Vorzahl β_{22} entsteht aus $\delta_{20} = 1$ mit $\beta_{12} = \beta_{21}$ und der Gl. (402)

$$\beta_{12}\delta_{21} + \beta_{22}\delta_{22}^{(n-2)} = 1\,; \qquad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(n-2)}} - \beta_{21}\varkappa_{21}\,. \tag{405}$$

Die Vorzahlen $\beta_{32} \ldots \beta_{k2} \ldots \beta_{n2}$ sind dann wieder durch Rekursion bestimmt. Zuletzt wird β_{nn} erhalten.

c) Gleichzeitige Verwendung der Kennbeziehungen aus Vorwärts- und Rückwärtselimination. Die Zwischenwerte der Rückwärtselimination zur Bildung der Vorzahl β_{11}, mit der zunächst nur die aus der Vorwärtselimination (394) gewonnene konjugierte Matrix nachgeprüft wird, dienen zu einer einfachen Berechnung der Hauptglieder der konjugierten Matrix. Sind β_{nn}, $\beta_{(n-1)n}$ usw. durch Vorwärtselimination bekannt, so wird aus Gleichung n der reduzierten Matrix der Rückwärtselimation und mit $\delta_{(n-1)0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \beta_{(n-1)(n-1)}\delta_{n(n-1)} + \beta_{n(n-1)}\delta_{nn} &= 0\,. \\ \beta_{(n-1)(n-1)} = -\frac{\delta_{nn}}{\delta_{n(n-1)}}\beta_{n(n-1)} &= -\frac{1}{\varkappa_{n(n-1)}}\beta_{(n-1)n}\,. \end{aligned}\right\} \tag{406}$$

In ähnlicher Weise wird β_{kk} für $\delta_{k0} = 1$ aus der Gleichung $(k+1)$ der reduzierten Matrix gefunden.

$$\left.\begin{aligned} \beta_{kk}\delta_{(k+1)k} + \beta_{(k+1)k}\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)} &= 0\,. \\ \beta_{kk} = -\beta_{(k+1)k}\frac{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}{\delta_{(k+1)k}} &= -\frac{1}{\varkappa_{(k+1)k}}\beta_{k(k+1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{407}$$

Diese Beziehungen können an Stelle von (397) oder zu deren Nachprüfung als Zwischenkontrollen verwendet werden.

Die konjugierte Matrix eines dreigliedrigen Ansatzes wird hiernach am einfachsten mit der Entwicklung von β_{nn} und β_{11} in Gestalt zweier Kettenbrüche begonnen. Damit sind die Kennzahlen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt, mit denen die übrigen Vorzahlen nach (392 u. 402) durch einfache Rekursion gefunden werden. Die Ansätze (397) dienen als Zwischenprüfung.

Die Rechenvorschrift wird in einer Tabelle S. 234 zusammengefaßt. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die Vorzahlen der konjugierten Matrix durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer dazwischenstehenden negativen Kennzahl $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ entstehen. Daher kann das Hauptglied β_{kk}, verglichen mit der Rekursion nach S. 233, durch Multiplikation von $\beta_{k(k+1)}$ mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$ berechnet werden.

Eine mittlere Vorzahl β_{kk} der Hauptdiagonale kann auch aus der Gleichung (k) des Ansatzes (399) mit $\delta_{k0} = 1$ in Verbindung mit den beiden Kennbeziehungen

$$-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \varkappa_{(k-1)k} \quad \text{und} \quad -\frac{X_{k+1}}{X_k} = \varkappa_{(k+1)k} \tag{409}$$

unmittelbar berechnet werden:

$$\beta_{kk} = \frac{1}{-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{k(k+1)}}. \tag{410}$$

Anwendung auf die Lösung eines Ansatzes mit sechs Gleichungen.

1. Elastizitätsgleichungen:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	δ_{11}	δ_{12}					δ_{10}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}				δ_{20}
3		δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}			δ_{30}
4			δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}		δ_{40}
5				δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{50}
6					δ_{65}	δ_{66}	δ_{60}

2. Vorwärtselimination nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus (381):

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6			
1	δ_{11}	δ_{12}					$\varkappa_{12}$	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22} $-\varkappa_{12}\delta_{12}$	δ_{23}					$\delta_{2\Sigma}$ $-\varkappa_{12}\delta_{1\Sigma}$	δ_{20} $-\varkappa_{12}\delta_{10}$
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				$\varkappa_{23}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
		(δ_{32})	δ_{33} $-\varkappa_{23}\delta_{23}$	δ_{34}				$\delta_{3\Sigma}$ $-\varkappa_{23}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	δ_{30} $-\varkappa_{23}\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			$\varkappa_{34}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
			(δ_{43})	δ_{44} $-\varkappa_{34}\delta_{34}$	δ_{45}			$\delta_{4\Sigma}$ $-\varkappa_{34}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	δ_{40} $-\varkappa_{34}\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		$\varkappa_{45}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
				(δ_{54})	δ_{55} $-\varkappa_{45}\delta_{45}$	δ_{56}		$\delta_{5\Sigma}$ $-\varkappa_{45}\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	δ_{50} $-\varkappa_{45}\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	$\varkappa_{56}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
					(δ_{65})	δ_{66} $-\varkappa_{56}\delta_{56}$		$\delta_{6\Sigma}$ $-\varkappa_{56}\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	δ_{60} $-\varkappa_{56}\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$

$$X_6 = \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}; \qquad \delta_{60} = \delta_{60}^{(5)} = 1: \qquad X_6 = \beta_{66}.$$

Die anderen überzähligen Größen X_k oder β_{kk} entstehen durch Rekursion.

3. Vorwärts- und Rückwärtselimination als Kettenbruch. a) Kettenbruch zur Vorwärtselimination.

$$\beta_{66}=\frac{1}{\delta_{66}^{(5)}}=\cfrac{1}{\underbrace{\delta_{66}-\delta_{56}\overbrace{\cfrac{\delta_{65}}{\underbrace{\delta_{55}-\delta_{45}\overbrace{\cfrac{\delta_{54}}{\underbrace{\delta_{44}-\delta_{34}\overbrace{\cfrac{\delta_{43}}{\underbrace{\delta_{33}-\delta_{23}\overbrace{\cfrac{\delta_{32}}{\underbrace{\delta_{22}-\delta_{12}\overbrace{\cfrac{\delta_{21}}{\underbrace{\delta_{11}}_{\delta_{11}^{(0)}}}}^{\varkappa_{12}}}_{\delta_{22}^{(1)}}}}^{\varkappa_{23}}}_{\delta_{33}^{(2)}}}}^{\varkappa_{34}}}_{\delta_{44}^{(3)}}}}^{\varkappa_{45}}}_{\delta_{55}^{(4)}}}}^{\varkappa_{56}}}_{\delta_{66}^{(5)}}}$$

Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\varkappa_{12}=\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}};\quad \varkappa_{23}=\frac{\delta_{32}}{\delta_{22}^{(1)}};\quad \varkappa_{34}=\frac{\delta_{43}}{\delta_{33}^{(2)}};\quad \varkappa_{45}=\frac{\delta_{54}}{\delta_{44}^{(3)}};\quad \varkappa_{56}=\frac{\delta_{65}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{22}^{(1)}\ldots\delta_{66}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur Vorwärtselimination. Die Belastungszahlen werden für jeden Belastungsfall nach (389) berechnet.

$$\delta_{k0}^{(k-1)}=\delta_{k0}-\delta_{(k-1)0}^{(k-2)}\varkappa_{(k-1)k}.$$

Reduzierte Matrix zur Vorwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
1	δ_{11}	δ_{12}					$\varkappa_{12}$	δ_{10}
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				$\varkappa_{23}$	$\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			$\varkappa_{34}$	$\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		$\varkappa_{45}$	$\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	$\varkappa_{56}$	$\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{60}^{(5)}$

(411)

Darnach wird für jeden Belastungsfall zuerst X_6 bestimmt. Die anderen überzähligen Größen $X_5\ldots X_1$ ergeben sich durch Rekursion.

b) Kettenbruch zur Rückwärtselimination.

$$\beta_{11}=\frac{1}{\delta_{11}^{(5)}}=\cfrac{1}{\underbrace{\delta_{11}-\delta_{21}\overbrace{\cfrac{\delta_{12}}{\underbrace{\delta_{22}-\delta_{32}\overbrace{\cfrac{\delta_{23}}{\underbrace{\delta_{33}-\delta_{43}\overbrace{\cfrac{\delta_{34}}{\underbrace{\delta_{44}-\delta_{54}\overbrace{\cfrac{\delta_{45}}{\underbrace{\delta_{55}-\delta_{65}\overbrace{\cfrac{\delta_{56}}{\underbrace{\delta_{66}}_{\delta_{66}^{(0)}}}}^{\varkappa_{65}}}_{\delta_{55}^{(1)}}}}^{\varkappa_{54}}}_{\delta_{44}^{(2)}}}}^{\varkappa_{43}}}_{\delta_{33}^{(3)}}}}^{\varkappa_{32}}}_{\delta_{22}^{(4)}}}}^{\varkappa_{21}}}_{\delta_{11}^{(5)}}}$$

Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\varkappa_{65} = \frac{\delta_{56}}{\delta_{66}}; \qquad \varkappa_{54} = \frac{\delta_{45}}{\delta_{55}^{(1)}}; \qquad \varkappa_{43} = \frac{\delta_{34}}{\delta_{44}^{(2)}}; \qquad \varkappa_{32} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{33}^{(3)}}; \qquad \varkappa_{21} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{55}^{(1)} \ldots \delta_{11}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur abgekürzten Rückwärtselimination. Die Belastungszahlen sind nach (400)

$$\delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \varkappa_{(k+1)k}\, \delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}.$$

Reduzierte Matrix zur Rückwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
$1^{(5)}$	$\delta_{11}^{(5)}$							$\delta_{10}^{(5)}$
$2^{(4)}$	δ_{21}	$\delta_{22}^{(4)}$					$\varkappa_{21}$	$\delta_{20}^{(4)}$
$3^{(3)}$		δ_{32}	$\delta_{33}^{(3)}$				$\varkappa_{32}$	$\delta_{30}^{(3)}$
$4^{(2)}$			δ_{43}	$\delta_{44}^{(2)}$			$\varkappa_{43}$	$\delta_{40}^{(2)}$
$5^{(1)}$				δ_{54}	$\delta_{55}^{(1)}$		$\varkappa_{54}$	$\delta_{50}^{(1)}$
6					δ_{65}	δ_{66}	$\varkappa_{65}$	δ_{60}

Der Ansatz liefert für jede Belastung zuerst X_1. Damit sind die anderen statisch überzähligen Größen $X_2 \ldots X_6$ durch Rekursion bestimmt.

4. Konjugierte Matrix. Die konjugierte Matrix kann aus einem der beiden Kettenbrüche entwickelt werden. Bei Vorwärtselimination entsteht β_{66} und $\varkappa_{56} \ldots \varkappa_{12}$. Die Gleichung $5^{(4)}$ der reduzierten Matrix (411) liefert mit $\beta_{65} = \beta_{56}$

$$\beta_{55}\,\delta_{55}^{(4)} + \beta_{65}\,\delta_{56} = 1; \qquad \beta_{55} = \frac{1 - \beta_{56}\,\delta_{56}}{\delta_{55}^{(4)}} = \frac{1}{\delta_{55}^{(4)}} - \beta_{56}\,\varkappa_{56}.$$

Die Vorzahlen $\beta_{45} \ldots \beta_{15}$ ergeben sich wieder durch Multiplikation mit $-\varkappa_{45}$ usw., die übrigen Vorzahlen in ähnlicher Weise.

$$\beta_{44} = \frac{1 - \beta_{45}\,\delta_{45}}{\delta_{44}^{(3)}} = \frac{1}{\delta_{44}^{(3)}} - \beta_{45}\,\varkappa_{45}, \quad \beta_{34}, \quad \beta_{24}, \quad \beta_{14},$$

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12}\,\varkappa_{12}.$$

Konjugierte Matrix aus

Vorwärtselimination und Rekursion.

$\longrightarrow - \varkappa_{21} - \varkappa_{32} - \varkappa_{43} - \varkappa_{54} - \varkappa_{65} \longrightarrow$

X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}
X_5					β_{55}	β_{56}
X_6						β_{66}
	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}

$\uparrow\; -\varkappa_{12} \;-\varkappa_{23} \;-\varkappa_{34} \;-\varkappa_{45} \;-\varkappa_{56}$

$\downarrow\; -\varkappa_{21} \;-\varkappa_{32} \;-\varkappa_{43} \;-\varkappa_{54} \;-\varkappa_{65}$

Rückwärtselimination und Rekursion.

δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	
β_{11}						X_1
β_{21}	β_{22}					X_2
β_{31}	β_{32}	β_{33}				X_3
β_{41}	β_{42}	β_{43}	β_{44}			X_4
β_{51}	β_{52}	β_{53}	β_{54}	β_{55}		X_5
β_{61}	β_{62}	β_{63}	β_{64}	β_{65}	β_{66}	X_6

$\longleftarrow - \varkappa_{12} - \varkappa_{23} - \varkappa_{34} - \varkappa_{45} - \varkappa_{56} \longleftarrow$

Die Berechnung der konjugierten Matrix ist bei Verwendung der Zwischenwerte

$\varkappa_{(k-1)k}$ und $\varkappa_{k(k-1)}$ beider Kettenbrüche kürzer. Die Rekursion mit β_{66} der Vorwärtselimination verwendet die Beziehungen

$$\beta_{55} = -\frac{1}{\varkappa_{65}}\beta_{56}, \ldots, \quad \beta_{11} = -\frac{1}{\varkappa_{21}}\beta_{12},$$

die Rekursion mit β_{11} der Rückwärtselimination die Beziehungen

$$\beta_{22} = -\frac{1}{\varkappa_{12}}\beta_{21}, \ldots, \quad \beta_{66} = -\frac{1}{\varkappa_{56}}\beta_{65}.$$

Die Pfeilrichtungen sind wiederum die Anweisung (S. 235) für die Berechnung der Vorzahlen β_{ik} mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$.

Zur Berechnung der überzähligen Größen X_k für einen beliebigen Belastungsfall $\delta_{1\otimes} \ldots \delta_{6\otimes}$ durch Superposition nach (369) genügt ebenso wie für die Einflußlinie X_k einer der beiden Ansätze, da nach S. 166 $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=6} \beta_{ki}\,\delta_{i\otimes}, \qquad (k = 1\ldots 6). \tag{412}$$

d) Ausgezeichnete Belastung mit ein oder zwei Belastungszahlen. Der Sonderfall $\delta_{k0} \neq 0$, $\delta_{i0} = 0$ $(i = 1\ldots k-1,\ k+1\ldots n)$ gestattet folgende Umformung der Gleichung (k) der Matrix:

$$X_k(-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{k(k+1)}) = \delta_{k0},$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{(k+1)k}}, \tag{413}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{k-1} &= -\varkappa_{(k-1)k}X_k, \ldots X_1 = -\varkappa_{12}X_2, \\ X_{k+1} &= -\varkappa_{(k+1)k}X_k, \ldots X_n = -\varkappa_{n(n-1)}X_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{414}$$

Sind bei der Belastung des Hauptsystems nur zwei Belastungszahlen $\delta_{(k-1)0}$, δ_{k0} von Null verschieden, so können die zugeordneten Verträglichkeitsbedingungen des Ansatzes

$$\left.\begin{aligned} (k-1)&: \quad X_{k-2}\delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1}\delta_{(k-1)(k-1)} + X_k\delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0}, \\ (k)&: \quad + X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk} + X_{k+1}\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}, \end{aligned}\right\} \tag{415}$$

mit

$$X_{k-2} = -X_{k-1}\varkappa_{(k-2)(k-1)}; \qquad X_{k+1} = -X_k\varkappa_{(k+1)k}$$

in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angeschrieben werden.

$$X_{k-1}(\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)}\varkappa_{(k-2)(k-1)}) + X_k\delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0},$$

$$X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k(\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\varkappa_{(k+1)k}) = \delta_{k0}.$$

Hieraus wird nach Division mit $\delta_{(k-1)k}$ in Verbindung mit (392) und (402)

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_{k-1}}{\varkappa_{(k-1)k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = R_{(k-1)k}, \\ X_{k-1} + \frac{X_k}{\varkappa_{k(k-1)}} &= \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = R_{kk}. \end{aligned}\right\} \tag{416}$$

Die Glieder der rechten Seite sind Quotienten bekannter Verschiebungen des Hauptsystems. Sie besitzen durch das Gleichheitszeichen dieselbe mechanische Bedeutung wie die überzähligen Größen X_k.

$$X_{k-1} = \frac{R_{(k-1)k}\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - R_{kk}}{\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}}\,\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - 1}; \qquad X_k = \frac{R_{kk}\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}} - R_{(k-1)k}}{\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}}\,\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - 1}. \tag{417}$$

Die Schnittkräfte $X_{k-2} \ldots X_1$ werden mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k-2)(k-1)} \ldots \varkappa_{12}$, die Schnittkräfte $X_{k+1} \ldots X_n$ mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k+1)k} \ldots \varkappa_{n(n-1)}$ bestimmt.

Die Lösung des Ansatzes kann auch bei einer beliebigen Anzahl von Belastungsgliedern nach deren Aufteilung in Gruppen zu zweien verwendet werden. Das endgültige Ergebnis entsteht durch Superposition der Teilergebnisse.

Durchgehender Träger zur Abstützung eines Ausziehgleises:

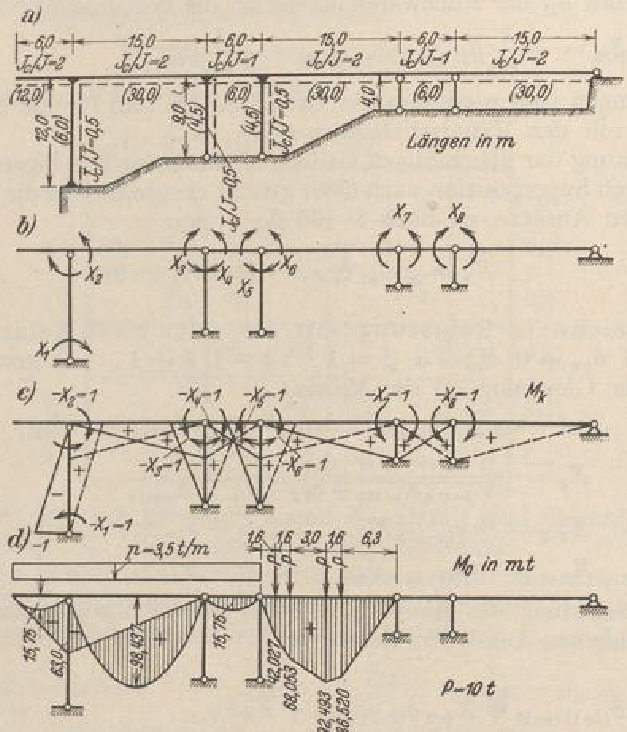

Abb. 219.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J, reduzierte Längen l'_h (Abb. 219a).
2. Belastung. Lastenzug nach Abb. 219d.
3. Hauptsystem. Die Reihe der Balkenträger nach Abb. 219b, Momente M_k aus $-X_k = 1$ (Abb. 219c); Momente M_0 aus der Belastung (Abb. 219d).
4. Matrix der Bedingungsgleichungen.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(δ_{k0})
(1)	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	− 1,0	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	+ 5,0	11,5	− 1,5	—	—	—	—	669,37
(4)	—	—	− 1,5	3,5	+ 1,0	—	—	—	31,50
(5)	—	—	—	+ 1,0	3,5	− 1,5	—	—	31,50
(6)	—	—	—	—	− 1,5	11,5	+ 5,0	—	905,06
(7)	—	—	—	—	—	+ 5,0	12,0	+ 1,0	800,72
(8)	—	—	—	—	—	—	+ 1,0	12,0	0,00

5a) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung von Kettenbrüchen.

α) Vorwärtselimination mit Kettenbruch:

$$\varkappa_{78} \quad \varkappa_{67} \quad \varkappa_{56} \quad \varkappa_{45} \quad \varkappa_{34} \quad \varkappa_{23} \quad \varkappa_{12}$$

$$\beta_{88} = \cfrac{1}{12{,}0 - 1{,}0 \Big| \cfrac{1{,}0}{12{,}0 - 5{,}0 \Big| \cfrac{5{,}0}{11{,}5 + 1{,}5 \Big| \cfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 1{,}0 \Big| \cfrac{1{,}0}{3{,}5 + 1{,}5 \Big| \cfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 5{,}0 \Big| \cfrac{5{,}0}{12{,}0 + 1{,}0 \Big| \cfrac{-1{,}0}{2{,}0}}}}}}}}$$

$$\delta_{88}^{(7)} \quad \delta_{77}^{(6)} \quad \delta_{66}^{(5)} \quad \delta_{55}^{(4)} \quad \delta_{44}^{(3)} \quad \delta_{33}^{(2)} \quad \delta_{22}^{(1)} \quad \delta_{11}^{(0)}$$

$$\varkappa_{12} = -\frac{1}{2} = -0{,}5\,, \qquad \delta_{11}^{(0)} = 2{,}0\,,$$

$$\varkappa_{23} = \frac{5{,}0}{12{,}0 - 0{,}5} = 0{,}434\,783\,, \qquad \delta_{22}^{(1)} = 11{,}5\,,$$

$$\varkappa_{34} = \frac{-1{,}5}{11{,}5 - 2{,}173\,915} = -0{,}160\,839\,, \qquad \delta_{33}^{(2)} = 9{,}326\,085\,,$$

$$\varkappa_{45} = \frac{1{,}0}{3{,}5 - 0{,}241\,259} = 0{,}306\,867\,, \qquad \delta_{44}^{(3)} = 3{,}258\,741\,,$$

$$\varkappa_{56} = \frac{-1{,}5}{3{,}5 - 0{,}306\,867} = -0{,}469\,758\,, \qquad \delta_{55}^{(4)} = 3{,}193\,133\,,$$

$$\varkappa_{67} = \frac{5{,}0}{11{,}5 - 0{,}704\,637} = 0{,}463\,162\,, \qquad \delta_{66}^{(5)} = 10{,}795\,363\,,$$

$$\varkappa_{78} = \frac{1{,}0}{12{,}0 - 2{,}315\,810} = 0{,}103\,261\,, \qquad \delta_{77}^{(6)} = 9{,}684\,190\,,$$

$$\beta_{88} = \frac{1{,}0}{12{,}0 - 0{,}103\,261} = 0{,}084\,057\,, \qquad \delta_{88}^{(7)} = 11{,}896\,739\,.$$

β) Rückwärtselimination mit Kettenbruch:

$$\varkappa_{21} \quad \varkappa_{32} \quad \varkappa_{43} \quad \varkappa_{54} \quad \varkappa_{65} \quad \varkappa_{76} \quad \varkappa_{87}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{2{,}0 + 1{,}0 \Big| \cfrac{-1{,}0}{12{,}0 - 5{,}0 \Big| \cfrac{5{,}0}{11{,}5 + 1{,}5 \Big| \cfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 1{,}0 \Big| \cfrac{+1{,}0}{3{,}5 + 1{,}5 \Big| \cfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 5{,}0 \Big| \cfrac{+5{,}0}{12{,}0 - 1{,}0 \Big| \cfrac{+1{,}0}{12{,}0}}}}}}}}$$

$$\delta_{11}^{(7)} \quad \delta_{22}^{(6)} \quad \delta_{33}^{(5)} \quad \delta_{44}^{(4)} \quad \delta_{55}^{(3)} \quad \delta_{66}^{(2)} \quad \delta_{77}^{(1)} \quad \delta_{88}^{(0)}$$

$$\varkappa_{87} = \frac{1,0}{12,0} = 0,083333\,, \qquad \delta_{88}^{(0)} = 12,00\,,$$

$$\varkappa_{76} = \frac{5,0}{12,0 - 0,083333} = 0,419580\,, \qquad \delta_{77}^{(1)} = 11,916667\,,$$

$$\varkappa_{65} = \frac{-1,5}{11,5 - 2,097900} = -0,159539\,, \qquad \delta_{66}^{(2)} = 9,402100\,,$$

$$\varkappa_{54} = \frac{1,0}{3,5 - 0,239309} = 0,306683\,, \qquad \delta_{55}^{(3)} = 3,260691\,,$$

$$\varkappa_{43} = \frac{-1,5}{3,5 - 0,306683} = -0,469731\,, \qquad \delta_{44}^{(4)} = 3,193317\,,$$

$$\varkappa_{32} = \frac{5,0}{11,5 - 0,704597} = 0,463160\,, \qquad \delta_{33}^{(5)} = 10,795403\,,$$

$$\varkappa_{21} = \frac{-1,0}{12,0 - 2,315800} = -0,103261\,, \qquad \delta_{22}^{(6)} = 9,684200\,,$$

$$\beta_{11} = \frac{1,0}{2,0 - 0,103261} = 0,527221\,, \qquad \delta_{11}^{(7)} = 1,896739\,.$$

γ) Berechnung der Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix (S. 243). Entwicklung von $\beta_{k(k+1)}$ aus $\beta_{(k+1)(k+1)}$ durch Rekursion mit den Kennbeziehungen $-\varkappa_{k(k+1)}$; Entwicklung von β_{kk} aus $\beta_{(k+1)k}$ durch Rekursion mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$. Nachprüfung von β_{kk} wegen der Fehlerempfindlichkeit mit dem Ansatz (396)

$$\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)} \qquad \text{(S. 243)}.$$

δ)
$$X_k = \sum_{i=1}^{i=8} \beta_{ki}\,\delta_{i0}\,.$$

$X_1 = +\ 2,48520$; $X_2 = +\ 4,97039$; $X_3 = +\ 59,44205$; $X_4 = +\ 26,04114$;
$X_5 = +\ 29,51865$ $X_6 = +\ 65,23799$; $X_7 = +\ 39,82042$; $X_8 = -\ 3,31856$.

ε) Die Anzahl der Multiplikationen ist durch die Einbeziehung der Belastung in die Elimination kleiner. In diesem Falle wird X_8 nach (390) mit der reduzierten Matrix der Vorwärtselimination bestimmt, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, α) enthalten sind. Die überzähligen Größen X_7 bis X_1 ergeben sich dann durch Rekursion desselben Ansatzes. Das Ergebnis für X_1 kann mit der reduzierten Matrix der Rückwärtselimination nachgeprüft werden, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, β) enthalten sind. Die Belastungsglieder werden in die reduzierte Matrix nach (389) oder (400) eingetragen.

Reduzierte Matrix aus der Vorwärtselimination:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
(1)	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	—	11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	—	9,326085	− 1,5	—	—	—	—	515,30
(4)	—	—	—	3,258741	+ 1,0	—	—	—	114,38
(5)	—	—	—	—	3,193133	− 1,5	—	—	−3,60
(6)	—	—	—	—	—	10,795363	+ 5,0	—	903,37
(7)	—	—	—	—	—	—	9,684190	+ 1,0	382,31
(8)	—	—	—	—	—	—	—	11,896739	−39,48

Die Rekursion beginnt mit $X_8 = \dfrac{-39,48}{11,896739} = -\ 3,31856$ und wird nach der Rechenvorschrift unter 5b, β entwickelt.

Zahlenrechnung: $\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)}$.

$k=$	1	2	3	4	5	6	7	8
$1/\delta_{kk}^{(k-1)}$	0,500000	0,086957	0,107226	0,306864	0,313172	0,092632	0,103261	0,084057
$-\beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)}$	0,027221	0,021926	0,008763	0,031880	0,025372	0,022344	0,000896	—
β_{kk}	0,527221	0,108883	0,115989	0,338744	0,338544	0,114976	0,104157	0,084057

Konjugierte Matrix.

− 0,103261 — + 0,463160 — − 0,469731 — + 0,306683 — − 0,159539 — + 0,419580 — + 0,083333

(1)	0,527221	+ 0,054442	− 0,025215	− 0,011844	+ 0,003633	+ 0,000580	− 0,000243	+ 0,000020	− 0,500000
(2)		0,108883	− 0,050430	− 0,023688	+ 0,007265	+ 0,001159	− 0,000486	+ 0,000040	+ 0,434783
(3)			0,115989	+ 0,054483	− 0,016709	− 0,002666	+ 0,001118	− 0,000093	− 0,160839
(4)				0,338744	− 0,103888	− 0,016574	+ 0,006954	− 0,000579	+ 0,306867
(5)					0,338544	+ 0,054011	− 0,022662	+ 0,001888	− 0,469758
(6)						0,114976	− 0,048242	+ 0,004020	+ 0,463162
(7)							0,104157	− 0,008680	+ 0,103261
(8)								0,084057	
$(\delta_{k0}=)$	0,00	354,37	669,37	31,5	31,5	905,06	800,72	0,00	

Vorwärtselimination nach C. F. Gauß (5b, α):

i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	$\varkappa_{i(i+1)}$		
	k	1	2	3	4	5	6	7	8		Σ	o
1	δ_{1k}	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	− 0,50000	+ 1,0	+ 0,00
2	δ_{2k}	(− 1,0)	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	—	+ 16,0	354,37
	$-\varkappa_{12}\delta_{1k}$		− 0,5	—	—	—	—	—	—	—	− 0,5	0,00
	$\delta_{2k}^{(1)}$		11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	+ 0,434783	+ 16,5	354,37
3	δ_{3k}		(+ 5,0)	11,5	− 1,5	—	—	—	—	—	+ 15,0	669,37
	$-\varkappa_{23}\delta_{2k}^{(1)}$			− 2,173915	—	—	—	—	—	—	− 7,17392	− 154,07
	$\delta_{3k}^{(2)}$			9,326085	− 1,5	—	—	—	—	− 0,160839	7,82608	515,30
4	δ_{4k}			(− 1,5)	3,5	+ 1,0	—	—	—	—	3,0	31,50
	$-\varkappa_{34}\delta_{3k}^{(2)}$				− 0,241259	—	—	—	—	—	1,25874	82,88
	$\delta_{4k}^{(3)}$				3,258741	+ 1,0	—	—	—	+ 0,306867	4,25874	114,38
5	δ_{5k}				(+ 1,0)	3,5	− 1,5	—	—	—	3,0	31,50
	$-\varkappa_{45}\delta_{4k}^{(3)}$					− 0,306867	—	—	—	—	− 1,30687	− 35,10
	$\delta_{5k}^{(4)}$					3,193133	− 1,5	—	—	− 0,469758	1,69313	− 3,60
6	δ_{6k}					(− 1,5)	11,5	+ 5,0	—	—	+ 15,0	905,06
	$-\varkappa_{56}\delta_{5k}^{(4)}$						− 0,704637	—	—	—	0,79536	− 1,69
	$\delta_{6k}^{(5)}$						10,795363	+ 5,0	—	+ 0,463162	15,79536	903,37
7	δ_{7k}						(+ 5,0)	12,0	+ 1,0	—	18,0	800,72
	$-\varkappa_{67}\delta_{6k}^{(5)}$							− 2,315810	—	—	− 7,31581	− 418,41
	$\delta_{7k}^{(6)}$							9,684190	+ 1,0	+ 0,103261	10,68419	382,31
8	δ_{8k}							(+ 1,0)	12,0	—	13,0	0,00
	$-\varkappa_{78}\delta_{7k}^{(6)}$								− 0,103261	—	− 1,10326	− 39,48
	$\delta_{8k}^{(7)}$								11,896739	—	11,89674	− 39,48

5b) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung des abgekürzten Algorithmus nach C. F. Gauß.

Die Berechnung der Kennbeziehungen und der Hauptglieder der reduzierten Matrix ist übersichtlicher.

α) Vorwärtselimination nach S. 244.
Die Vorzahlen β_{ik} werden nach 5a, γ bestimmt.

β) Rekursion mit Rechenprobe auf gleicher Seite:

Rechenprobe: $\sum X_k \delta_{k0}^{(0)} = \sum X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$,
(vgl. S. 295) 134229,5 ≈ 134229,7.

Rekursion mit Rechenprobe (5b, β):

k	8	7	6	5	4	3	2	1
$-X_{k+1}\varkappa_{k(k+1)}$	—	+ 0,34268	− 18,44331	+ 30,64607	− 9,05830	+ 4,18843	− 25,84439	+ 2,48520
$X_k^{(k)} = \delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	− 3,31856	+ 39,47774	+ 83,68130	− 1,12742	+ 35,09944	+ 55,25362	+ 30,81478	0,00
$\Sigma_{k0} = X_k$	− 3,31856	+ 39,82042	+ 65,23799	+ 29,51865	+ 26,04114	+ 59,44205	+ 4,97039	+ 2,48520
$X_k\,\delta_{k0}^{(0)}$	0,00	31885,0	59044,3	929,8	820,3	39788,7	1761,4	0,00
$X_k^{(k)}\,\delta_{k0}^{(k-1)}$	131,0	15092,7	75595,2	4,1	4014,7	28472,2	10919,8	0,00
k	8	7	6	5	4	3	2	1

6. Die Schnittkräfte des Tragwerks.

Die Schnittkräfte werden nach (288) berechnet. Biegungsmomente M im vorgelegten Tragwerk für die Belastung 2 (Abb. 220).

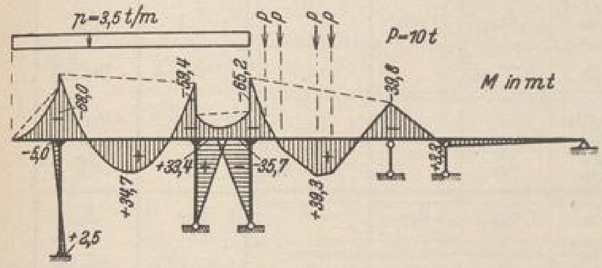

Abb. 220.

Auflösung fünf- und siebengliedriger Ansätze. Die einfache und übersichtliche Lösung eines dreigliedrigen Gleichungssatzes ist durch die unabhängige Kennbeziehung zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen begründet und darf daher bei fünfgliedrigen Gleichungen nicht mehr erwartet werden. Die Untersuchung wird an einem Beispiel mit 7 überzähligen Größen $X_1 \ldots X_7$ gezeigt. Der regelmäßige Ansatz lautet:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}					δ_{10}	
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}				δ_{20}	
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}			δ_{30}	
	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}		δ_{40}	(418)
		δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}	δ_{50}	
			δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}	δ_{67}	δ_{60}	
				δ_{75}	δ_{76}	δ_{77}	δ_{70}	