Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Auflösung fünfgliedriger und siebengliedriger Ansätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

5b) **Auflösung des Ansatzes unter Verwendung des abgekürzten Algorithmus nach C. F. Gauß.**

Die Berechnung der Kennbeziehungen und der Hauptglieder der reduzierten Matrix ist übersichtlicher.

α) Vorwärtselimination nach S. 244.
Die Vorzahlen β_{ik} werden nach 5a, γ bestimmt.

β) Rekursion mit Rechenprobe auf gleicher Seite:

Rechenprobe: $\sum X_k \delta_{k0}^{(0)} = \sum X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$,
(vgl. S. 295) $134229{,}5 \approx 134229{,}7$.

Rekursion mit Rechenprobe (5b, β):

k	8	7	6	5	4	3	2	1
$-X_{k+1}\varkappa_{k(k+1)}$	—	+ 0,34268	− 18,44331	+ 30,64607	− 9,05830	+ 4,18843	− 25,84439	+ 2,48520
$X_k^{(k)}=\delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	− 3,31856	+ 39,47774	+ 83,68130	− 1,12742	+ 35,09944	+ 55,25362	+ 30,81478	0,00
$\Sigma_{k0}=X_k$	− 3,31856	+ 39,82042	+ 65,23799	+ 29,51865	+ 26,04114	+ 59,44205	+ 4,97039	+ 2,48520
$X_k\,\delta_{k0}^{(0)}$	0,00	31885,0	59044,3	929,8	820,3	39788,7	1761,4	0,00
$X_k^{(k)}\,\delta_{k0}^{(k-1)}$	131,0	15092,7	75595,2	4,1	4014,7	28472,2	10919,8	0,00
k	8	7	6	5	4	3	2	1

6. **Die Schnittkräfte des Tragwerks.**

Die Schnittkräfte werden nach (288) berechnet. Biegungsmomente M im vorgelegten Tragwerk für die Belastung 2 (Abb. 220).

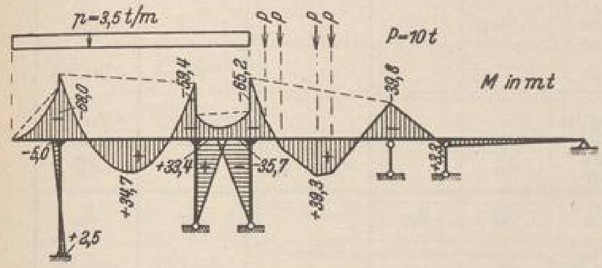

Abb. 220.

Auflösung fünf- und siebengliedriger Ansätze. Die einfache und übersichtliche Lösung eines dreigliedrigen Gleichungssatzes ist durch die unabhängige Kennbeziehung zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen begründet und darf daher bei fünfgliedrigen Gleichungen nicht mehr erwartet werden. Die Untersuchung wird an einem Beispiel mit 7 überzähligen Größen $X_1 \ldots X_7$ gezeigt. Der regelmäßige Ansatz lautet:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & \\
\hline
\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & & & & & \delta_{10} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & & & & \delta_{20} \\
\delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & & & \delta_{30} \\
 & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} & & \delta_{40} \\
 & & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} & \delta_{57} & \delta_{50} \\
 & & & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} & \delta_{67} & \delta_{60} \\
 & & & & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} & \delta_{70}
\end{array} \qquad (418)$$

Vorwärtselimination nach dem Gaußschen Algorithmus (419)*.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7				
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}					$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\delta_{1\Sigma}$	δ_{10}
	(δ_{21})	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}						$\delta_{2\Sigma}$	δ_{20}
		$-\varkappa_{12}\,\delta_{12}$	$-\varkappa_{12}\,\delta_{13}$	—						$-\varkappa_{12}\,\delta_{1\Sigma}$	$-\varkappa_{12}\,\delta_{10}$
$2^{(1)}$		$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	δ_{24}				$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$\delta_{20}^{(1)}$
	(δ_{31})	(δ_{32})	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}					$\delta_{3\Sigma}$	δ_{30}
			$-\varkappa_{13}\,\delta_{13}$	—	—					$-\varkappa_{13}\,\delta_{1\Sigma}$	$-\varkappa_{13}\,\delta_{10}$
			$-\varkappa_{23}\,\delta_{23}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\,\delta_{24}$	—					$-\varkappa_{23}\,\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\varkappa_{23}\,\delta_{20}^{(1)}$
$3^{(2)}$			$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	δ_{35}			$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	$\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$\delta_{30}^{(2)}$
		(δ_{42})	(δ_{43})	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}				$\delta_{4\Sigma}$	δ_{40}
				$-\varkappa_{24}\,\delta_{24}$	—	—				$-\varkappa_{24}\,\delta_{2\Sigma}^{(1)}$	$-\varkappa_{24}\,\delta_{20}^{(1)}$
				$-\varkappa_{34}\,\delta_{34}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\,\delta_{35}$	—				$-\varkappa_{34}\,\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\varkappa_{34}\,\delta_{30}^{(2)}$
$4^{(3)}$				$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	δ_{46}		$\varkappa_{45}$	$\varkappa_{46}$	$\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$\delta_{40}^{(3)}$
			(δ_{53})	(δ_{54})	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}			$\delta_{5\Sigma}$	δ_{50}
					$-\varkappa_{35}\,\delta_{35}$	—	—			$-\varkappa_{35}\,\delta_{3\Sigma}^{(2)}$	$-\varkappa_{35}\,\delta_{30}^{(2)}$
					$-\varkappa_{45}\,\delta_{45}^{(3)}$	$-\varkappa_{45}\,\delta_{46}$	—			$-\varkappa_{45}\,\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\varkappa_{45}\,\delta_{40}^{(3)}$
$5^{(4)}$					$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{56}^{(4)}$	δ_{57}	$\varkappa_{56}$	$\varkappa_{57}$	$\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$
				(δ_{64})	(δ_{65})	δ_{66}	δ_{67}			$\delta_{6\Sigma}$	δ_{60}
						$-\varkappa_{46}\,\delta_{46}$	—			$-\varkappa_{46}\,\delta_{4\Sigma}^{(3)}$	$-\varkappa_{46}\,\delta_{40}^{(3)}$
						$-\varkappa_{56}\,\delta_{56}^{(4)}$	$-\varkappa_{56}\,\delta_{57}$			$-\varkappa_{56}\,\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\varkappa_{56}\,\delta_{50}^{(4)}$
$6^{(5)}$						$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{67}^{(5)}$	$\varkappa_{67}$		$\delta_{6\Sigma}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$
					(δ_{75})	(δ_{76})	δ_{77}			$\delta_{7\Sigma}$	δ_{70}
							$-\varkappa_{57}\,\delta_{57}$			$-\varkappa_{57}\,\delta_{5\Sigma}^{(4)}$	$-\varkappa_{57}\,\delta_{50}^{(4)}$
							$-\varkappa_{67}\,\delta_{67}^{(5)}$			$-\varkappa_{67}\,\varkappa_{6\Sigma}^{(5)}$	$-\varkappa_{67}\,\delta_{60}^{(5)}$
$7^{(6)}$							$\delta_{77}^{(6)}$			$\delta_{7\Sigma}^{(6)}$	$\delta_{70}^{(6)}$

Die Zeilen $1, 2^{(1)}, 3^{(2)} \ldots 7^{(6)}$ bilden zusammen die reduzierte Matrix.

$$\left.\begin{aligned} X_7 &= \frac{\delta_{70}^{(6)}}{\delta_{77}^{(6)}}, \\ X_6\,\delta_{66}^{(5)} = \delta_{60}^{(5)} - X_7\,\delta_{67}^{(5)}, \quad X_5\,\delta_{55}^{(4)} &= \delta_{50}^{(4)} - X_7\,\delta_{57} - X_6\,\delta_{56}^{(4)} \text{ usw.} \end{aligned}\right\} . \tag{420}$$

Der Sonderfall $\delta_{10} = \cdots = \delta_{60} = 0$, $\delta_{70} = 1$ liefert $X_7 = \beta_{77} = \frac{1}{\delta_{77}^{(6)}}$. Für die Rekursion

* Die Klammerwerte sind nur zur Erleichterung der Summenbildung $\delta_{k\Sigma}$ beigefügt.

ist eine Kennbeziehung mit je zwei Kennziffern $\varkappa_{k(k+1)}, \varkappa_{k(k+2)}$ zwischen drei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen $k, (k+1), (k+2)$ charakteristisch.

$$\left.\begin{array}{lll} \beta_{67} = -\varkappa_{67}\beta_{77}, & \beta_{57} = -\varkappa_{56}\beta_{67} - \varkappa_{57}\beta_{77}, \ldots, & \beta_{17} = -\varkappa_{12}\beta_{27} - \varkappa_{13}\beta_{37}, \\ \beta_{66} = \dfrac{1}{\delta_{66}^{(5)}} - \varkappa_{67}\beta_{67}, & \beta_{56} = -\varkappa_{56}\beta_{66} - \varkappa_{57}\beta_{67}, \ldots, & \beta_{16} = -\varkappa_{12}\beta_{26} - \varkappa_{13}\beta_{36}, \\ \beta_{55} = \dfrac{1}{\delta_{55}^{(4)}} - \varkappa_{56}\beta_{56} - \varkappa_{57}\beta_{57}, \ldots & & \beta_{11} = \dfrac{1}{\delta_{11}} - \varkappa_{12}\beta_{12} - \varkappa_{13}\beta_{13}. \end{array}\right| \quad (421)$$

Das Ergebnis kann durch Rückwärtselimination nachgeprüft werden. Damit ist die konjugierte Matrix durch folgende Rechenvorschrift bestimmt.

(422)

	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{40}	δ_{50}	δ_{60}	δ_{70}	
X_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	β_{14}	β_{15}	β_{16}	β_{17}	$-\varkappa_{12}$; $-\varkappa_{13}$
X_2		β_{22}	β_{23}	β_{24}	β_{25}	β_{26}	β_{27}	$-\varkappa_{23}$; $-\varkappa_{24}$
X_3			β_{33}	β_{34}	β_{35}	β_{36}	β_{37}	$-\varkappa_{34}$; $-\varkappa_{35}$
X_4				β_{44}	β_{45}	β_{46}	β_{47}	$-\varkappa_{45}$; $-\varkappa_{46}$
X_5					β_{55}	β_{56}	β_{57}	$-\varkappa_{56}$; $-\varkappa_{57}$
X_6						β_{66}	β_{67}	$-\varkappa_{67}$
X_7							β_{77}	

Die Lösung eines siebengliedrigen Ansatzes erfährt keine grundsätzliche Änderung. Die folgenden Bemerkungen genügen zur Anwendung.

Matrix und reduzierte Matrix bei Vorwärtselimination (423).

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}				δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}			δ_{20}
δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}		δ_{30}
δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}	δ_{47}	δ_{40}
	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}	δ_{57}	δ_{50}
		δ_{63}	δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}	δ_{67}	δ_{60}
			δ_{74}	δ_{75}	δ_{76}	δ_{77}	δ_{70}

δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}				δ_{10}	$\varkappa_{12}$	$\varkappa_{13}$	$\varkappa_{14}$
	$\delta_{22}^{(1)}$	$\delta_{23}^{(1)}$	$\delta_{24}^{(1)}$	δ_{25}			$\delta_{20}^{(1)}$	$\varkappa_{23}$	$\varkappa_{24}$	$\varkappa_{25}$
		$\delta_{33}^{(2)}$	$\delta_{34}^{(2)}$	$\delta_{35}^{(2)}$	δ_{36}		$\delta_{30}^{(2)}$	$\varkappa_{34}$	$\varkappa_{35}$	$\varkappa_{36}$
			$\delta_{44}^{(3)}$	$\delta_{45}^{(3)}$	$\delta_{46}^{(3)}$	δ_{47}	$\delta_{40}^{(3)}$	$\varkappa_{45}$	$\varkappa_{46}$	$\varkappa_{47}$
				$\delta_{55}^{(4)}$	$\delta_{56}^{(4)}$	$\delta_{57}^{(4)}$	$\delta_{50}^{(4)}$	$\varkappa_{56}$	$\varkappa_{57}$	
					$\delta_{66}^{(5)}$	$\delta_{67}^{(5)}$	$\delta_{60}^{(5)}$	$\varkappa_{67}$		
						$\delta_{77}^{(6)}$	$\delta_{70}^{(6)}$			

Die Berechnung von X_7 und die Rekursion sind daher für eine ausgezeichnete Belastung ebenso wie bei dem fünfgliedrigen Ansatz (419ff.) zu behandeln. Dasselbe gilt für die konjugierte Matrix. Rückwärtselimination führt zu einem ähnlichen Ergebnis.

Helmert, R.: Die Ausgleichsrechnung, 2. Aufl. Leipzig 1907. — Hertwig, A.: Die Auflösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Müller-Breslau-Festschrift 1912 S. 37. — Ostenfeld, A.: Rechnerische Auflösung von fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1913

S. 120. — Frandsen, P.: Rechnerische Auflösung von Clapeyronschen Gleichungen. Eisenbau 1913 S. 440. — Lewe, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach dem Verfahren des Zahlenrechtecks. Borna 1915. — Pirlet, J.: Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1916 S. 139. — Lewe, V.: Die mathematisch-rechnerische Auflösung der allgemeinen sowie der drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 175. — Hertwig, A.: Einige besondere Klassen linearer Gleichungen und ihre Auflösung in der Statik der durchlaufenden Träger und der Rahmengebilde. Eisenbau 1917 S. 69. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 111 u. 299. — Derselbe: Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Derselbe: Statik der Baukonstr. Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922; II. Abt. 2. Aufl. Leipzig 1925. — Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1, 7. Aufl. Stuttgart 1920. — Domke, O.: Dachbauten, Handbuch für Eisenbetonbau Bd. 10, 2. Aufl. Berlin 1923. — Bornemann: Rechenvorschrift zur Auflösung symmetrischer Elastizitätsgleichungen. Bautechn. 1926 S. 455. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Mehmke, R.: Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1930 S. 508. — Worch, G.: Über die zweckmäßigste Art lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 175.

30. Auflösung der Gleichungen durch Iteration.

Die Brauchbarkeit der Wurzeln X_h, β_{hk} einer größeren Anzahl von linearen Gleichungen scheitert nicht selten an der Fehlerempfindlichkeit der Zahlenrechnung. Der Ansatz wird durch die Wurzeln nicht mehr identisch erfüllt. Um nun die Auflösung nicht mit einer größeren Anzahl von Stellen von Anfang an zu wiederholen, kann das Ergebnis als Näherung angesehen und durch Iteration verbessert werden. Dieselbe Rechnung ist unter Umständen auch bei nachträglichen Änderungen der Vorzahlen δ_{ik} nützlich. Diese können von Änderungen der Form und der Querschnittsverhältnisse des Stabzugs herrühren. Sie können sich auch durch die nachträgliche Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente und aus der Verschiebung einzelner Stabknoten ergeben haben, wenn zur Vereinfachung der Rechnung zunächst geometrische Bindungen angenommen worden sind (S. 301). Das Ergebnis der Elimination mit den angenäherten Vorzahlen wird dann als erste Näherung für den verbesserten Ansatz δ_{ik}, δ_{i0} verwendet. Auf diese Weise lassen sich unter Umständen auch Systeme mit verschiedenen Abmessungen trotz hochgradiger statischer Unbestimmtheit leicht in bezug auf ihre wirtschaftlichen Eigenschaften vergleichen.

Die Näherungsfolgen können naturgemäß auch aus beliebigen Annahmen $X_{k,0}$ für die überzähligen Schnittkräfte entwickelt werden, wenn die Konvergenz einer Iteration feststeht. Hierbei spielt die Fehlerempfindlichkeit für die endgültige Lösung keine Rolle, da selbst Rechenfehler ausgeglichen werden. Die vorgeschriebene Genauigkeit der Lösung läßt sich jedoch in diesem Falle nur durch unnötig viele Näherungsfolgen erkaufen.

Die Rechenvorschrift. In der Regel wird die schrittweise Auflösung eines linearen Ansatzes (293) von der Form

$$\sum \delta_{kh} X_h - \delta_{k0} = 0, \qquad k, h = 1 \ldots n; \quad \delta_{kh} = \delta_{hk} \tag{424}$$

durch eine Näherungsfolge eingeleitet, bei der die unbekannte Schnittkraft X_k in der Hauptdiagonale der Matrix als Funktion der übrigen Glieder angegeben wird. Diese werden zunächst mit $X_{h,0}$ geschätzt.

$$X_{k,1} = -\frac{1}{\delta_{kk}} \left(\overline{\sum_h} \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{k0} \right); \qquad \left. \begin{array}{c} h = 1 \ldots (k-1), (k+1) \ldots n \\ k = 1 \ldots n. \end{array} \right\} \tag{425}$$

Die $\overline{\sum_h}$ enthält dabei nur diejenigen Glieder der Zeile k, deren Indizes h von k verschieden sind ($h \neq k$). Der Ansatz konvergiert, wenn die Diagonalglieder in der Matrix der Vorzahlen groß gegenüber den Nebengliedern sind oder genauer, wenn