Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

b) Rechenvorschrift bei Rückwärtselimination des Ansatzes

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Die Spalte $\beta_{k(n-1)}$ der konjugierten Matrix besteht aus den Unbekannten X_k für die Belastungszahlen $\delta_{k0} = 0$ $(k = 1, \ldots, (n-2), n)$; $\delta_{(n-1)0} = 1$. Daher ist auch das Belastungsglied der reduzierten Matrix $\delta_{(n-1)0}^{(n-2)} = \delta_{(n-1)0} = 1$, so daß die Gleichung mit der Ordnungsnummer $(n-1)$ folgende Form annimmt:

$$\beta_{(n-1)(n-1)}\,\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + \beta_{n(n-1)}\,\delta_{(n-1)n} = 1\,. \tag{395}$$

Nach Seite 166 ist $\beta_{n(n-1)} = \beta_{(n-1)n}$ und damit bereits bekannt.

$$\beta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1 - \beta_{(n-1)n}\,\delta_{(n-1)n}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} = \frac{1}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)}} - \beta_{(n-1)n}\,\varkappa_{(n-1)n}\,. \tag{396}$$

Hieraus werden wiederum die Vorzahlen $\beta_{k(n-1)}$ $(k = (n-2)\cdots 1)$ durch Multiplikation mit den negativen Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$ gefunden. Ebenso wird mit $\delta_{(n-2)0} = 1$

$$\beta_{(n-2)(n-2)} = \frac{1 - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\delta_{(n-2)(n-1)}}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} = \frac{1}{\delta_{(n-2)(n-2)}^{(n-3)}} - \beta_{(n-2)(n-1)}\,\varkappa_{(n-2)(n-1)}\,. \tag{397}$$

Damit sind dann die Vorzahlen $\beta_{k(n-2)}$ $(k = (n-3)\ldots 1)$ durch Rekursion bestimmt. Schließlich wird

$$\beta_{11} = \frac{1 - \beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}} = \frac{1}{\delta_{11}} - \beta_{12}\,\varkappa_{12}\,. \tag{398}$$

Die Entwicklung der konjugierten Matrix durch Rekursion verlangt Zwischenwerte mit einer größeren Anzahl von Stellen, um Fehler in der Zahlenrechnung auszuschließen. Das einwandfreie Ergebnis der Lösung kann durch die Berechnung der Vorzahl β_{11} mit Rückwärtselimination geprüft werden, wenn die Matrix nicht zur Nebendiagonale symmetrisch ist. Dies wird bei Symmetrie des Hauptsystems durch die Verwendung von Gruppen symmetrisch liegender Schnittkräfte nach (359) als überzählige Größen vermieden.

b) Rechenvorschrift bei Rückwärtselimination des Ansatzes. Reduzierte Matrix (S. 234).

Die Hauptglieder der reduzierten Matrix ergeben sich mit $k = (n-1)\ldots 1$ aus

$$\delta_{kk}^{(n-k)} = \delta_{kk} - \frac{\delta_{k(k+1)}^2}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}\,, \ldots \quad \text{und} \quad \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}^{(n-2)}}\,,$$

die Belastungsglieder aus

$$\delta_{k0}^{(n-k)} = \delta_{k0} - \delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}\,\frac{\delta_{(k+1)k}}{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}\,. \tag{400}$$

Damit wird

$$X_1 = \frac{\delta_{10}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}\,. \tag{401}$$

Alle anderen überzähligen Größen werden durch Rekursion aus der reduzierten Matrix bestimmt.

Die konjugierte Matrix.

Die Belastungszahlen werden der Reihe nach $\delta_{10}^{(n-1)} = \delta_{10} = 1$, $\delta_{20}^{(n-2)} = \delta_{20} = 1$ usw., während alle übrigen Null sind. Die Eliminationskoeffizienten

$$\varkappa_{21}\ldots\varkappa_{32}\ldots\varkappa_{k(k-1)}\ldots\varkappa_{n(n-1)}$$

sind nach der reduzierten Matrix wiederum Kennbeziehungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen aufsteigender Richtung X_{k-1}, X_k des homogenen Ansatzes mit $\delta_{10} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}
-\dfrac{X_n}{X_{n-1}} = \dfrac{\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn}} = \varkappa_{n(n-1)}; \quad -\dfrac{X_{n-1}}{X_{n-2}} = \dfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}} = \dfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n}\cdot\varkappa_{n(n-1)}} = \varkappa_{(n-1)(n-2)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\dfrac{X_k}{X_{k-1}} = \dfrac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk}^{(n-k)}} = \dfrac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\,\varkappa_{(k+1)k}} = \varkappa_{k(k-1)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}} = \dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\,\varkappa_{32}} = \varkappa_{21}\,.
\end{array}\right\} \tag{402}$$

Reduzierte Matrix bei Rückwärtselimination des Ansatzes.

X_1	X_2		X_{k-2}	X_{k-1}	X_k		X_{n-2}	X_{n-1}	X_n		
$\delta_{11}^{(n-1)}$											$\delta_{10}^{(n-1)}$
δ_{21}	$\delta_{22}^{(n-2)}$									$\varkappa_{21}$	$\delta_{20}^{(n-2)}$
			$\delta_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)(k-1)}^{(n-k+1)}$						$\varkappa_{(k-1)(k-2)}$	$\delta_{(k-1)0}^{(n-k+1)}$
				$\delta_{k(k-1)}$	$\delta_{kk}^{(n-k)}$					$\varkappa_{k(k-1)}$	$\delta_{k0}^{(n-k)}$
							$\delta_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}$		$\varkappa_{(n-1)(n-2)}$	$\delta_{(n-1)0}^{(1)}$
								$\delta_{n(n-1)}$	δ_{nn}	$\varkappa_{n(n-1)}$	δ_{n0}

(399)

Rechenvorschrift zur Bildung der konjugierten Matrix (S. 235).

	$-\varkappa_{21}$	$-\varkappa_{32}$		$-\varkappa_{k(k-1)}$		$-\varkappa_{(k+1)k}$		$-\varkappa_{n(n-1)}$		
β_{11}	β_{12}	β_{13}		$\beta_{1(k-1)}$	β_{1k}	$\beta_{1(k+1)}$		$\beta_{1(n-1)}$	β_{1n}	
	β_{22}	β_{23}		$\beta_{2(k-1)}$	β_{2k}	$\beta_{2(k+1)}$		$\beta_{2(n-1)}$	β_{2n}	$-\varkappa_{12}$
		β_{33}		$\beta_{3(k-1)}$	β_{3k}	$\beta_{3(k+1)}$		$\beta_{3(n-1)}$	β_{3n}	$-\varkappa_{23}$
				$\beta_{(k-1)(k-1)}$	$\beta_{(k-1)k}$	$\beta_{(k-1)(k+1)}$		$\beta_{(k-1)(n-1)}$	$\beta_{(k-1)n}$	
					β_{kk}	$\beta_{k(k+1)}$		$\beta_{k(n-1)}$	β_{kn}	$-\varkappa_{(k-1)k}$
						$\beta_{(k+1)(k+1)}$		$\beta_{(k+1)(k-1)}$	$\beta_{(k+1)n}$	$-\varkappa_{k(k+1)}$
								$\beta_{(n-1)(n-1)}$	$\beta_{(n-1)n}$	
									β_{nn}	$-\varkappa_{(n-1)n}$

(408)

Daher kann auch β_{11} aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen als Kettenbruch angeschrieben werden. Er enthält die Formänderungen $\delta_{kk}^{(n-k)}$ und die Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\varkappa_{21}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\varkappa_{32}}}. \tag{403}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{\underbrace{\delta_{11} - \delta_{12} \overbrace{\cfrac{\delta_{21}}{\underbrace{\delta_{22} - \delta_{23} \overbrace{\cfrac{\delta_{32}}{\underbrace{\delta_{33} - \cdots - \delta_{(n-2)(n-1)} \overbrace{\cfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\underbrace{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n} \overbrace{\cfrac{\delta_{n(n-1)}}{\underbrace{\delta_{nn}}_{\delta_{nn}^{(0)}}}}^{\varkappa_{n(n-1)}}}_{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}}}}^{\varkappa_{(n-1)(n-2)}}}_{\delta_{33}^{(n-3)}}}}^{\varkappa_{32}}}_{\delta_{22}^{(n-2)}}}}^{\varkappa_{21}}}_{\delta_{11}^{(n-1)}}} \tag{404}$$

Die Vorzahlen $\beta_{21} \ldots \beta_{k1} \ldots \beta_{n1}$ werden durch Rekursion mit den Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt. Die Vorzahl β_{22} entsteht aus $\delta_{20} = 1$ mit $\beta_{12} = \beta_{21}$ und der Gl. (402)

$$\beta_{12}\delta_{21} + \beta_{22}\delta_{22}^{(n-2)} = 1\,; \qquad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(n-2)}} - \beta_{21}\varkappa_{21}. \tag{405}$$

Die Vorzahlen $\beta_{32} \ldots \beta_{k2} \ldots \beta_{n2}$ sind dann wieder durch Rekursion bestimmt. Zuletzt wird β_{nn} erhalten.

c) Gleichzeitige Verwendung der Kennbeziehungen aus Vorwärts- und Rückwärtselimination. Die Zwischenwerte der Rückwärtselimination zur Bildung der Vorzahl β_{11}, mit der zunächst nur die aus der Vorwärtselimination (394) gewonnene konjugierte Matrix nachgeprüft wird, dienen zu einer einfachen Berechnung der Hauptglieder der konjugierten Matrix. Sind β_{nn}, $\beta_{(n-1)n}$ usw. durch Vorwärtselimination bekannt, so wird aus Gleichung n der reduzierten Matrix der Rückwärtselimation und mit $\delta_{(n-1)0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \beta_{(n-1)(n-1)}\delta_{n(n-1)} + \beta_{n(n-1)}\delta_{nn} &= 0\,. \\ \beta_{(n-1)(n-1)} = -\frac{\delta_{nn}}{\delta_{n(n-1)}}\beta_{n(n-1)} &= -\frac{1}{\varkappa_{n(n-1)}}\beta_{(n-1)n}\,. \end{aligned}\right\} \tag{406}$$

In ähnlicher Weise wird β_{kk} für $\delta_{k0} = 1$ aus der Gleichung $(k+1)$ der reduzierten Matrix gefunden.

$$\left.\begin{aligned} \beta_{kk}\delta_{(k+1)k} + \beta_{(k+1)k}\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)} &= 0\,. \\ \beta_{kk} = -\beta_{(k+1)k}\frac{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}{\delta_{(k+1)k}} &= -\frac{1}{\varkappa_{(k+1)k}}\beta_{k(k+1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{407}$$

Diese Beziehungen können an Stelle von (397)oder zu deren Nachprüfung als Zwischenkontrollen verwendet werden.

Die konjugierte Matrix eines dreigliedrigen Ansatzes wird hiernach am einfachsten mit der Entwicklung von β_{nn} und β_{11} in Gestalt zweier Kettenbrüche begonnen. Damit sind die Kennzahlen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt, mit denen die übrigen Vorzahlen nach (392 u. 402) durch einfache Rekursion gefunden werden. Die Ansätze (397) dienen als Zwischenprüfung.

Die Rechenvorschrift wird in einer Tabelle S. 234 zusammengefaßt. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die Vorzahlen der konjugierten Matrix durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer dazwischenstehenden negativen Kennzahl $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ entstehen. Daher kann das Hauptglied β_{kk}, verglichen mit der Rekursion nach S. 233, durch Multiplikation von $\beta_{k(k+1)}$ mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$ berechnet werden.