Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

a) Rechenvorschrift bei Vorwärtselimination des Ansatzes

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

(381) entweder für eine ausgezeichnete Belastung angegeben oder nach (385) zur konjugierten Matrix entwickelt.

a) Rechenvorschrift bei Vorwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 231).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = 2 \ldots n$ aus

$$\delta_{kk}^{(k-1)} = \delta_{kk} - \frac{\delta^2_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}, \ldots \quad \text{und} \quad \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{nn} - \frac{\delta^2_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}},$$

die Belastungsglieder aus

$$\delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \delta^{(k-2)}_{(k-1)0} \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}. \tag{389}$$

Damit wird

$$X_n = \frac{\delta^{(n-1)}_{n0}}{\delta^{(n-1)}_{nn}}. \tag{390}$$

Die überzähligen Größen $X_{n-1} \ldots X_k \ldots X_1$ werden aus den Gleichungen der reduzierten Matrix durch Rekursion gefunden.

Die konjugierte Matrix.

Die Vorzahl $X_n = \beta_{nn}$ der konjugierten Matrix entsteht bei $\delta_{10} = 0, \ldots \delta_{(n-1)0} = 0$, $\delta_{n0} = 1$. Sie ist nach (390)

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta^{(n-1)}_{nn}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \varkappa_{(n-1)n}}. \tag{391}$$

Die Eliminationskoeffizienten $\varkappa_{12} \ldots \varkappa_{(k-1)k} \ldots \varkappa_{(n-1)n}$ sind allein durch die elastischen Eigenschaften des Hauptsystems bestimmt und nach der reduzierten Matrix Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen absteigender Richtung X_k, X_{k-1} des homogenen Ansatzes mit $\delta_{n0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{X_1}{X_2} = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \varkappa_{12}; \quad -\frac{X_2}{X_3} = \frac{\delta_{23}}{\delta^{(1)}_{22}} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{22} - \delta_{21}\varkappa_{12}} = \varkappa_{23} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)}\varkappa_{(k-2)(k-1)}} = \varkappa_{(k-1)k} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&-\frac{X_{n-1}}{X_n} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}} = \frac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)}\varkappa_{(n-2)(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)n}.
\end{aligned}\right| \tag{392}$$

Die Vorzahl β_{nn} des dreigliedrigen Gleichungssatzes wird demnach durch die allmähliche Entwicklung der Kennbeziehungen in der Form eines Kettenbruches unmittelbar aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen angeschrieben. Hierbei entstehen gleichzeitig auch die Formänderungen $\delta^{(k-1)}_{kk}$ und die Kennbeziehungen $\varkappa_{12} \ldots \varkappa_{(k-1)k} \ldots \varkappa_{(n-1)n}$.

$$\beta_{nn} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)}\varkappa_{(n-1)n}} = \frac{1}{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \dfrac{\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)}\varkappa_{(n-2)(n-1)}}} \tag{393}$$

$$\beta_{nn} = \cfrac{1}{\underbrace{\delta_{nn} - \delta_{n(n-1)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-1)n}}{\underbrace{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)(n-2)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-2)(n-1)}}{\underbrace{\delta_{(n-2)(n-2)} - \cdots \delta_{32} \overbrace{\cfrac{\delta_{23}}{\underbrace{\delta_{22} - \delta_{21} \overbrace{\cfrac{\delta_{12}}{\underbrace{\delta_{11}}_{\delta^{(0)}_{11}}}}^{\varkappa_{12}}}_{\delta^{(1)}_{22}}}}^{\varkappa_{23}}}_{\delta^{(n-3)}_{(n-2)(n-2)}}}}^{\varkappa_{(n-2)(n-1)}}}_{\delta^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)}}}}^{\varkappa_{(n-1)n}}}_{\delta^{(n-1)}_{nn}}} \tag{394}$$

Die Vorzahlen $\beta_{(n-1)n} \cdots \beta_{(k-1)n} \cdots \beta_{1n}$ werden daraus durch wiederholte Multiplikation mit den negativen Kennziffern berechnet.

Die Spalte $\beta_{k(n-1)}$ der konjugierten Matrix besteht aus den Unbekannten X_k für die Belastungszahlen $\delta_{k0} = 0$ $(k = 1, \ldots, (n-2), n)$; $\delta_{(n-1)0} = 1$. Daher ist auch das Belastungsglied der reduzierten Matrix $\delta_{(n-1)0}^{(n-2)} = \delta_{(n-1)0} = 1$, so daß die Gleichung mit der Ordnungsnummer $(n-1)$ folgende Form annimmt:

$$\beta_{(n-1)(n-1)}\,\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + \beta_{n(n-1)}\,\delta_{(n-1)n} = 1. \tag{395}$$

Nach Seite 166 ist $\beta_{n(n-1)} = \beta_{(n-1)n}$ und damit bereits bekannt.

$$\beta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1 - \beta_{(n-1)n}\,\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} = \frac{1}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} - \beta_{(n-1)n}\,\varkappa_{(n-1)n}. \tag{396}$$

Hieraus werden wiederum die Vorzahlen $\beta_{k(n-1)}$ $(k = (n-2)\cdots 1)$ durch Multiplikation mit den negativen Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$ gefunden. Ebenso wird mit $\delta_{(n-2)0} = 1$

$$\beta_{(n-2)(n-2)} = \frac{1 - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\delta_{(n-2)(n-1)}}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} = \frac{1}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\varkappa_{(n-2)(n-1)}. \tag{397}$$

Damit sind dann die Vorzahlen $\beta_{k(n-2)}$ $(k = (n-3)\ldots 1)$ durch Rekursion bestimmt. Schließlich wird

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12}\,\varkappa_{12}. \tag{398}$$

Die Entwicklung der konjugierten Matrix durch Rekursion verlangt Zwischenwerte mit einer größeren Anzahl von Stellen, um Fehler in der Zahlenrechnung auszuschließen. Das einwandfreie Ergebnis der Lösung kann durch die Berechnung der Vorzahl β_{11} mit Rückwärtselimination geprüft werden, wenn die Matrix nicht zur Nebendiagonale symmetrisch ist. Dies wird bei Symmetrie des Hauptsystems durch die Verwendung von Gruppen symmetrisch liegender Schnittkräfte nach (359) als überzählige Größen vermieden.

b) Rechenvorschrift bei Rückwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 234).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = (n-1)\ldots 1$ aus

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{kk}^{(n-k)} = \delta_{kk} - \dfrac{\delta_{k(k+1)}^2}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}, \ldots \quad \text{und} \quad \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{11} - \dfrac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}^{(n-2)}}, \\ \text{die Belastungsglieder aus} \\ \delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}\,\dfrac{\delta_{(k+1)k}}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}. \end{array}\right\} \tag{400}$$

Damit wird

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}. \tag{401}$$

Alle anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus der reduzierten Matrix bestimmt.

Die konjugierte Matrix.

Die Belastungszahlen werden der Reihe nach $\delta_{10}^{(n-1)} = \delta_{10} = 1$, $\delta_{20}^{(n-2)} = \delta_{20} = 1$ usw., während alle übrigen Null sind. Die Eliminationskoeffizienten

$$\varkappa_{21} \ldots \varkappa_{32} \ldots \varkappa_{k(k-1)} \ldots \varkappa_{n(n-1)}$$

sind nach der reduzierten Matrix wiederum Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen aufsteigender Richtung X_{k-1}, X_k des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{X_n}{X_{n-1}} = \dfrac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}} = \varkappa_{n(n-1)}; \quad -\dfrac{X_{n-1}}{X_{n-2}} = \dfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}} = \dfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n}\cdot\varkappa_{n(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)(n-2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{X_k}{X_{k-1}} = \dfrac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk}^{(n-k)}} = \dfrac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\,\varkappa_{(k+1)k}} = \varkappa_{k(k-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}} = \dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\,\varkappa_{32}} = \varkappa_{21}. \end{array}\right\} \tag{402}$$