Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Rechenvorschrift

S. 120. — Frandsen, P.: Rechnerische Auflösung von Clapeyronschen Gleichungen. Eisenbau 1913 S. 440. — Lewe, V.: Die Berechnung durchlaufender Träger und mehrstieliger Rahmen nach dem Verfahren des Zahlenrechtecks. Borna 1915. — Pirlet, J.: Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eisenbau 1916 S. 139. — Lewe, V.: Die mathematisch-rechnerische Auflösung der allgemeinen sowie der drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 175. — Hertwig, A.: Einige besondere Klassen linearer Gleichungen und ihre Auflösung in der Statik der durchlaufenden Träger und der Rahmengebilde. Eisenbau 1917 S. 69. — Müller-Breslau, H.: Zur Auflösung mehrgliedriger Elastizitätsgleichungen. Eisenbau 1916 S. 111 u. 299. — Derselbe: Anwendung auf mehrfach gestützte Rahmen. Eisenbau 1917 S. 193. — Derselbe: Statik der Baukonstr. Bd. 2, I. Abt. 5. Aufl. Stuttgart 1922; II. Abt. 2. Aufl. Leipzig 1925. — Jordan, W.: Handbuch der Vermessungskunde Bd. 1, 7. Aufl. Stuttgart 1920. — Domke, O.: Dachbauten, Handbuch für Eisenbetonbau Bd. 10, 2. Aufl. Berlin 1923. — Bornemann: Rechenvorschrift zur Auflösung symmetrischer Elastizitätsgleichungen. Bautechn. 1926 S. 455. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke. 1. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927. — Mehmke, R.: Über die zweckmäßigste Art, lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1930 S. 508. — Worch, G.: Über die zweckmäßigste Art lineare Gleichungen aufzulösen. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 175.

30. Auflösung der Gleichungen durch Iteration.

Die Brauchbarkeit der Wurzeln X_h, β_{hk} einer größeren Anzahl von linearen Gleichungen scheitert nicht selten an der Fehlerempfindlichkeit der Zahlenrechnung. Der Ansatz wird durch die Wurzeln nicht mehr identisch erfüllt. Um nun die Auflösung nicht mit einer größeren Anzahl von Stellen von Anfang an zu wiederholen, kann das Ergebnis als Näherung angesehen und durch Iteration verbessert werden. Dieselbe Rechnung ist unter Umständen auch bei nachträglichen Änderungen der Vorzahlen δ_{ik} nützlich. Diese können von Änderungen der Form und der Querschnittsverhältnisse des Stabzugs herrühren. Sie können sich auch durch die nachträgliche Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente und aus der Verschiebung einzelner Stabknoten ergeben haben, wenn zur Vereinfachung der Rechnung zunächst geometrische Bindungen angenommen worden sind (S. 301). Das Ergebnis der Elimination mit den angenäherten Vorzahlen wird dann als erste Näherung für den verbesserten Ansatz δ_{ik}, δ_{i0} verwendet. Auf diese Weise lassen sich unter Umständen auch Systeme mit verschiedenen Abmessungen trotz hochgradiger statischer Unbestimmtheit leicht in bezug auf ihre wirtschaftlichen Eigenschaften vergleichen.

Die Näherungsfolgen können naturgemäß auch aus beliebigen Annahmen $X_{k,0}$ für die überzähligen Schnittkräfte entwickelt werden, wenn die Konvergenz einer Iteration feststeht. Hierbei spielt die Fehlerempfindlichkeit für die endgültige Lösung keine Rolle, da selbst Rechenfehler ausgeglichen werden. Die vorgeschriebene Genauigkeit der Lösung läßt sich jedoch in diesem Falle nur durch unnötig viele Näherungsfolgen erkaufen.

Die Rechenvorschrift. In der Regel wird die schrittweise Auflösung eines linearen Ansatzes (293) von der Form

$$\sum \delta_{kh} X_h - \delta_{k0} = 0, \qquad k, h = 1 \ldots n; \quad \delta_{kh} = \delta_{hk} \tag{424}$$

durch eine Näherungsfolge eingeleitet, bei der die unbekannte Schnittkraft X_k in der Hauptdiagonale der Matrix als Funktion der übrigen Glieder angegeben wird. Diese werden zunächst mit $X_{h,0}$ geschätzt.

$$X_{k,1} = -\frac{1}{\delta_{kk}}\Big(\sum_h^{-} \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{k0}\Big); \qquad \left.\begin{array}{c} h = 1 \ldots (k-1), (k+1) \ldots n \\ k = 1 \ldots n. \end{array}\right\} \tag{425}$$

Die $\overline{\sum_h}$ enthält dabei nur diejenigen Glieder der Zeile k, deren Indizes h von k verschieden sind $(h \neq k)$. Der Ansatz konvergiert, wenn die Diagonalglieder in der Matrix der Vorzahlen groß gegenüber den Nebengliedern sind oder genauer, wenn jede der n Summen aus den Beträgen der $(n-1)$ Nebenglieder δ_{ki} einer Zeile der Matrix dividiert durch die Vorzahl δ_{kk} in der Diagonale < 1 ist. In der zweiten Näherungsfolge treten die Werte $X_{h,1}$ an die Stelle von $X_{h,0}$. Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis $X_{k,\nu} \approx X_{k,(\nu+1)} = X_k$.

Um jedoch in jedem Falle eine Konvergenz der Iteration zu erreichen und außerdem die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen zu vermindern, wird die Iteration in Einzelschritten durchgeführt. Hierbei werden die Ergebnisse $X_{1,\nu}, \ldots, X_{m,\nu}$ einer Näherungsfolge ν bereits im Ansatz für $X_{(m+1),\nu}$ derselben Näherungsfolge verwendet. Die unbekannten Schnittkräfte $X_{2,0} \ldots X_{n,0}$ der ersten Näherungsfolge werden angenommen. Dabei wird dann

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11} X_{1,1} = \delta_{10} - \sum_{h=2}^{n} \delta_{1h} X_{h,0}, \qquad \delta_{22} X_{2,1} = \delta_{20} - \delta_{21} X_{1,1} - \sum_{h=3}^{n} \delta_{2h} X_{h,0}, \\ &\delta_{kk} X_{k,1} = \delta_{k0} - \Big(\sum_{h=1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} + \sum_{h=k+1}^{n} \delta_{kh} X_{h,0}\Big), \\ &\delta_{nn} X_{n,1} = \delta_{n0} - \sum_{h=1}^{n-1} \delta_{nh} X_{h,1}. \end{aligned}\right\} \tag{426}$$

Die zweite Näherungsfolge beginnt mit $\delta_{11} X_{1,2} = \delta_{10} - \sum_{2}^{n} \delta_{1h} X_{h,1}$ usw. Die Rechnung wird fortgesetzt, bis $X_{k,\nu} \approx X_{k,(\nu+1)}$ erhalten wird.

Konvergenzbeweis. Jede Gleichung (424) ist nach (314) eine partielle Ableitung der Formänderungsarbeit A_i oder einer der ihr verwandten Funktionen A_i^* oder A_i^{**}, die allgemein mit $\bar{A}_i$ bezeichnet werden. Die Formänderungsarbeit setzt sich aus dem statisch bestimmten Anteil $\bar{A}_{i,0}$ und dem Anteil aus den überzähligen Kräften X_k zusammen:

$$\bar{A}_i = \bar{A}_{i,0} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_h \delta_{kh} X_h X_k - \sum \delta_{k0} X_k. \tag{427}$$

Sie wird zum Minimum, wenn die Spannungen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind. Diese Minimalbedingung begründet die Konvergenz der Iteration, da z. B. $X_{k,1}$ so bestimmt wird, daß die Minimalbedingung

$$-\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial X_k} = \delta_{k0} - \sum_{1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} - \sum_{k+1}^{n} \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{kk} X_{k,1} = 0 \tag{428}$$

mit dem verbesserten Werte $X_{k,1}$ erfüllt ist. $X_{k,1}$ ist daher ein besserer Wert im Vergleich zu $X_{k,0}$, so daß die Näherungsfolge in jedem Falle konvergiert. Die Rechnung wird um so schneller abgeschlossen, je größer die Vorzahlen in der Diagonale der Matrix gegenüber den Nebengliedern sind, d. h. je schneller jede Zeile k nach beiden Seiten abklingt.

Die Annahmen für die $X_{k,0}$ der ersten Näherungsfolge stützen sich am besten auf Ergebnisse aus der Untersuchung geeigneter Teilsysteme. Dabei liegt es am nächsten, die Nebenglieder jeder Gleichung in der ersten Näherungsfolge Null zu setzen und damit die $X_{k,1}$ aus einfach statisch unbestimmten Systemen veränderlicher Gliederung zu berechnen. In anderen Fällen sind oft Gruppen von zwei und drei statisch unbestimmten Schnittkräften vorhanden, deren gegenseitige Abhängigkeit im Vergleich zu anderen statisch unbestimmten Schnittkräften größer ist. Das vorgelegte Stabwerk wird dann zunächst in Teilsysteme zerlegt, deren überzählige Schnittkräfte leicht berechnet werden und für die erste Näherungsfolge als Grundlage dienen. Oft kann auch bei der Iteration von den Ergebnissen mit drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen ausgegangen werden. Diese Annahmen sind für die Genauigkeit des Ergebnisses unwesentlich, dagegen für den Umfang der Rechnung, also durch die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen von Bedeutung.