Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

c) Gleichzeitige Verwendung der Kennbeziehungen aus Vorwärts- und Rückwärtselimination

Daher kann auch β_{11} aus der Matrix der Elastizitätsgleichungen als Kettenbruch angeschrieben werden. Er enthält die Formänderungen $\delta_{kk}^{(n-k)}$ und die Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\varkappa_{21}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}^{(n-2)}}} = \frac{1}{\delta_{11} - \delta_{12}\dfrac{\delta_{21}}{\delta_{22} - \delta_{23}\varkappa_{32}}}\,. \tag{403}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{\underbrace{\delta_{11} - \delta_{12}\overbrace{\cfrac{\delta_{21}}{\underbrace{\delta_{22} - \delta_{23}\overbrace{\cfrac{\delta_{32}}{\underbrace{\delta_{33} - \cdots - \delta_{(n-2)(n-1)}\overbrace{\cfrac{\delta_{(n-1)(n-2)}}{\underbrace{\delta_{(n-1)(n-1)} - \delta_{(n-1)n}\overbrace{\cfrac{\delta_{n(n-1)}}{\underbrace{\delta_{nn}}_{\delta_{nn}^{(0)}}}}^{\varkappa_{n(n-1)}}}_{\delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)}}}}^{\varkappa_{(n-1)(n-2)}}}_{\delta_{33}^{(n-3)}}}}^{\varkappa_{32}}}_{\delta_{22}^{(n-2)}}}}^{\varkappa_{21}}}_{\delta_{11}^{(n-1)}}} \tag{404}$$

Die Vorzahlen $\beta_{21} \ldots \beta_{k1} \ldots \beta_{n1}$ werden durch Rekursion mit den Kennziffern $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt. Die Vorzahl β_{22} entsteht aus $\delta_{20} = 1$ mit $\beta_{12} = \beta_{21}$ und der Gl. (402)

$$\beta_{12}\delta_{21} + \beta_{22}\delta_{22}^{(n-2)} = 1\,; \qquad \beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^{(n-2)}} - \beta_{21}\varkappa_{21}\,. \tag{405}$$

Die Vorzahlen $\beta_{32} \ldots \beta_{k2} \ldots \beta_{n2}$ sind dann wieder durch Rekursion bestimmt. Zuletzt wird β_{nn} erhalten.

c) Gleichzeitige Verwendung der Kennbeziehungen aus Vorwärts- und Rückwärtselimination. Die Zwischenwerte der Rückwärtselimination zur Bildung der Vorzahl β_{11}, mit der zunächst nur die aus der Vorwärtselimination (394) gewonnene konjugierte Matrix nachgeprüft wird, dienen zu einer einfachen Berechnung der Hauptglieder der konjugierten Matrix. Sind β_{nn}, $\beta_{(n-1)n}$ usw. durch Vorwärtselimination bekannt, so wird aus Gleichung n der reduzierten Matrix der Rückwärtselimation und mit $\delta_{(n-1)0} = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \beta_{(n-1)(n-1)}\delta_{n(n-1)} + \beta_{n(n-1)}\delta_{nn} &= 0\,. \\ \beta_{(n-1)(n-1)} = -\frac{\delta_{nn}}{\delta_{n(n-1)}}\beta_{n(n-1)} &= -\frac{1}{\varkappa_{n(n-1)}}\beta_{(n-1)n}\,. \end{aligned}\right\} \tag{406}$$

In ähnlicher Weise wird β_{kk} für $\delta_{k0} = 1$ aus der Gleichung $(k+1)$ der reduzierten Matrix gefunden.

$$\left.\begin{aligned} \beta_{kk}\delta_{(k+1)k} + \beta_{(k+1)k}\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)} &= 0\,. \\ \beta_{kk} = -\beta_{(k+1)k}\frac{\delta_{(k+1)(k+1)}^{(n-k-1)}}{\delta_{(k+1)k}} &= -\frac{1}{\varkappa_{(k+1)k}}\beta_{k(k+1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{407}$$

Diese Beziehungen können an Stelle von (397)oder zu deren Nachprüfung als Zwischenkontrollen verwendet werden.

Die konjugierte Matrix eines dreigliedrigen Ansatzes wird hiernach am einfachsten mit der Entwicklung von β_{nn} und β_{11} in Gestalt zweier Kettenbrüche begonnen. Damit sind die Kennzahlen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ bestimmt, mit denen die übrigen Vorzahlen nach (392 u. 402) durch einfache Rekursion gefunden werden. Die Ansätze (397) dienen als Zwischenprüfung.

Die Rechenvorschrift wird in einer Tabelle S. 234 zusammengefaßt. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die Vorzahlen der konjugierten Matrix durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer dazwischenstehenden negativen Kennzahl $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ entstehen. Daher kann das Hauptglied β_{kk}, verglichen mit der Rekursion nach S. 233, durch Multiplikation von $\beta_{k(k+1)}$ mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$ berechnet werden.

Eine mittlere Vorzahl β_{kk} der Hauptdiagonale kann auch aus der Gleichung (k) des Ansatzes (399) mit $\delta_{k0} = 1$ in Verbindung mit den beiden Kennbeziehungen

$$-\frac{X_{k-1}}{X_k} = \varkappa_{(k-1)k} \quad \text{und} \quad -\frac{X_{k+1}}{X_k} = \varkappa_{(k+1)k} \tag{409}$$

unmittelbar berechnet werden:

$$\beta_{kk} = \frac{1}{-\varkappa_{(k-1)k}\,\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\,\delta_{k(k+1)}}\,. \tag{410}$$

Anwendung auf die Lösung eines Ansatzes mit sechs Gleichungen.

1. Elastizitätsgleichungen:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
I	δ_{11}	δ_{12}					δ_{10}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}				δ_{20}
3		δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}			δ_{30}
4			δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}		δ_{40}
5				δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{50}
6					δ_{65}	δ_{66}	δ_{60}

2. Vorwärtselimination nach dem abgekürzten Gaußschen Algorithmus (381):

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6			
I	δ_{11}	δ_{12}					$\varkappa_{12}$	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22} $-\varkappa_{12}\delta_{12}$	δ_{23}					$\delta_{2\Sigma}$ $-\varkappa_{12}\delta_{1\Sigma}$	δ_{20} $-\varkappa_{12}\delta_{10}$
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				$\varkappa_{23}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
		(δ_{32})	δ_{33} $-\varkappa_{23}\delta_{23}$	δ_{34}				$\delta_{3\Sigma}$ $-\varkappa_{23}\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	δ_{30} $-\varkappa_{23}\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			$\varkappa_{34}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
			(δ_{43})	δ_{44} $-\varkappa_{34}\delta_{34}$	δ_{45}			$\delta_{4\Sigma}$ $-\varkappa_{34}\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	δ_{40} $-\varkappa_{34}\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		$\varkappa_{45}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
				(δ_{54})	δ_{55} $-\varkappa_{45}\delta_{45}$	δ_{56}		$\delta_{5\Sigma}$ $-\varkappa_{45}\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	δ_{50} $-\varkappa_{45}\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	$\varkappa_{56}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
					(δ_{65})	δ_{66} $-\varkappa_{56}\delta_{56}$		$\delta_{6\Sigma}$ $-\varkappa_{56}\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	δ_{60} $-\varkappa_{56}\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$

$$X_6 = \frac{\delta_{60}^{(5)}}{\delta_{66}^{(5)}}; \qquad \delta_{60} = \delta_{60}^{(5)} = 1: \qquad X_6 = \beta_{66}\,.$$

Die anderen überzähligen Größen X_k oder β_{kk} entstehen durch Rekursion.

3. Vorwärts- und Rückwärtselimination als Kettenbruch. a) Kettenbruch zur Vorwärtselimination.

$$\beta_{66} = \frac{1}{\delta_{66}^{(5)}} = \cfrac{1}{\delta_{66} - \delta_{56}\cfrac{\delta_{65}}{\delta_{55} - \delta_{45}\cfrac{\delta_{54}}{\delta_{44} - \delta_{34}\cfrac{\delta_{43}}{\delta_{33} - \delta_{23}\cfrac{\delta_{32}}{\delta_{22} - \delta_{12}\cfrac{\delta_{21}}{\delta_{11}}}}}}}$$

$$\varkappa_{56} \quad \varkappa_{45} \quad \varkappa_{34} \quad \varkappa_{23} \quad \varkappa_{12}$$

$$\delta_{66}^{(5)} \quad \delta_{55}^{(4)} \quad \delta_{44}^{(3)} \quad \delta_{33}^{(2)} \quad \delta_{22}^{(1)} \quad \delta_{11}^{(0)}$$

Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\varkappa_{12} = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}; \quad \varkappa_{23} = \frac{\delta_{32}}{\delta_{22}^{(1)}}; \quad \varkappa_{34} = \frac{\delta_{43}}{\delta_{33}^{(2)}}; \quad \varkappa_{45} = \frac{\delta_{54}}{\delta_{44}^{(3)}}; \quad \varkappa_{56} = \frac{\delta_{65}}{\delta_{55}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{22}^{(1)} \ldots \delta_{66}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur Vorwärtselimination. Die Belastungszahlen werden für jeden Belastungsfall nach (389) berechnet.

$$\delta_{k0}^{(k-1)} = \delta_{k0} - \delta_{(k-1)0}^{(k-2)}\, \varkappa_{(k-1)\,k}.$$

Reduzierte Matrix zur Vorwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
1	δ_{11}	δ_{12}					$\varkappa_{12}$	δ_{10}
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	δ_{23}				$\varkappa_{23}$	$\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	δ_{34}			$\varkappa_{34}$	$\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	δ_{45}		$\varkappa_{45}$	$\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	δ_{56}	$\varkappa_{56}$	$\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$		$\delta_{60}^{(5)}$

(411)

Darnach wird für jeden Belastungsfall zuerst X_6 bestimmt. Die anderen überzähligen Größen $X_5 \ldots X_1$ ergeben sich durch Rekursion.

b) Kettenbruch zur Rückwärtselimination.

$$\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}^{(5)}} = \cfrac{1}{\delta_{11} - \delta_{21}\cfrac{\delta_{12}}{\delta_{22} - \delta_{32}\cfrac{\delta_{23}}{\delta_{33} - \delta_{43}\cfrac{\delta_{34}}{\delta_{44} - \delta_{54}\cfrac{\delta_{45}}{\delta_{55} - \delta_{65}\cfrac{\delta_{56}}{\delta_{66}}}}}}}$$

$$\varkappa_{21} \quad \varkappa_{32} \quad \varkappa_{43} \quad \varkappa_{54} \quad \varkappa_{65}$$

$$\delta_{11}^{(5)} \quad \delta_{22}^{(4)} \quad \delta_{33}^{(3)} \quad \delta_{44}^{(2)} \quad \delta_{55}^{(1)} \quad \delta_{66}^{(0)}$$

Die Zahlenrechnung liefert der Reihe nach die Kennbeziehungen

$$\varkappa_{65}=\frac{\delta_{56}}{\delta_{66}};\qquad \varkappa_{54}=\frac{\delta_{45}}{\delta_{55}^{(1)}};\qquad \varkappa_{43}=\frac{\delta_{34}}{\delta_{44}^{(2)}};\qquad \varkappa_{32}=\frac{\delta_{23}}{\delta_{33}^{(3)}};\qquad \varkappa_{21}=\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}^{(4)}}$$

und die Hauptglieder $\delta_{55}^{(1)}\ldots\delta_{11}^{(5)}$ der reduzierten Matrix zur abgekürzten Rückwärtselimination. Die Belastungszahlen sind nach (400)

$$\delta_{k0}^{(n-k)}=\delta_{k0}-\varkappa_{(k+1)k}\,\delta_{(k+1)0}^{(n-k-1)}.$$

Reduzierte Matrix zur Rückwärtselimination.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
$1^{(5)}$	$\delta_{11}^{(5)}$							$\delta_{10}^{(5)}$
$2^{(4)}$	δ_{21}	$\delta_{22}^{(4)}$					$\varkappa_{21}$	$\delta_{20}^{(4)}$
$3^{(3)}$		δ_{32}	$\delta_{33}^{(3)}$				$\varkappa_{32}$	$\delta_{30}^{(3)}$
$4^{(2)}$			δ_{43}	$\delta_{44}^{(2)}$			$\varkappa_{43}$	$\delta_{40}^{(2)}$
$5^{(1)}$				δ_{54}	$\delta_{55}^{(1)}$		$\varkappa_{54}$	$\delta_{50}^{(1)}$
6					δ_{65}	δ_{66}	$\varkappa_{65}$	δ_{60}

Der Ansatz liefert für jede Belastung zuerst X_1. Damit sind die anderen statisch überzähligen Größen $X_2\ldots X_6$ durch Rekursion bestimmt.

4. Konjugierte Matrix. Die konjugierte Matrix kann aus einem der beiden Kettenbrüche entwickelt werden. Bei Vorwärtselimination entsteht β_{66} und $\varkappa_{56}\ldots\varkappa_{12}$. Die Gleichung $5^{(4)}$ der reduzierten Matrix (411) liefert mit $\beta_{65}=\beta_{56}$

$$\beta_{55}\,\delta_{55}^{(4)}+\beta_{65}\,\delta_{56}=1;\qquad \beta_{55}=\frac{1-\beta_{56}\,\delta_{56}}{\delta_{55}^{(4)}}=\frac{1}{\delta_{55}^{(4)}}-\beta_{56}\,\varkappa_{56}.$$

Die Vorzahlen $\beta_{45}\ldots\beta_{15}$ ergeben sich wieder durch Multiplikation mit $-\varkappa_{45}$ usw., die übrigen Vorzahlen in ähnlicher Weise.

$$\beta_{44}=\frac{1-\beta_{45}\,\delta_{45}}{\delta_{44}^{(3)}}=\frac{1}{\delta_{44}^{(3)}}-\beta_{45}\,\varkappa_{45},\quad \beta_{34},\quad \beta_{24},\quad \beta_{14},$$

$$\beta_{11}=\frac{1-\beta_{12}\,\delta_{12}}{\delta_{11}}=\frac{1}{\delta_{11}}-\beta_{12}\,\varkappa_{12}.$$

Konjugierte Matrix aus

Vorwärtselimination und Rekursion.

$\longrightarrow -\varkappa_{21}-\varkappa_{32}-\varkappa_{43}-\varkappa_{54}-\varkappa_{65}\longrightarrow$

X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}	$-\varkappa_{12}$
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}	$-\varkappa_{23}$
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}	$-\varkappa_{34}$
X_5					β_{55}	β_{56}	$-\varkappa_{45}$
X_6						β_{66}	$-\varkappa_{56}$
	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	

Rückwärtselimination und Rekursion.

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	
	β_{11}						X_1
$-\varkappa_{21}$	β_{21}	β_{22}					X_2
$-\varkappa_{32}$	β_{31}	β_{32}	β_{33}				X_3
$-\varkappa_{43}$	β_{41}	β_{42}	β_{43}	β_{44}			X_4
$-\varkappa_{54}$	β_{51}	β_{52}	β_{53}	β_{54}	β_{55}		X_5
$-\varkappa_{65}$	β_{61}	β_{62}	β_{63}	β_{64}	β_{65}	β_{66}	X_6

$\longleftarrow -\varkappa_{12}-\varkappa_{23}-\varkappa_{34}-\varkappa_{45}-\varkappa_{56}\longleftarrow$

Die Berechnung der konjugierten Matrix ist bei Verwendung der Zwischenwerte

$\varkappa_{(k-1)k}$ und $\varkappa_{k(k-1)}$ beider Kettenbrüche kürzer. Die Rekursion mit β_{66} der Vorwärtselimination verwendet die Beziehungen

$$\beta_{55} = -\frac{1}{\varkappa_{65}}\beta_{56}, \ldots, \quad \beta_{11} = -\frac{1}{\varkappa_{21}}\beta_{12},$$

die Rekursion mit β_{11} der Rückwärtselimination die Beziehungen

$$\beta_{22} = -\frac{1}{\varkappa_{12}}\beta_{21}, \ldots, \quad \beta_{66} = -\frac{1}{\varkappa_{56}}\beta_{65}.$$

Die Pfeilrichtungen sind wiederum die Anweisung (S. 235) für die Berechnung der Vorzahlen β_{ik} mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}, \varkappa_{k(k-1)}$.

Zur Berechnung der überzähligen Größen X_k für einen beliebigen Belastungsfall $\delta_{1\otimes} \ldots \delta_{6\otimes}$ durch Superposition nach (369) genügt ebenso wie für die Einflußlinie X_k einer der beiden Ansätze, da nach S. 166 $\beta_{ik} = \beta_{ki}$.

$$X_k = \sum_{i=1}^{i=6} \beta_{ki}\,\delta_{i\otimes}, \qquad (k = 1 \ldots 6). \tag{412}$$

d) Ausgezeichnete Belastung mit ein oder zwei Belastungszahlen. Der Sonderfall $\delta_{k0} \neq 0$, $\delta_{i0} = 0$ $(i = 1 \ldots k-1, k+1 \ldots n)$ gestattet folgende Umformung der Gleichung (k) der Matrix:

$$X_k(-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{k(k+1)}) = \delta_{k0},$$

$$X_k = \frac{\delta_{k0}}{-\varkappa_{(k-1)k}\delta_{(k-1)k} + \delta_{kk} - \varkappa_{(k+1)k}\delta_{(k+1)k}}, \tag{413}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{k-1} &= -\varkappa_{(k-1)k}X_k, \ldots X_1 = -\varkappa_{12}X_2, \\ X_{k+1} &= -\varkappa_{(k+1)k}X_k, \ldots X_n = -\varkappa_{n(n-1)}X_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{414}$$

Sind bei der Belastung des Hauptsystems nur zwei Belastungszahlen $\delta_{(k-1)0}$, δ_{k0} von Null verschieden, so können die zugeordneten Verträglichkeitsbedingungen des Ansatzes

$$\left.\begin{aligned} (k-1)&: \quad X_{k-2}\delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1}\delta_{(k-1)(k-1)} + X_k\delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0}, \\ (k)&: \quad + X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk} + X_{k+1}\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}, \end{aligned}\right\} \tag{415}$$

mit

$$X_{k-2} = -X_{k-1}\varkappa_{(k-2)(k-1)}; \qquad X_{k+1} = -X_k\varkappa_{(k+1)k}$$

in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angeschrieben werden.

$$X_{k-1}(\delta_{(k-1)(k-1)} - \delta_{(k-1)(k-2)}\varkappa_{(k-2)(k-1)}) + X_k\delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0},$$
$$X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k(\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}\varkappa_{(k+1)k}) = \delta_{k0}.$$

Hieraus wird nach Division mit $\delta_{(k-1)k}$ in Verbindung mit (392) und (402)

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_{k-1}}{\varkappa_{(k-1)k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = R_{(k-1)k}, \\ X_{k-1} + \frac{X_k}{\varkappa_{k(k-1)}} &= \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = R_{kk}. \end{aligned}\right\} \tag{416}$$

Die Glieder der rechten Seite sind Quotienten bekannter Verschiebungen des Hauptsystems. Sie besitzen durch das Gleichheitszeichen dieselbe mechanische Bedeutung wie die überzähligen Größen X_k.

$$X_{k-1} = \frac{R_{(k-1)k}\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - R_{kk}}{\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}}\,\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - 1}; \qquad X_k = \frac{R_{kk}\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}} - R_{(k-1)k}}{\dfrac{1}{\varkappa_{(k-1)k}}\,\dfrac{1}{\varkappa_{k(k-1)}} - 1}. \tag{417}$$

Die Schnittkräfte $X_{k-2} \ldots X_1$ werden mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k-2)(k-1)} \ldots \varkappa_{12}$, die Schnittkräfte $X_{k+1} \ldots X_n$ mit den Kennzahlen $\varkappa_{(k+1)k} \ldots \varkappa_{n(n-1)}$ bestimmt.