UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Visual Library

Die Lösung des Ansatzes kann auch bei einer beliebigen Anzahl von Belastungsgliedern nach deren Aufteilung in Gruppen zu zweien verwendet werden. Das endgültige Ergebnis entsteht durch Superposition der Teilergebnisse.

Durchgehender Träger zur Abstützung eines Ausziehgleises:

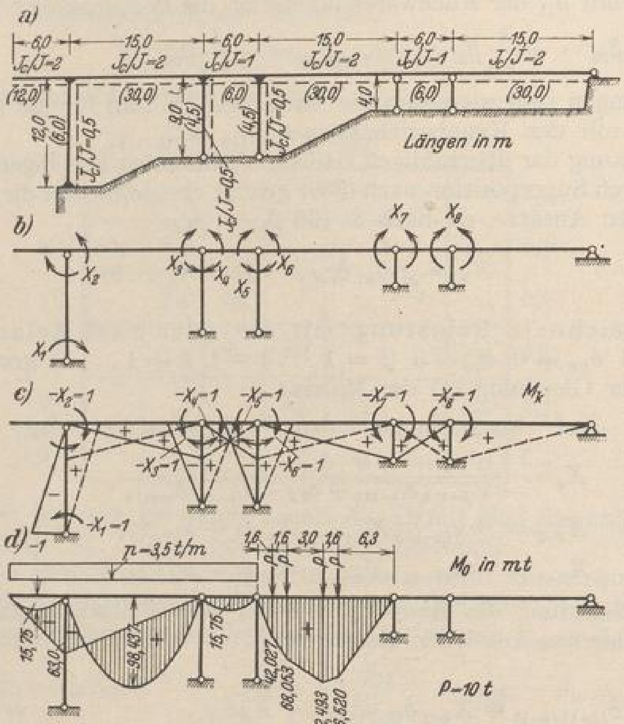

Abb. 219.

1. Geometrische Grundlagen. Abmessungen, Verhältniszahlen J_c/J, reduzierte Längen l'_h (Abb. 219a).
2. Belastung. Lastenzug nach Abb. 219d.
3. Hauptsystem. Die Reihe der Balkenträger nach Abb. 219b, Momente M_k aus $-X_k = 1$ (Abb. 219c); Momente M_0 aus der Belastung (Abb. 219d).
4. Matrix der Bedingungsgleichungen.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	(δ_{k0})
(1)	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	− 1,0	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	+ 5,0	11,5	− 1,5	—	—	—	—	669,37
(4)	—	—	− 1,5	3,5	+ 1,0	—	—	—	31,50
(5)	—	—	—	+ 1,0	3,5	− 1,5	—	—	31,50
(6)	—	—	—	—	− 1,5	11,5	+ 5,0	—	905,06
(7)	—	—	—	—	—	+ 5,0	12,0	+ 1,0	800,72
(8)	—	—	—	—	—	—	+ 1,0	12,0	0,00

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

5a) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung von Kettenbrüchen.

α) Vorwärtselimination mit Kettenbruch:

$$\varkappa_{78} \quad \varkappa_{67} \quad \varkappa_{56} \quad \varkappa_{45} \quad \varkappa_{34} \quad \varkappa_{23} \quad \varkappa_{12}$$

$$\beta_{88} = \cfrac{1}{12{,}0 - 1{,}0 \cdot \cfrac{1{,}0}{12{,}0 - 5{,}0 \cdot \cfrac{5{,}0}{11{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 1{,}0 \cdot \cfrac{1{,}0}{3{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 5{,}0 \cdot \cfrac{5{,}0}{12{,}0 + 1{,}0 \cdot \cfrac{-1{,}0}{2{,}0}}}}}}}}$$

$$\delta_{88}^{(7)} \quad \delta_{77}^{(6)} \quad \delta_{66}^{(5)} \quad \delta_{55}^{(4)} \quad \delta_{44}^{(3)} \quad \delta_{33}^{(2)} \quad \delta_{22}^{(1)} \quad \delta_{11}^{(0)}$$

$$\varkappa_{12} = -\frac{1}{2} = -0{,}5\,, \qquad \delta_{11}^{(0)} = 2{,}0\,,$$

$$\varkappa_{23} = \frac{5{,}0}{12{,}0 - 0{,}5} = 0{,}434783\,, \qquad \delta_{22}^{(1)} = 11{,}5\,,$$

$$\varkappa_{34} = \frac{-1{,}5}{11{,}5 - 2{,}173915} = -0{,}160839\,, \qquad \delta_{33}^{(2)} = 9{,}326085\,,$$

$$\varkappa_{45} = \frac{1{,}0}{3{,}5 - 0{,}241259} = 0{,}306867\,, \qquad \delta_{44}^{(3)} = 3{,}258741\,,$$

$$\varkappa_{56} = \frac{-1{,}5}{3{,}5 - 0{,}306867} = -0{,}469758\,, \qquad \delta_{55}^{(4)} = 3{,}193133\,,$$

$$\varkappa_{67} = \frac{5{,}0}{11{,}5 - 0{,}704637} = 0{,}463162\,, \qquad \delta_{66}^{(5)} = 10{,}795363\,,$$

$$\varkappa_{78} = \frac{1{,}0}{12{,}0 - 2{,}315810} = 0{,}103261\,, \qquad \delta_{77}^{(6)} = 9{,}684190\,,$$

$$\beta_{88} = \frac{1{,}0}{12{,}0 - 0{,}103261} = 0{,}084057\,, \qquad \delta_{88}^{(7)} = 11{,}896739\,.$$

β) Rückwärtselimination mit Kettenbruch:

$$\varkappa_{21} \quad \varkappa_{32} \quad \varkappa_{43} \quad \varkappa_{54} \quad \varkappa_{65} \quad \varkappa_{76} \quad \varkappa_{87}$$

$$\beta_{11} = \cfrac{1}{2{,}0 + 1{,}0 \cdot \cfrac{-1{,}0}{12{,}0 - 5{,}0 \cdot \cfrac{5{,}0}{11{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{3{,}5 - 1{,}0 \cdot \cfrac{+1{,}0}{3{,}5 + 1{,}5 \cdot \cfrac{-1{,}5}{11{,}5 - 5{,}0 \cdot \cfrac{+5{,}0}{12{,}0 - 1{,}0 \cdot \cfrac{+1{,}0}{12{,}0}}}}}}}}$$

$$\delta_{11}^{(7)} \quad \delta_{22}^{(6)} \quad \delta_{33}^{(5)} \quad \delta_{44}^{(4)} \quad \delta_{55}^{(3)} \quad \delta_{66}^{(2)} \quad \delta_{77}^{(1)} \quad \delta_{88}^{(0)}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\varkappa_{87} = \frac{1,0}{12,0} = 0,083333\,, \qquad \delta_{88}^{(0)} = 12,00\,,$$

$$\varkappa_{76} = \frac{5,0}{12,0 - 0,083333} = 0,419580\,, \qquad \delta_{77}^{(1)} = 11,916667\,,$$

$$\varkappa_{65} = \frac{-1,5}{11,5 - 2,097900} = -0,159539\,, \qquad \delta_{66}^{(2)} = 9,402100\,,$$

$$\varkappa_{54} = \frac{1,0}{3,5 - 0,239309} = 0,306683\,, \qquad \delta_{55}^{(3)} = 3,260691\,,$$

$$\varkappa_{43} = \frac{-1,5}{3,5 - 0,306683} = -0,469731\,, \qquad \delta_{44}^{(4)} = 3,193317\,,$$

$$\varkappa_{32} = \frac{5,0}{11,5 - 0,704597} = 0,463160\,, \qquad \delta_{33}^{(5)} = 10,795403\,,$$

$$\varkappa_{21} = \frac{-1,0}{12,0 - 2,315800} = -0,103261\,, \qquad \delta_{22}^{(6)} = 9,684200\,,$$

$$\beta_{11} = \frac{1,0}{2,0 - 0,103261} = 0,527221\,, \qquad \delta_{11}^{(7)} = 1,896739\,.$$

γ) Berechnung der Vorzahlen β_{ik} der konjugierten Matrix (S. 243). Entwicklung von $\beta_{k(k+1)}$ aus $\beta_{(k+1)(k+1)}$ durch Rekursion mit den Kennbeziehungen $-\varkappa_{k(k+1)}$; Entwicklung von β_{kk} aus $\beta_{(k+1)k}$ durch Rekursion mit $-1/\varkappa_{(k+1)k}$. Nachprüfung von β_{kk} wegen der Fehlerempfindlichkeit mit dem Ansatz (396)

$$\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)} \qquad \text{(S. 243)}.$$

δ)
$$X_k = \sum_{i=1}^{i=8} \beta_{ki}\,\delta_{i0}\,.$$

$X_1 = +\ 2,48520$; $X_2 = +\ 4,97039$; $X_3 = +\ 59,44205$; $X_4 = +\ 26,04114$;
$X_5 = +\ 29,51865$ $X_6 = +\ 65,23799$; $X_7 = +\ 39,82042$; $X_8 = -\ 3,31856$.

ε) Die Anzahl der Multiplikationen ist durch die Einbeziehung der Belastung in die Elimination kleiner. In diesem Falle wird X_8 nach (390) mit der reduzierten Matrix der Vorwärtselimination bestimmt, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, α) enthalten sind. Die überzähligen Größen X_7 bis X_1 ergeben sich dann durch Rekursion desselben Ansatzes. Das Ergebnis für X_1 kann mit der reduzierten Matrix der Rückwärtselimination nachgeprüft werden, deren Hauptglieder in dem Kettenbruch (5a, β) enthalten sind. Die Belastungsglieder werden in die reduzierte Matrix nach (389) oder (400) eingetragen.

Reduzierte Matrix aus der Vorwärtselimination:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
(1)	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	0,00
(2)	—	11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	354,37
(3)	—	—	9,326085	− 1,5	—	—	—	—	515,30
(4)	—	—	—	3,258741	+ 1,0	—	—	—	114,38
(5)	—	—	—	—	3,193133	− 1,5	—	—	−3,60
(6)	—	—	—	—	—	10,795363	+ 5,0	—	903,37
(7)	—	—	—	—	—	—	9,684190	+ 1,0	382,31
(8)	—	—	—	—	—	—	—	11,896739	−39,48

Die Rekursion beginnt mit $X_8 = \dfrac{-39,48}{11,896739} = -3,31856$ und wird nach der Rechenvorschrift unter 5b, β entwickelt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zahlenrechnung: $\beta_{kk} = 1/\delta_{kk}^{(k-1)} - \beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)}$.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$1/\delta_{kk}^{(k-1)}$	0,500000	0,086957	0,107226	0,306864	0,313172	0,092632	0,103261	0,084057
$-\beta_{k(k+1)}\varkappa_{k(k+1)}$	0,027221	0,021926	0,008763	0,031880	0,025372	0,022344	0,000896	—
β_{kk}	0,527221	0,108883	0,115989	0,338744	0,338544	0,114976	0,104157	0,084057

Konjugierte Matrix.

− 0,103261 — + 0,463160 — − 0,469731 — + 0,306683 — − 0,159539 — + 0,419580 — + 0,083333 →

(1)	0,527221	+ 0,054442	− 0,025215	− 0,011844	+ 0,003633	+ 0,000580	− 0,000243	+ 0,000020
(2)		0,108883	− 0,050430	− 0,023688	+ 0,007265	+ 0,001159	− 0,000486	+ 0,000040
(3)			0,115989	+ 0,054483	− 0,016709	− 0,002666	+ 0,001118	− 0,000093
(4)				0,338744	− 0,103888	− 0,016574	+ 0,006954	− 0,000579
(5)					0,338544	+ 0,054011	− 0,022662	+ 0,001888
(6)						0,114976	− 0,048242	+ 0,004020
(7)							0,104157	− 0,008680
(8)								0,084057
$(\delta_{k0} =)$	0,00	354,37	669,37	31,5	31,5	905,06	800,72	0,00

↑ − 0,500000 | + 0,434783 | − 0,160839 | + 0,306867 | − 0,469758 | + 0,463162 | + 0,103261

Vorwärtselimination nach C. F. Gauß (5b, α):

i		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	$\varkappa_{i(i+1)}$		
	k	1	2	3	4	5	6	7	8		Σ	0
1	δ_{1k}	2,0	− 1,0	—	—	—	—	—	—	− 0,50000	+ 1,0	+ 0,00
2	δ_{2k}	(− 1,0)	12,0	+ 5,0	—	—	—	—	—	—	+ 16,0	354,37
	$-\varkappa_{12}\delta_{1k}$		− 0,5	—	—	—	—	—	—	—	− 0,5	0,00
	$\delta_{2k}^{(1)}$		11,5	+ 5,0	—	—	—	—	—	+ 0,434783	+ 16,5	354,37
3	δ_{3k}		(+ 5,0)	11,5	− 1,5	—	—	—	—	—	+ 15,0	669,37
	$-\varkappa_{23}\delta_{2k}^{(1)}$			− 2,173915	—	—	—	—	—	—	− 7,17392	− 154,07
	$\delta_{3k}^{(2)}$			9,326085	− 1,5	—	—	—	—	− 0,160839	7,82608	515,30
4	δ_{4k}			(− 1,5)	3,5	+ 1,0	—	—	—	—	3,0	31,50
	$-\varkappa_{34}\delta_{3k}^{(2)}$				− 0,241259	—	—	—	—	—	1,25874	82,88
	$\delta_{4k}^{(3)}$				3,258741	+ 1,0	—	—	—	+ 0,306867	4,25874	114,38
5	δ_{5k}				(+ 1,0)	3,5	− 1,5	—	—	—	3,0	31,50
	$-\varkappa_{45}\delta_{4k}^{(3)}$					− 0,306867	—	—	—	—	− 1,30687	− 35,10
	$\delta_{5k}^{(4)}$					3,193133	− 1,5	—	—	− 0,469758	1,69313	− 3,60
6	δ_{6k}					(− 1,5)	11,5	+ 5,0	—	—	+ 15,0	905,06
	$-\varkappa_{56}\delta_{5k}^{(4)}$						− 0,704637	—	—	—	0,79536	− 1,69
	$\delta_{6k}^{(5)}$						10,795363	+ 5,0	—	+ 0,463162	15,79536	903,37
7	δ_{7k}						(+ 5,0)	12,0	+ 1,0	—	18,0	800,72
	$-\varkappa_{67}\delta_{6k}^{(5)}$							− 2,315810	—	—	− 7,31581	− 418,41
	$\delta_{7k}^{(6)}$							9,684190	+ 1,0	+ 0,103261	10,68419	382,31
8	δ_{8k}							(+ 1,0)	12,0	—	13,0	0,00
	$-\varkappa_{78}\delta_{7k}^{(6)}$								− 0,103261	—	− 1,10326	− 39,48
	$\delta_{8k}^{(7)}$								11,896739	—	11,89674	− 39,48

5b) Auflösung des Ansatzes unter Verwendung des abgekürzten Algorithmus nach C. F. Gauß.

Die Berechnung der Kennbeziehungen und der Hauptglieder der reduzierten Matrix ist übersichtlicher.

α) Vorwärtselimination nach S. 244.
Die Vorzahlen β_{ik} werden nach 5a, γ bestimmt.

β) Rekursion mit Rechenprobe auf gleicher Seite:

Rechenprobe: $\sum X_k \delta_{k0}^{(0)} = \sum X_k^{(k)} \cdot \delta_{k0}^{(k-1)}$,
(vgl. S. 295) 134229,5 ≈ 134229,7.

Rekursion mit Rechenprobe (5b, β):

k	8	7	6	5	4	3	2	1
$-X_{k+1}\varkappa_{k(k+1)}$	—	+ 0,34268	− 18,44331	+ 30,64607	− 9,05830	+ 4,18843	− 25,84439	+ 2,48520
$X_k^{(k)} = \delta_{k0}^{(k-1)}/\delta_{kk}^{(k-1)}$	− 3,31856	+ 39,47774	+ 83,68130	− 1,12742	+ 35,09944	+ 55,25362	+ 30,81478	0,00
$\Sigma_{k0} = X_k$	− 3,31856	+ 39,82042	+ 65,23799	+ 29,51865	+ 26,04114	+ 59,44205	+ 4,97039	+ 2,48520
$X_k \delta_{k0}^{(0)}$	0,00	31885,0	59044,3	929,8	820,3	39788,7	1761,4	0,00
$X_k^{(k)} \delta_{k0}^{(k-1)}$	131,0	15092,7	75595,2	4,1	4014,7	28472,2	10919,8	0,00
k	8	7	6	5	4	3	2	1

6. Die Schnittkräfte des Tragwerks.

Die Schnittkräfte werden nach (288) berechnet. Biegungsmomente M im vorgelegten Tragwerk für die Belastung 2 (Abb. 220).

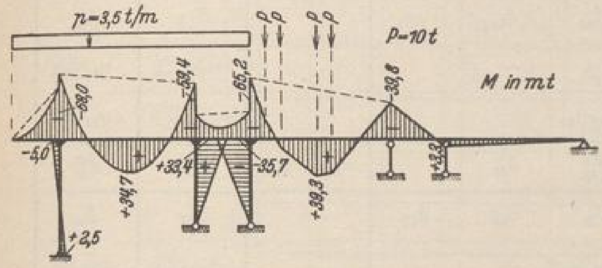

Abb. 220.

Auflösung fünf- und siebengliedriger Ansätze. Die einfache und übersichtliche Lösung eines dreigliedrigen Gleichungssatzes ist durch die unabhängige Kennbeziehung zwischen zwei aufeinanderfolgenden überzähligen Größen begründet und darf daher bei fünfgliedrigen Gleichungen nicht mehr erwartet werden. Die Untersuchung wird an einem Beispiel mit 7 überzähligen Größen $X_1 \ldots X_7$ gezeigt. Der regelmäßige Ansatz lautet:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & \\
\hline
\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & & & & & \delta_{10} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & & & & \delta_{20} \\
\delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & & & \delta_{30} \\
 & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} & & \delta_{40} \\
 & & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} & \delta_{57} & \delta_{50} \\
 & & & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} & \delta_{67} & \delta_{60} \\
 & & & & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} & \delta_{70}
\end{array} \qquad (418)$$