Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Konvergenzbeweis

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

jede der n Summen aus den Beträgen der $(n-1)$ Nebenglieder δ_{ki} einer Zeile der Matrix dividiert durch die Vorzahl δ_{kk} in der Diagonale < 1 ist. In der zweiten Näherungsfolge treten die Werte $X_{h,1}$ an die Stelle von $X_{h,0}$. Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis $X_{k,\nu} \approx X_{k,(\nu+1)} = X_k$.

Um jedoch in jedem Falle eine Konvergenz der Iteration zu erreichen und außerdem die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen zu vermindern, wird die Iteration in Einzelschritten durchgeführt. Hierbei werden die Ergebnisse $X_{1,\nu}, \ldots, X_{m,\nu}$ einer Näherungsfolge ν bereits im Ansatz für $X_{(m+1),\nu}$ derselben Näherungsfolge verwendet. Die unbekannten Schnittkräfte $X_{2,0} \ldots X_{n,0}$ der ersten Näherungsfolge werden angenommen. Dabei wird dann

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11} X_{1,1} = \delta_{10} - \sum_{h=2}^{n} \delta_{1h} X_{h,0}, \qquad \delta_{22} X_{2,1} = \delta_{20} - \delta_{21} X_{1,1} - \sum_{h=3}^{n} \delta_{2h} X_{h,0},\\
&\delta_{kk} X_{k,1} = \delta_{k0} - \Bigl(\sum_{h=1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} + \sum_{h=k+1}^{n} \delta_{kh} X_{h,0}\Bigr),\\
&\delta_{nn} X_{n,1} = \delta_{n0} - \sum_{h=1}^{n-1} \delta_{nh} X_{h,1}.
\end{aligned}\right| \tag{426}$$

Die zweite Näherungsfolge beginnt mit $\delta_{11} X_{1,2} = \delta_{10} - \sum_{2}^{n} \delta_{1h} X_{h,1}$ usw. Die Rechnung wird fortgesetzt, bis $X_{k,\nu} \approx X_{k,(\nu+1)}$ erhalten wird.

Konvergenzbeweis. Jede Gleichung (424) ist nach (314) eine partielle Ableitung der Formänderungsarbeit A_i oder einer der ihr verwandten Funktionen A_i^* oder A_i^{**}, die allgemein mit $\overline{A}_i$ bezeichnet werden. Die Formänderungsarbeit setzt sich aus dem statisch bestimmten Anteil $\overline{A}_{i,0}$ und dem Anteil aus den überzähligen Kräften X_k zusammen:

$$\overline{A}_i = \overline{A}_{i,0} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_h \delta_{kh} X_h X_k - \sum \delta_{k0} X_k. \tag{427}$$

Sie wird zum Minimum, wenn die Spannungen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind. Diese Minimalbedingung begründet die Konvergenz der Iteration, da z. B. $X_{k,1}$ so bestimmt wird, daß die Minimalbedingung

$$-\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial X_k} = \delta_{k0} - \sum_{1}^{k-1} \delta_{kh} X_{h,1} - \sum_{k+1}^{n} \delta_{kh} X_{h,0} - \delta_{kk} X_{k,1} = 0 \tag{428}$$

mit dem verbesserten Werte $X_{k,1}$ erfüllt ist. $X_{k,1}$ ist daher ein besserer Wert im Vergleich zu $X_{k,0}$, so daß die Näherungsfolge in jedem Falle konvergiert. Die Rechnung wird um so schneller abgeschlossen, je größer die Vorzahlen in der Diagonale der Matrix gegenüber den Nebengliedern sind, d. h. je schneller jede Zeile k nach beiden Seiten abklingt.

Die Annahmen für die $X_{k,0}$ der ersten Näherungsfolge stützen sich am besten auf Ergebnisse aus der Untersuchung geeigneter Teilsysteme. Dabei liegt es am nächsten, die Nebenglieder jeder Gleichung in der ersten Näherungsfolge Null zu setzen und damit die $X_{k,1}$ aus einfach statisch unbestimmten Systemen veränderlicher Gliederung zu berechnen. In anderen Fällen sind oft Gruppen von zwei und drei statisch unbestimmten Schnittkräften vorhanden, deren gegenseitige Abhängigkeit im Vergleich zu anderen statisch unbestimmten Schnittkräften größer ist. Das vorgelegte Stabwerk wird dann zunächst in Teilsysteme zerlegt, deren überzählige Schnittkräfte leicht berechnet werden und für die erste Näherungsfolge als Grundlage dienen. Oft kann auch bei der Iteration von den Ergebnissen mit drei- und fünfgliedrigen Elastizitätsgleichungen ausgegangen werden. Diese Annahmen sind für die Genauigkeit des Ergebnisses unwesentlich, dagegen für den Umfang der Rechnung, also durch die Anzahl der notwendigen Näherungsfolgen von Bedeutung.