



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Statik im Stahlbetonbau**

**Beyer, Kurt**

**Berlin [u.a.], 1956**

30. Auflösung der Gleichungen durch Iteration

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

S. 120. — Frandsen, P.: Rechnerische Auflösung von Clapeyronschen Gleichungen. Eisenbau 1913 S. 440. — Lewe, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach dem Verfahren des Zahlenrechtecks. Borna 1915. — Pirlet, J.: Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1916 S. 139. — Lewe, V.: Die mathematisch-rechnerische Auflösung der allgemeinen sowie der drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 175. — Hertwig, A.: Einige besondere Klassen linearer Gleichungen und ihre Auflösung in der Statik der durchlaufenden Träger und der Rahmengebilde. Eisenbau 1917 S. 69. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 111 u. 299. — Derselbe: Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Derselbe: Statik der Baukonstr. Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922; II. Abt. 2. Aufl. Leipzig 1925. — Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1, 7. Aufl. Stuttgart 1920. — Domke, O.: Dachbauten, Handbuch für Eisenbetonbau Bd. 10, 2. Aufl. Berlin 1923. — Bornemann: Rechenvorschrift zur Auflösung symmetrischer Elastizitätsgleichungen. Bautechn. 1926 S. 455. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegegesteiften Stab- und Flächentragwerke. I. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Mehmke, R.: Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1930 S. 508. — Worch, G.: Über die zweckmäßigste Art lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 175.

### 30. Auflösung der Gleichungen durch Iteration.

Die Brauchbarkeit der Wurzeln  $X_h, \beta_{hk}$  einer größeren Anzahl von linearen Gleichungen scheidet nicht selten an der Fehlerempfindlichkeit der Zahlenrechnung. Der Ansatz wird durch die Wurzeln nicht mehr identisch erfüllt. Um nun die Auflösung nicht mit einer größeren Anzahl von Stellen von Anfang an zu wiederholen, kann das Ergebnis als Näherung angesehen und durch Iteration verbessert werden. Dieselbe Rechnung ist unter Umständen auch bei nachträglichen Änderungen der Vorzahlen  $\delta_{ik}$  nützlich. Diese können von Änderungen der Form und der Querschnittsverhältnisse des Stabzugs herrühren. Sie können sich auch durch die nachträgliche Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente und aus der Verschiebung einzelner Stabknoten ergeben haben, wenn zur Vereinfachung der Rechnung zunächst geometrische Bindungen angenommen worden sind (S. 301). Das Ergebnis der Elimination mit den angenäherten Vorzahlen wird dann als erste Näherung für den verbesserten Ansatz  $\delta_{ik}, \delta_{i0}$  verwendet. Auf diese Weise lassen sich unter Umständen auch Systeme mit verschiedenen Abmessungen trotz hochgradiger statischer Unbestimmtheit leicht in bezug auf ihre wirtschaftlichen Eigenschaften vergleichen.

Die Näherungsfolgen können naturgemäß auch aus beliebigen Annahmen  $X_{k,0}$  für die überzähligen Schnittkräfte entwickelt werden, wenn die Konvergenz einer Iteration feststeht. Hierbei spielt die Fehlerempfindlichkeit für die endgültige Lösung keine Rolle, da selbst Rechenfehler ausgeglichen werden. Die vorgeschriebene Genauigkeit der Lösung läßt sich jedoch in diesem Falle nur durch unnötig viele Näherungsfolgen erkaufen.

**Die Rechenvorschrift.** In der Regel wird die schrittweise Auflösung eines linearen Ansatzes (293) von der Form

$$\sum \delta_{kh} X_h - \delta_{k0} = 0, \quad k, h = 1 \dots n; \quad \delta_{kh} = \delta_{hk} \quad (424)$$

durch eine Näherungsfolge eingeleitet, bei der die unbekannte Schnittkraft  $X_k$  in der Hauptdiagonale der Matrix als Funktion der übrigen Glieder angegeben wird. Diese werden zunächst mit  $X_{h,0}$  geschätzt.

$$X_{k,1} = -\frac{1}{\delta_{kk}} \left( \sum_h \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{k0} \right); \quad \left. \begin{array}{l} h = 1 \dots (k-1), (k+1) \dots n \\ k = 1 \dots n \end{array} \right\} \quad (425)$$

Die  $\sum_h$  enthält dabei nur diejenigen Glieder der Zeile  $k$ , deren Indizes  $h$  von  $k$  verschieden sind ( $h \neq k$ ). Der Ansatz konvergiert, wenn die Diagonalglieder in der Matrix der Vorzahlen groß gegenüber den Nebengliedern sind oder genauer, wenn



jede der  $n$  Summen aus den Beträgen der  $(n-1)$  Nebenglieder  $\delta_{ki}$  einer Zeile der Matrix dividiert durch die Vorzahl  $\delta_{kk}$  in der Diagonale  $< 1$  ist. In der zweiten Näherungsfolge treten die Werte  $X_{h,1}$  an die Stelle von  $X_{h,0}$ . Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis  $X_{k,v} \approx X_{k,(v+1)} = X_k$ .

Um jedoch in jedem Falle eine Konvergenz der Iteration zu erreichen und außerdem die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen zu vermindern, wird die Iteration in Einzelschritten durchgeführt. Hierbei werden die Ergebnisse  $X_{1,v}, \dots, X_{m,v}$  einer Näherungsfolge  $v$  bereits im Ansatz für  $X_{(m+1),v}$  derselben Näherungsfolge verwendet. Die unbekanntenen Schnittkräfte  $X_{2,0} \dots X_{n,0}$  der ersten Näherungsfolge werden angenommen. Dabei wird dann

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_{1,1} &= \delta_{10} - \sum_{h=2}^n \delta_{1h} X_{h,0}, & \delta_{22} X_{2,1} &= \delta_{20} - \delta_{21} X_{1,1} - \sum_{h=3}^n \delta_{2h} X_{h,0}, \\ \delta_{kk} X_{k,1} &= \delta_{k0} - \left( \sum_{h=1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} + \sum_{h=k+1}^n \delta_{kh} X_{h,0} \right), \\ \delta_{nn} X_{n,1} &= \delta_{n0} - \sum_{h=1}^{n-1} \delta_{nh} X_{h,1}. \end{aligned} \right\} (426)$$

Die zweite Näherungsfolge beginnt mit  $\delta_{11} X_{1,2} = \delta_{10} - \sum_{h=2}^n \delta_{1h} X_{h,1}$  usw. Die Rechnung wird fortgesetzt, bis  $X_{k,v} \approx X_{k,(v+1)}$  erhalten wird.

**Konvergenzbeweis.** Jede Gleichung (424) ist nach (314) eine partielle Ableitung der Formänderungsarbeit  $A_i$  oder einer der ihr verwandten Funktionen  $A_i^*$  oder  $A_i^{**}$ , die allgemein mit  $\bar{A}_i$  bezeichnet werden. Die Formänderungsarbeit setzt sich aus dem statisch bestimmten Anteil  $\bar{A}_{i,0}$  und dem Anteil aus den überzähligen Kräften  $X_k$  zusammen:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i,0} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_h \delta_{kh} X_h X_k - \sum \delta_{k0} X_k. \quad (427)$$

Sie wird zum Minimum, wenn die Spannungen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind. Diese Minimalbedingung begründet die Konvergenz der Iteration, da z. B.  $X_{k,1}$  so bestimmt wird, daß die Minimalbedingung

$$-\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial X_k} = \delta_{k0} - \sum_{h=1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} - \sum_{h=k+1}^n \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{kk} X_{k,1} = 0 \quad (428)$$

mit dem verbesserten Werte  $X_{k,1}$  erfüllt ist.  $X_{k,1}$  ist daher ein besserer Wert im Vergleich zu  $X_{k,0}$ , so daß die Näherungsfolge in jedem Falle konvergiert. Die Rechnung wird um so schneller abgeschlossen, je größer die Vorzahlen in der Diagonale der Matrix gegenüber den Nebengliedern sind, d. h. je schneller jede Zeile  $k$  nach beiden Seiten abklingt.

Die Annahmen für die  $X_{k,0}$  der ersten Näherungsfolge stützen sich am besten auf Ergebnisse aus der Untersuchung geeigneter Teilsysteme. Dabei liegt es am nächsten, die Nebenglieder jeder Gleichung in der ersten Näherungsfolge Null zu setzen und damit die  $X_{k,1}$  aus einfach statisch unbestimmten Systemen veränderlicher Gliederung zu berechnen. In anderen Fällen sind oft Gruppen von zwei und drei statisch unbestimmten Schnittkräften vorhanden, deren gegenseitige Abhängigkeit im Vergleich zu anderen statisch unbestimmten Schnittkräften größer ist. Das vorgelegte Stabwerk wird dann zunächst in Teilsysteme zerlegt, deren überzählige Schnittkräfte leicht berechnet werden und für die erste Näherungsfolge als Grundlage dienen. Oft kann auch bei der Iteration von den Ergebnissen mit drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen ausgegangen werden. Diese Annahmen sind für die Genauigkeit des Ergebnisses unwesentlich, dagegen für den Umfang der Rechnung, also durch die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen von Bedeutung.



**Umformung des Ansatzes.** Ist die konjugierte Matrix einer Näherungsrechnung mit den Zahlen  $\beta_{1k} \dots \beta_{nk}$  ( $k = 1 \dots n$ ) bekannt, so kann jede Gleichung eines in bezug auf Systemgestaltung oder Rechengenauigkeit endgültigen Ansatzes mit diesen Vorzahlen erweitert werden, so daß durch Addition  $n$  Gleichungen von der folgenden Form entstehen:

$$k: \quad X_1 \sum_{h=1}^n (\delta_{h1} \beta_{hk}) + X_2 \sum_{h=1}^n (\delta_{h2} \beta_{hk}) + \dots + X_k \sum_{h=1}^n (\delta_{hk} \beta_{hk}) + \dots + X_n \sum_{h=1}^n (\delta_{hn} \beta_{hk}) \\ = \sum_{h=1}^n (\delta_{h0} \beta_{hk}); \quad k = 1 \dots n. \quad (429)$$

Abgekürzte Schreibweise:

$$\lambda_{1,k} X_1 + \lambda_{2,k} X_2 + \dots + \lambda_{k,k} X_k + \dots + \lambda_{n,k} X_n = \lambda_{k,0}.$$

Da die Vorzahlen  $\beta_{hk}$  die Gleichungen des endgültigen Ansatzes nahezu erfüllen, so ist nach S. 223

$$\lambda_{1,k} = \sum_{h=1}^n \delta_{h1} \beta_{hk} \approx 0; \quad \lambda_{k,k} = \sum_{h=1}^n \delta_{hk} \beta_{hk} \approx 1; \quad \lambda_{n,k} = \sum_{h=1}^n \delta_{hn} \beta_{hk} \approx 0 \quad (430)$$

und damit diejenige Form eines linearen Ansatzes vorhanden, die bei der Iteration bereits mit zwei oder drei Näherungsfolgen ein genaues Ergebnis verbürgt. Die Matrix der Vorzahlen  $\lambda_{i,k}$  ist jedoch, wie leicht einzusehen ist, nicht mehr zur Hauptdiagonale symmetrisch ( $\lambda_{i,k} \neq \lambda_{k,i}$ ). Dies ist nur der Fall, wenn die Matrix der Vorzahlen  $\delta_{ik}$  zur Nebendiagonale symmetrisch ist.

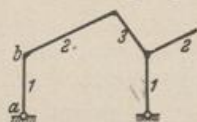


Abb. 221.

$J_e J_{1,a} = 3,44$ ,  $J_e J_{1,b} = 0,6762$ ,  
 $J_e J_1 = 1$ , vgl. Tabelle 11,  
 $J_e J_2 = 0,6762$ ,  $\zeta_2 = 1$ ,  
 $J_e J_3 = 0,8784$ ,  $\zeta_3 = 1$ .

Die Iteration in Einzelschritten wird zur Untersuchung des Sagedachbinders Abb. 215 verwendet, dessen Schnittkräfte für Eigengewicht auf S. 224 f. ermittelt, dessen Stabquerschnitte jedoch nach einer wiederholten Querschnittsbemessung nach Abb. 221

festgestellt worden sind. Auf diese Weise entsteht die folgende neue Matrix der Elastizitätsgleichungen für Eigengewicht:

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\delta_{k0}$
+ 7,6396	- 1,0321	+ 1,7063	- 4,3599	0	- 122,8500
- 1,0321	+ 14,3589	+ 1,7063	- 6,3599	0	+ 49,2637
+ 1,7063	+ 1,7063	+ 7,6396	- 1,0321	+ 6,0662	- 122,8500
- 4,3599	- 6,3599	- 1,0321	+ 14,3589	+ 8,0662	+ 49,2637
0	0	+ 6,0662	+ 8,0662	+ 24,0627	- 172,1137

Die Ausgangswerte  $X_{k,0}$  der Iteration sind die Ergebnisse auf S. 229. Nach der ersten Gleichung ergibt sich mit  $X_{2,0}$ ,  $X_{3,0}$ ,  $X_{4,0}$  und  $X_{5,0}$  der Wert  $X_{1,1} = -9,716$ . Ebenso wird  $X_{2,1} = +6,564$  aus der zweiten Gleichung mit  $X_{1,1}$ ,  $X_{3,0}$ ,  $X_{4,0}$  und  $X_{5,0}$ ,  $X_{3,1} = -9,304$  aus der dritten Gleichung mit  $X_{1,1}$ ,  $X_{2,1}$ ,  $X_{4,0}$  und  $X_{5,0}$  gefunden.

Die Produktsummen werden bei Verwendung der Rechenmaschine ohne Zwischenablesung gebildet und durch  $\delta_{kk}$  dividiert, so daß nur die Teilergebnisse der Näherungsfolgen aufgeschrieben werden. Um die wiederholte Division zu vermeiden, empfiehlt es sich, die Gleichungen (424) vor Beginn der Rechnung auf  $\delta_{kk} = 1$  umzuformen.

Die Konvergenz der Iteration ist nach den Ergebnissen der 7. und 8. Zeile schlecht. Sie zeigt jedoch gewisse Gesetzmäßigkeiten, mit denen sich zugeordnete Glieder der Näherungsfolgen dem Endwert nähern. Diese dienen dazu, um einzelne Zeilen zu überspringen und damit die Iteration abzukürzen.

Da die konjugierte Matrix der Vorzahlen  $\beta_{ik}$  des Beispiels für das ursprüngliche Gleichungs-



	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
Ausgangswerte .	- 9,174	+ 6,011	- 8,776	+ 6,295	- 6,577
1. Iteration . .	- 9,716	+ 6,564	- 9,304	+ 6,414	- 6,957
2. „ . .	- 9,455	+ 6,698	- 9,074	+ 6,783	- 7,139
3. „ . .	- 9,278	+ 6,847	- 8,953	+ 7,013	- 7,247
7. „ . .	- 8,988	+ 7,070	- 8,806	+ 7,346	- 7,395
8. „ . .	- 8,966	+ 7,087	- 8,797	+ 7,369	- 7,405
12. „ . .	- 8,932	+ 7,113	- 8,786	+ 7,402	- 7,419
13. „ . .	- 8,933	+ 7,111	- 8,783	+ 7,404	- 7,420
14. „ . .	- 8,933	+ 7,112	- 8,782	+ 7,406	- 7,421

system bekannt ist, empfiehlt sich die Umformung der Gleichungen nach (429). Man erhält aus der endgültigen  $\delta_{ik}$ -Matrix von S. 250 und der genäherten  $\beta_{ik}$ -Matrix von S. 229 die Beiwerte  $\lambda_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n} \delta_{hk} \beta_{hi}$  und damit das Gleichungssystem

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$\lambda_{k,0}$
+ 1,46665	+ 0,05433	+ 0,04677	- 0,20281	- 0,01861	- 14,48724
- 0,00265	+ 1,40908	+ 0,03189	- 0,05369	+ 0,00081	+ 9,36405
- 0,00282	+ 0,05195	+ 1,47250	+ 0,05997	+ 0,23421	- 13,82785
- 0,06079	+ 0,05020	+ 0,03926	+ 1,30460	+ 0,06022	+ 9,77407
+ 0,02084	- 0,02795	+ 0,02120	+ 0,02214	+ 1,32910	- 10,27286

Die Iteration wird für diesen Ansatz mit den gleichen Näherungswerten  $X_{k,0}$  (S. 229) begonnen und in Einzelschritten durchgeführt. Sie konvergiert schnell:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
Ausgangswerte.	- 9,174	+ 6,011	- 8,776	+ 6,295	- 6,577
1. Iteration . .	- 9,033	+ 7,070	- 8,868	+ 7,170	- 7,417
2. „ . .	- 8,960	+ 7,107	- 8,771	+ 7,407	- 7,423
3. „ . .	- 8,931	+ 7,114	- 8,780	+ 7,409	- 7,423
4. „ . .	- 8,931	+ 7,114	- 8,780	+ 7,409	- 7,423

Runge, C.: Praxis der Gleichungen. Leipzig 1921. — Mises, R. v., u. H. Pollaczek-Geiringer: Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Z. angew. Math. Mech. 1929 S. 58, 152. — Domke, O.: Dachbauten. Handb. f. Eisenbetonbau Bd. 10. 2. Aufl. Berlin 1923.