



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

32. Zeichnerische Auflösung der Bedingungsgleichungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Abschn. 25, für Stabwerke mit wenig überzähligen Größen nach Abschn. 26 berechnet. Die Ergebnisse müssen die geometrischen Bedingungen $\delta_k = 0$ identisch erfüllen.

6. Die Belastungszahlen $\delta_{k\otimes}$. Die Belastungszahlen sind Formänderungen des Hauptsystems aus den in 2. angegebenen äußeren Ursachen. Sie werden abgekürzt nach (300) berechnet. Hierzu dienen die Tabellen 12 bis 16. Unter Umständen können die Formänderungen $\delta_{k\otimes}$ auch unmittelbar aus den Tabellen 17 bis 19 entnommen werden. In besonderen Fällen ist die numerische Integration nach Simpson oder die Berechnung mit Stufen konstanter elastischer Wirkung nach (183) notwendig. Die Beträge aus Temperaturänderung werden für jedes Element des Stabzugs konstant angenommen (173), die Verschiebungen δ_{k_s} aus der Stützenbewegung nach (174) berechnet. Die Biegelinien $\delta_{m,k}$ ($k = 1 \dots n$) des Laststabzugs des Hauptsystems zur Bildung der Einflußlinien lassen sich für die Belastungszustände $-X_k = 1$ nach Abschn. 20 und 21, in einfachen Fällen nach den Tabellen 12 bis 16 aufzeichnen.

7. Die überzähligen Stütz- und Schnittkräfte. Die überzähligen Größen X_k werden bei einzelnen Belastungsfällen unmittelbar aus den Belastungsgliedern, bei zahlreichen Belastungsfällen nach (326) berechnet. Dasselbe gilt für die Ableitung der Einflußlinien aus den Biegelinien des Laststabzugs des Hauptsystems nach (328).

8. Stütz- und Schnittkräfte C, N, M, Q des Tragwerks. Die Stütz- und Schnittkräfte des Stabwerks werden aus der vorgeschriebenen Belastung und den ihr zugeordneten überzähligen Stütz- und Schnittkräften X_k mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen graphisch oder numerisch nach Abschn. 13 und 14 berechnet. Die Aufgabe ist nunmehr statisch bestimmt und die Superposition nach (288) der allgemeine Ausdruck für die Lösung. Die Schnittkräfte C_0, N_0, M_0, Q_0 und C_k, N_k, M_k, Q_k des Ansatzes sind aus dem Absatz 3. bekannt.

Die Einflußlinien der Stütz- und Schnittkräfte werden nach derselben Rechenvorschrift durch Überlagerung der Ordinaten der Einflußlinien C_0, N_0, M_0, Q_0 des Hauptsystems mit den durch C_k, N_k, M_k, Q_k erweiterten Ordinaten der Einflußlinien X_k gefunden. Sie muß unter Umständen mit großer Stellenzahl durchgeführt werden, um Lösungsfehler aus Differenzen zu vermeiden (vgl. auch S. 168).

9. Die Nachprüfung des Ergebnisses. Die Randbedingungen der Formänderung des Stabzugs sind durch die Stützung offener Stabzüge oder durch den Zusammenhang geschlossener Stabzüge vorgeschrieben. Sie müssen für das berechnete Spannungsbild erfüllt werden. Dies wird nach S. 168 durch Nachrechnung der gegenseitigen Verschiebung geeigneter Querschnitte geprüft.

32. Zeichnerische Auflösung der Bedingungsgleichungen.

Die umfangreichen Zahlenrechnungen zur Bestimmung der Wurzeln linearer Gleichungen lassen sich zum Teil, in einzelnen Fällen auch vollständig durch graphische Methoden ersetzen. Sie sind stets nützlich, wenn die Lösung mit dem Kräftebild des Tragwerks verbunden werden kann. Dies ist bei den durchgehenden Trägern mit starren und frei oder elastisch drehbaren Stützen, bei durchgehenden Trägern mit elastisch senkbaren Stützen und bei Rahmenträgern der Fall.

Die graphische Auflösung stützt sich entweder auf die geometrischen Beziehungen der Gleichungen oder auf deren mechanische Auslegung. Die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ jeder Zeile k werden dabei als die n Komponenten einer im Ursprung angreifenden Kraft \mathfrak{P}_k angesehen, die nach n Achsen zerlegt worden ist. Sie bilden, nach dem Ansatz (319) mit den unbekanntenen Zahlen $X_1 \dots X_k \dots X_n$ multipliziert, die Komponenten $\delta_{10} \dots \delta_{k0} \dots \delta_{n0}$ der Resultierenden $\sum \mathfrak{P}_k X_k$ nach denselben n Achsen.

Die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ einer jeden Zeile k sind unveränderlich und besitzen damit die wesentliche Eigenschaft der Masse, so daß den n Gleichungen des Ansatzes auch massengeometrische Bedeutung beigelegt werden kann. Darnach werden nach P. Pasternak die Vorzahlen jeder Zeile k als die fiktiven Gewichte einer räumlichen Gruppe von n Punkten A'_k behandelt, deren Abstand von einer Grundrißebene durch die zunächst unbekanntes Strecken X_k vorgeschrieben ist. Die Gleichung k

$$\sum_{h=1}^n \delta_{kh} X_h = \delta_{k0} = T_k \sum_{h=1}^n \delta_{kh} = T_k s_k, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{s_k} \tag{431}$$

bestimmt daher den Abstand T_k des Schwerpunktes E'_k der fiktiven Gewichte δ_{kh} von der Grundrißebene. Die Koordinaten der Grundrißprojektion E_k werden nach bekannten Regeln berechnet, indem die Massen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ der Projektion A_k der Punkte beigelegt werden. Damit ist jeder Bedingungsgleichung k ein ausgezeichneter Punkt E'_k zugeordnet, dessen Lage durch die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kn}$ und die Belastungszahl δ_{k0} bekannt ist. Dieses massengeometrische Bild des Ansatzes enthält, zum Teil ergänzt durch die analytische Auflösung der Gleichungen nach C. F. Gauß, geometrische Beziehungen zwischen den Endpunkten der Ordinaten X_k , die in zwei Ebenen, in einfachen Fällen aber auch in einer Ebene verfolgt werden.

Anwendung auf dreigliedrige Elastizitätsgleichungen.

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= \delta_{10} \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= \delta_{20} \\ \dots &\dots \\ X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} &= \delta_{(k-1)0} \\ X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= \delta_{k0} \\ \dots &\dots \\ X_{n-2} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)} + X_n \delta_{(n-1)n} &= \delta_{(n-1)0} \\ X_{n-1} \delta_{nn} + X_n \delta_{nn} &= \delta_{n0} \end{aligned} \right\} \tag{432}$$

Der Gaußsche Algorithmus liefert nach (388 und 399) bei

Vorwärtselimination (433)	Rückwärtselimination (434)
$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \delta_{10},$	$X_1 \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{10}^{(n-1)},$
$X_2 \delta_{22}^{(1)} + X_3 \delta_{23} = \delta_{20}^{(1)},$	$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}^{(n-2)} = \delta_{20}^{(n-2)},$
\dots	\dots
$X_k \delta_{kk}^{(k-1)} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}^{(k-1)},$	$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk}^{(n-k)} = \delta_{k0}^{(n-k)},$
\dots	\dots
$X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + X_n \delta_{(n-1)n} = \delta_{(n-1)0}^{(n-2)},$	$X_{n-2} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)} = \delta_{(n-1)0}^{(1)},$
$X_n \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{n0}^{(n-1)},$	$X_{n-1} \delta_{nn} + X_n \delta_{nn} = \delta_{n0}.$

Die zeichnerische Darstellung wird hier auf eine Ebene beschränkt. Sie enthält die räumliche Punktgruppe A'_1 bis A'_n , deren Grundriß $A_1 \dots A_n$ auf einer Achse abgebildet ist (Abb. 222). Die Abstände Δ_k zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten A_{k-1}, A_k sind beliebig. Sie können gleichgroß gewählt werden oder zum Teil auch Null sein.

Die Belastungsspalte der Ansätze (433), (434) ist entweder voll oder teilweise besetzt. Die allgemeine Aufgabe kann mit dem Superpositionsgesetz stets auf die Lösung für wenige Belastungszahlen zurückgeführt werden. Der Ansatz zerfällt in diesem

Fälle in drei Abschnitte, von denen der erste und dritte homogen sind. Diese werden daher für $\delta_{n0} = 1$ (Lösung a) und für $\delta_{10} = 1$ (Lösung b) berechnet.

Lösung für den homogenen Ansatz. Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0, \Delta_{k+1} \neq 0$.

Die Lösung a bedient sich der Kennbeziehungen der Vorwärtselimination, indem das Verhältnis $-\kappa_{(k-1)k} = X_{k-1}/X_k$ zweier nach links aufeinanderfolgender Ordinaten als Verhältnis der Strecken $a_{(k-1)k}, b_{(k-1)k}$ dargestellt wird. Der Abstand $\Delta_k = A_{k-1}A_k$ wird dabei durch den Punkt $F_{(k-1)k}$ geteilt. Er fällt nach (433) in die Schwerlinie der den Endpunkten A'_{k-1}, A'_k zugeordneten Massen $\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}$ und $\delta_{(k-1)k}$.

$$\frac{X_{k-1}}{X_k} = -\kappa_{(k-1)k} = -\frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}}; \quad a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k}}{1 + \kappa_{(k-1)k}} \Delta_k, \quad b_{(k-1)k} = \frac{1}{1 + \kappa_{(k-1)k}} \Delta_k. \quad (435)$$

Dasselbe gilt für die Lösung b, bei welcher die Kennbeziehungen der Rückwärtselimination verwendet werden. Das Verhältnis $-\kappa_{k(k-1)} = X_k/X_{k-1}$ zweier nach rechts aufeinanderfolgender Ordinaten wird geometrisch durch die Strecken $a_{k(k-1)}, b_{k(k-1)}$ und den Punkt $F_{k(k-1)}$ ausgedrückt. Dieser liegt nach (434) auf der Schwer-

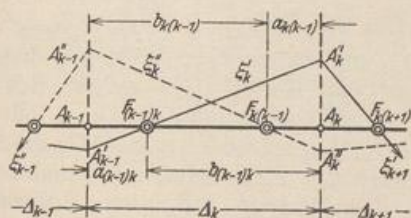


Abb. 222.

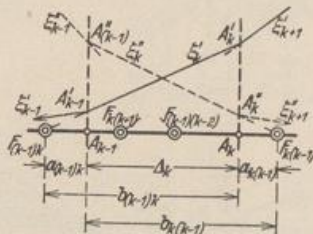


Abb. 223.

linie der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und $\delta_{kk}^{(n-k)}$, welche den Endpunkten A'_{k-1} und A'_k zugeordnet sind (Abb. 222).

$$\frac{X_k}{X_{k-1}} = -\kappa_{k(k-1)} = -\frac{a_{k(k-1)}}{b_{k(k-1)}}; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)}}{1 + \kappa_{k(k-1)}} \Delta_k, \quad b_{k(k-1)} = \frac{1}{1 + \kappa_{k(k-1)}} \Delta_k. \quad (436)$$

Die Punkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ sind unabhängig von den Belastungsgliedern und allein durch die elastische Struktur des Systems bestimmt. Sie werden daher als Festpunkte bezeichnet.

Sind die Verhältniszahlen X_{k-1}/X_k und X_k/X_{k-1} positiv, die Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}$ und $\kappa_{k(k-1)}$ also negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ außerhalb des Intervalls Δ_k (Abb. 223). Die Strecken $a_{(k-1)k}, b_{(k-1)k}$ werden daher im Sinne A_{k-1}, A_k und A_k, A_{k-1} positiv gerechnet. Negative Verhältniszahlen $X_{k-1}/X_k, X_k/X_{k-1}$, also positive Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}, \kappa_{k(k-1)}$ ergeben Festpunkte zwischen A_{k-1} und A_k (Abb. 222). Da der Nenner der Kennbeziehungen

$$\kappa_{(k-1)k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}}, \quad \kappa_{k(k-1)} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{kk}^{(n-k)}} \quad (437)$$

in jedem Falle positiv ist, wird die Lage der beiden Festpunkte zu den Grenzen des Intervalls durch das Vorzeichen der Nebenglieder $\delta_{(k-1)k}$ der Matrix entschieden.

Die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ der Achse werden entweder mit den Strecken $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ eingetragen oder durch geometrische Teilung der Abschnitte Δ_k im Verhältnis

$$\kappa_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)k} / \delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}, \quad \kappa_{k(k-1)} = \delta_{k(k-1)} / \delta_{kk}^{(n-k)} \quad (438)$$

erhalten, wenn die Kennbeziehungen mit den Kettenbrüchen (394) und (404) bestimmt worden sind.

Der Festpunkt $F_{k(k-1)}$ kann jedoch auch mit Hilfe des Festpunktes $F_{(k-1)k}$ und der Gleichung k des Ansatzes geometrisch gefunden werden, wenn die bei jeder zeichnerischen Lösung unvermeidliche Fehlerfortpflanzung in Kauf genommen wird.

Nach Abb. 224a ist die Gerade ξ'_k im homogenen Bereich a durch den Festpunkt $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Sie schneidet sich mit ξ'_{k+1} im Punkte A'_k der Geraden k . Nach der Gleichung k

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = 0 \tag{439}$$

ist der Schwerpunkt E_k der fiktiven Massen $\delta_{k(k-1)}$, δ_{kk} , $\delta_{k(k+1)}$ ein Punkt der Achse ($T_k = 0$). Er liegt auf der Geraden w_k im Abstand e_k vom Punkte A_k .

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} \Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}} \tag{440}$$

Die Gleichung k kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = 0 \tag{441}$$

Hierbei ist $Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) = X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk}$ und daher $Y_{(k-1)k} = \frac{D_k D'_k}{D'_k}$ diejenige Ordinate der Geraden ξ'_k , welche den Abschnitt Δ_k im Verhältnis $\delta_{kk} : \delta_{k(k-1)}$ teilt. Die Gerade $D'_k A'_{k+1}$ schneidet nach (441) die Achse im Punkte E_k . Eine beliebige Annahme $\xi_{k,1}$ liefert das Dreieit mit den Eckpunkten $D'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $A'_{(k+1),1}$ auf drei zueinander parallelen Geraden k , $(k+1)$, w'_k . Da zwei Seiten durch die festen Punkte $F_{(k-1)k}$ und E_k bestimmt sind, ist auch $F_{k(k+1)}$ ein Festpunkt.

Die geometrische Auslegung der Gleichung k wird durch deren Umformung nach

$$Z_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) + Z_{k(k+1)} (\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}) = 0 \tag{442}$$

wesentlich günstiger. Dabei ist die Aufteilung der Vorzahl $\delta_{kk} = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}$ beliebig und richtet sich nach den besonderen Eigenschaften des Ansatzes. Die Ordinate $Z_{(k-1)k} = \overline{B_k B'_k}$ liegt auf der Schwerlinie $w'_{k,1}$ der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{kk,1}$, die Ordinate $Z_{k(k+1)} = \overline{C_k C'_k}$ auf der Schwerlinie $w'_{k,2}$ von $\delta_{kk,2}$ und $\delta_{k(k+1)}$. Die Punkte $B'_{k,1}$, E_k , $C'_{k,1}$ bilden nach (442) wieder eine gerade Linie, so daß ein Dreieit $B'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $C'_{k,1}$ mit den vorgeschriebenen Festpunkten $F_{(k-1)k}$ und E_k entsteht. In derselben Weise kann auch die geometrische Konstruktion des Festpunktes $F_{k(k-1)}$ aus $F_{(k+1)k}$ nach Abb. 224b begründet werden. Die Schwerlinien $w'_{k,1}$, $w'_{k,2}$ sind durch die Strecken c_{kk} , $c_{(k+1)k}$ bestimmt (Abb. 224).

$$c_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k, \quad c_{(k+1)k} = \frac{\delta_{k(k+1)}}{\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}} \Delta_{k+1} \tag{443}$$

Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0, \Delta_{k+1} = 0$.

In einzelnen Fällen werden die Punkte A_k, A_{k+1} zusammgelegt ($\Delta_{k+1} = 0$), um das Bild der geometrischen Lösung in einfacher Weise mit dem Kräftebild des Tragwerks zu verbinden. Die Kennbeziehungen $\varkappa_{k(k+1)}$, $\varkappa_{(k+1)k}$ sind in diesem Falle stets negativ. Dem Punkte (A_k, A_{k+1}) der Achse sind daher zwei Punkte A'_k, A'_{k+1} des Linienzuges ξ'_k, ξ'_{k+2} zugeordnet.

Die beiden Geraden ξ'_k, ξ'_{k+2} schneiden sich im Abstand $u_{k(k+1)}$ von der Ordinate k . Dieser ist im homogenen Bereich der Lösung a durch die Kennbeziehung

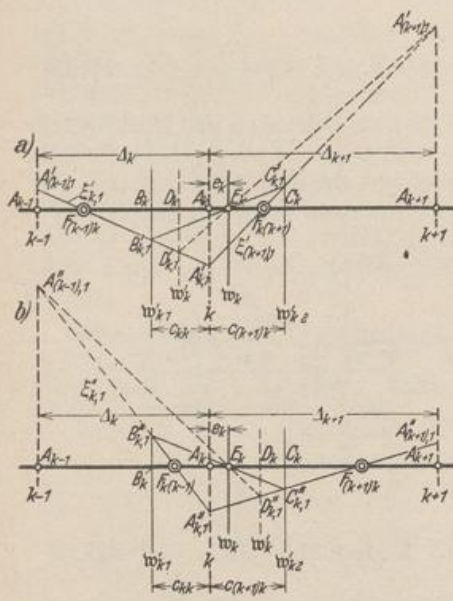


Abb. 224.

$X_k/X_{k+1} = -\kappa_{k(k+1)}$ vorgeschrieben und geometrisch durch $X_{k+1} = 1$, $X_k = -\kappa_{k(k+1)}$ und die als bekannt anzusehenden Festpunkte $F_{(k+1)(k+2)}$, $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Der Abstand $u_{k(k+1)}$ ist im homogenen Bereich a für alle X_{k+1} konstant, der geometrische Ort der Punkte $U_{k(k+1)}$ daher eine zu k parallele Gerade, die Übergangslinie $u_{k(k+1)}$. Ähnliche geometrische Beziehungen gelten für die Lösung b mit $X_{k+1} = -\kappa_{(k+1)k} X_k$. Der Linienzug ξ''_{k-1} , ξ''_{k+1} schneidet sich jetzt auf der Übergangslinie $u_{(k+1)k}$ im Abstand $u_{(k+1)k}$ von k (Abb. 225).

Die Übergangslinien $u_{k(k+1)}$ und die Festpunkte $F_{(k+1)(k+2)}$ lassen sich aus dem Festpunkt $F_{(k-1)k}$ auch geometrisch ableiten, ohne die Kennbeziehungen $\kappa_{k(k+1)}$ usw. zu verwenden. Um dies einzusehen, werden die beiden Gleichungen k und $(k+1)$ umgeformt und addiert.

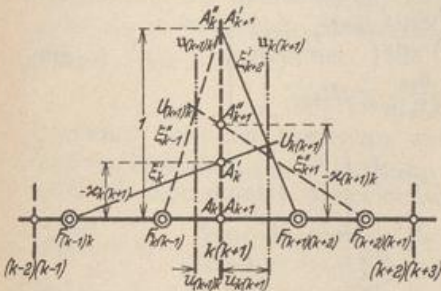


Abb. 225.

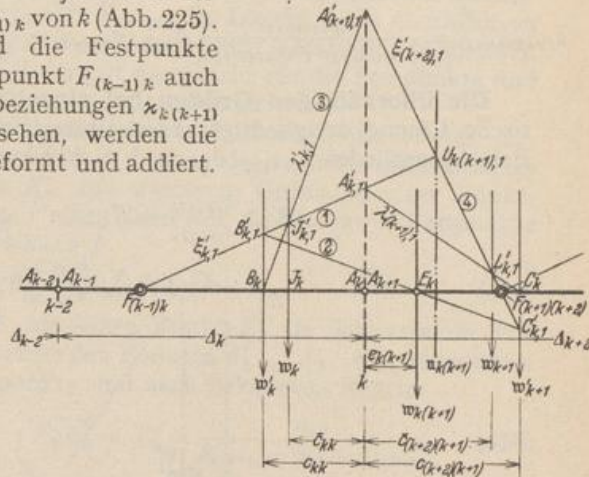


Abb. 226.

$$\begin{aligned}
 X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= 0, \\
 -X_k \delta_{(k+1)k} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} &= 0, \\
 \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)} = \delta_{kk,1}, \quad \delta_{(k+1)(k+1)} - \delta_{k(k+1)} = \delta_{(k+1)(k+1),1}, & \\
 Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} &= 0, \\
 (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) &= 0, \\
 Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{444}$$

Hiernach sind $Y_{k(k-1)} = \overline{B_k B'_k}$ und $Y_{(k+1)(k+2)} = \overline{C_k C'_k}$ Ordinaten der Geraden ξ'_k und ξ'_{k+2} der homogenen Lösung (a), die mit den Schwerlinien w'_k, w'_{k+1} der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k-1)}, \delta_{kk,1}$ und $\delta_{(k+1)(k+2)}, \delta_{(k+1)(k+1),1}$ zusammenfallen. Nach (444) schneiden sich die beiden Geraden ξ'_k, λ'_k der Abb. 226 auf der Schwerlinie w_k der fiktiven Gewichte $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1})$ und $\delta_{k(k+1)}$. Der Punkt E_k ist nach (439) mit $T_k = 0$ ein Punkt der Achse und der Schwerlinie $w_{k(k+1)}$ der fiktiven Gewichte $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1})$ und $(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)})$. Mit einer Annahme $\xi'_{k,1}$ werden die geometrisch voneinander abhängigen Punkte $B'_{k,1}, J'_{k,1}, A'_{k,1}, A'_{(k+1),1}, C'_{k,1}, U_{k(k+1),1}$ gefunden. Sie bestimmen ein Viereck, dessen Ecken auf vier vorgeschriebenen Geraden w'_k, w_k, k, w'_{k+1} liegen, von dem außerdem drei Seiten durch je einen Festpunkt $F_{(k-1)k}, B_k, E_k$ gehen. Daher ist auch $F_{(k+1)(k+2)}$ ein Festpunkt und der geometrische Ort des Schnittpunktes $U_{k(k+1)}$ eine zu k parallele Gerade, die Übergangslinie $u_{k(k+1)}$.

Der Ansatz (444) enthält außerdem die Beziehung

$$(X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+2),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = 0, \tag{445}$$

nach der sich die Geraden ξ'_{k+2} und λ'_{k+1} auf der Schwerlinie w_{k+1} der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k+1)}$ und $(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)})$ schneiden. Dies dient zur Nachprüfung der geometrischen Konstruktion. Die Festpunkte $F_{k(k-1)}$ und die Übergangs-

linien $u_{(k+1)k}$ werden aus den Festpunkten $F_{(k+2)(k+1)}$ ebenso bestimmt. Die Schwerlinien $w'_k, w_k, w'_{k+1}, w_{k+1}$ und $w_{k(k+1)}$ werden mit den Strecken $c_{kk}, \bar{c}_{kk}, c_{(k+2)(k+1)}, \bar{c}_{(k+2)(k+1)}$ und $e_{k(k+1)}$ eingerechnet (Abb. 226).

$$\left. \begin{aligned} c_{kk} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k, \quad \bar{c}_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}} \Delta_k, \quad c_{(k+2)(k+1)} = \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k-1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \Delta_{k+2}, \\ \bar{c}_{(k+2)(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \Delta_{k+2}, \quad e_{k(k+1)} = \frac{\delta_{(k+1)(k+2)} \Delta_{k+2} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \end{aligned} \right\} (446)$$

Die überzähligen Größen bei einzelnen Belastungsgliedern. Die analytische Lösung dreigliedriger Elastizitätsgleichungen für zwei aufeinanderfolgende Belastungsglieder $\delta_{(k-1)0}, \delta_{k0}$ nach S. 239 kann durch den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} X_{k-1} \frac{b_{(k-1)k}}{a_{(k-1)k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = R_{(k-1)k}, \\ X_{k-1} + X_k \frac{b_{k(k-1)}}{a_{k(k-1)}} &= \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = R_{kk} \end{aligned} \right\} (447)$$

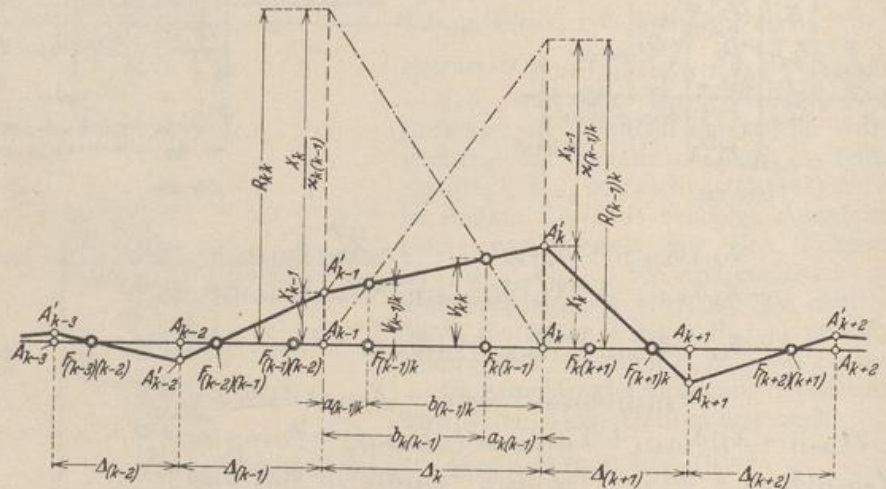


Abb. 227.

ersetzt werden. Er gilt allgemein für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und beweist die geometrische Lösung nach Abb. 227. Die Belastungsglieder erhalten die Dimension der überzähligen Größen X_{k-1}, X_k und sind von diesen unabhängig. Sie

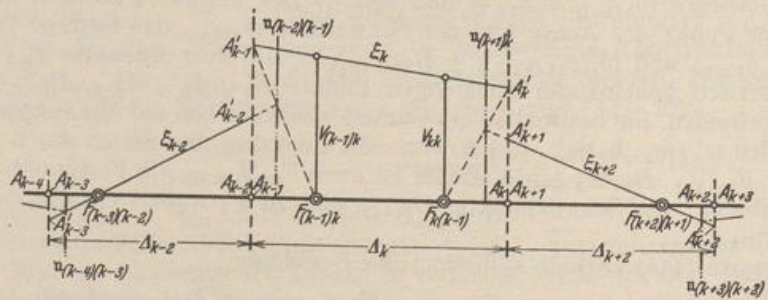


Abb. 228.

werden nach der Art ihrer geometrischen Verwendung als Kreuzlinienabschnitte bezeichnet, jedoch hierfür besser durch die Ordinaten $V_{(k-1)k}, V_{kk}$ in den Festpunkten ersetzt.

$$\left. \begin{aligned} V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{\Delta_k} R_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1 + \varkappa_{(k-1)k}} \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k} + \delta_{(k-1)k}^{(k-1)}} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{s_{(k-1)}^{(k-1)}}, \\ V_{kk} &= \frac{a_{kk}}{\Delta_k} R_{kk} = \frac{\varkappa_{kk}}{1 + \varkappa_{kk}} \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk}} = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{kk} + \delta_{kk}^{(k)}} = \frac{\delta_{k0}}{s_k^{(k)}}. \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

Die überzähligen Größen $X_1 \dots X_{k-2}$ sind bei gleichen Vorzeichen der Nebenglieder einer Gleichung durch die Festpunkte $F_{(h-1)h}$ der Lösung a, die überzähligen Größen $X_{k+1} \dots X_h$ durch die Festpunkte $F_{r(r-1)}$ der Lösung b bestimmt (Abb. 227). Bei ungleichen Vorzeichen der Nebenglieder gilt das gleiche für die Festpunkte und Übergangslinien $F_{(h-1)h}, u_{(h-1)h}$ und $F_{r(r-1)}, u_{r(r-1)}$ (Abb. 228).

Allgemeiner Belastungsfall. Die geometrischen Hilfsmittel des letzten Abschnitts lassen sich auch bei der zeichnerischen Lösung des vollständigen Ansatzes verwenden. Die überzähligen Größen X_k sind wiederum Ordinaten einer Punktreihe A_k in beliebigen Abständen Δ_k . Jedem Intervall Δ_k sind zwei Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k+1)}$ zugeordnet. Jede Gleichung k

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0} \quad (449)$$

bestimmt nach der Auslegung auf S. 256 einen Punkt E'_k als Schwerpunkt von fiktiven Massen $\delta_{k(k-1)}, \delta_{kk}, \delta_{k(k+1)}$, welche den Punkten A'_{k-1}, A'_k, A'_{k+1} zugeordnet sind. Die Koordinaten dieses Schwerpunkts sind nach bekannten Regeln

$$\overline{A_k E'_k} = e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} \Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}, \quad \overline{E'_k E'_k} = T_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}. \quad (450)$$

Ebenso darf in (449)

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} = Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) \quad (451)$$

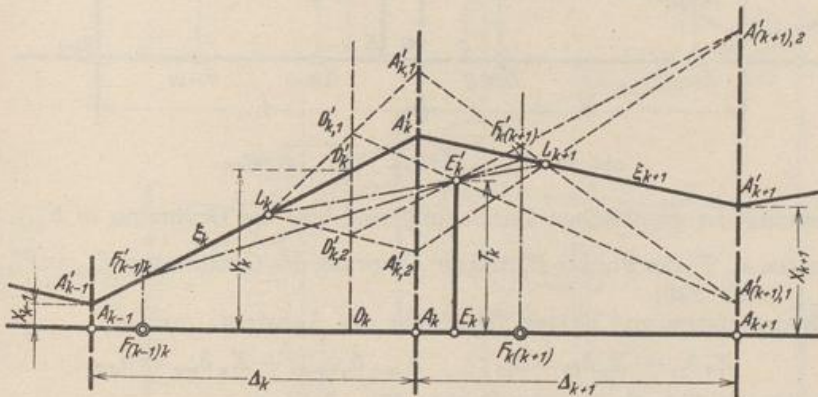


Abb. 229. Zur Ableitung für positive $\varkappa_{k(k+1)}$.

gesetzt und $Y_{k(k-1)}$ als Ordinate des Schwerpunkts der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und δ_{kk} in A'_{k-1}, A'_k angesehen werden. Sie unterteilt den Abschnitt Δ_k in D_k nach dem Verhältnis $\delta_{k(k-1)} : \delta_{kk}$. Aus (449) wird dann

$$Y_{k(k-1)} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0} = T_k (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}). \quad (452)$$

Demnach ist T_k auch Ordinate des Schwerpunkts der fiktiven Massen $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk})$ und $\delta_{k(k+1)}$, so daß die Punkte D'_k, E'_k und A'_{k+1} eine gerade Linie bilden (Abb. 229).

Auf diese Weise entsteht das Dreieit A'_{k-1}, D'_k, A'_{k+1} , dessen Eckpunkte auf einer Schar paralleler Geraden liegen. Ihre Ordinaten sind unbekannt. Allen möglichen Dreiseiten ist jedoch der Punkt E'_k der Seite $D'_k A'_{k+1}$ gemeinsam. Ist außerdem noch ein Punkt L_k der Seite $\xi_k \equiv A'_{k-1} A'_k$ gegeben, so besitzen auch die Seiten $A'_k A'_{k+1}$ dieser Dreiseite einen gemeinsamen Punkt L_{k+1} , da die Punktreihe D'_k

ähnlich zur Punktreihe A'_k (Ähnlichkeitspunkt L_k) und die Punktreihe D'_k ähnlich zur Punktreihe A'_{k+1} ist (Ähnlichkeitspunkt E'_k). Daher ist auch die Punktreihe A'_k ähnlich zur Punktreihe A'_{k+1} . Der Ähnlichkeitspunkt L_{k+1} ist allen möglichen Geraden ξ_{k+1} gemeinsam und liegt nach Konstruktion mit L_k und E'_k auf einer Geraden. Bewegt sich der Punkt L_k auf einer Geraden, so ist die zugeordnete Punktreihe L_{k+1} zu E'_k perspektiv und daher ähnlich zu L_k . Ist die Punktreihe L_k senkrecht zur Achse, so gilt das gleiche von der Punktreihe L_{k+1} .

Dieses geometrische Bild kann für jede Ordinate T_k , also auch für $T_k = 0$ angegeben werden, so daß die Punkte E'_k mit E_k in die Achse fallen. Der Geradenzug $\xi_k \equiv \xi'_k$ oder $\xi_k \equiv \xi''_k$ des homogenen Ansatzes ist dann für jede Lage des Punktes A'_k durch die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k+1)}$ oder $F_{(k+1)k}, F_{k(k-1)}$ bestimmt, je nachdem $\delta_{n0} = 1$ oder $\delta_{10} = 1$ gesetzt wird. Daher ist bei der Entwicklung der geometrischen Lösung nach rechts eine Gruppe der zugeordneten Punkte L_h, L_{h+1} durch die Ordinaten in den Festpunkten $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Der zweite geometrische Ort für die

Punkte $L_{k+1} \equiv F'_{k(k+1)}$ besteht aus dem Geradenzug $\zeta_{0n} \equiv F'_{(k-1)k} E'_k$ (Koordinaten für E'_k sind e_k, T_k), dessen Ursprung daher mit den Randbedingungen für F'_{12} bestimmt ist. Dasselbe gilt für die Entwicklung der Lösung von rechts nach links.

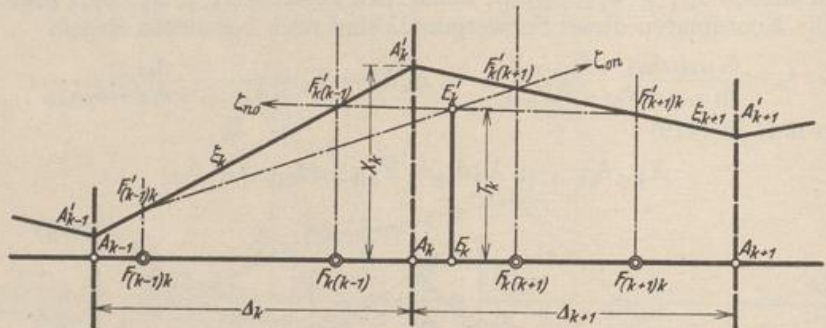


Abb. 230. $F'_{(k-1)k} E'_k \equiv \zeta_{0n}$, $F'_{k(k+1)} E'_k \equiv \zeta_{n0}$.

Die Elemente der graphischen Darstellung sind hier die Ordinaten in $F_{k(k-1)}$, die Koordinaten e_k, T_k der Punkte E'_k und der Ursprung des Geradenzugs $\zeta_{n0} \equiv F'_{(k+1)k} E'_k$ in $F'_{n(n-1)}$ (Abb. 230).

Nach der ersten und letzten Gleichung des Ansatzes

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \delta_{10}; \quad X_{n-1} \delta_{n(n-1)} + X_n \delta_{nn} = \delta_{n0}$$

ergeben sich die Koordinaten der Punkte E'_1 und E'_n zu

$$\left. \begin{aligned} \overline{E_1 E'_1} = T_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \delta_{12}}; & \quad \overline{A_1 E'_1} = e_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12}} \Delta_1, \\ \overline{E_n E'_n} = T_n = \frac{\delta_{n0}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}}; & \quad \overline{A_n E'_n} = e_n = \frac{-\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}} \Delta_n. \end{aligned} \right\} \quad (453)$$

Nach (435) und (437) ist $e_1 = a_{12}$; nach (436) und (437) $e_n = -a_{n(n-1)}$. Der Ursprung F'_{12} des Geradenzugs ζ_{n0} ist daher E'_1 , der Ursprung $F'_{n(n-1)}$ des Geradenzugs ζ_{n0} der Punkt E'_n .

Diese Rechenvorschrift kann durch Verwendung der Gleichungen ergänzt werden, welche bei Vorwärtselimination oder Rückwärtselimination nach Gauß erhalten werden. Sie bestimmen nach (433), (434) die Ordinaten von $F'_{(k-1)k}$ und $F'_{k(k-1)}$ des Geradenzugs ξ_k als die Ordinaten der Schwerpunkte der fiktiven Massen $\delta_{(k-2)(k-1)}^{(k-2)}$, $\delta_{(k-1)k}^{(k-1)}$ und $\delta_{kk}^{(k)}$, $\delta_{k(k-1)}^{(k)}$. Ihre Verwendung ist naturgemäß für die zeichnerische Lösung ohne Bedeutung. Da aber die Gleichung k im Gaußschen

Algorithmus von der reduzierten Gleichung $(k-1)^{(k-2)}$ abgezogen wird, um die reduzierte Gleichung $(k)^{(k-1)}$ zu erhalten, kann der ihr zugeordnete Punkt $F'_{k(k+1)}$ als Schwerpunkt der Massen $(\delta_{(k-1)k}^{(k-2)} + \delta_{(k-1)k})$ in $F'_{(k-1)k}$ und δ_{k0} in E'_k angesehen werden. Die drei Punkte liegen daher, wie bereits geometrisch bewiesen, auf einer Geraden.

Um diese geometrischen Beziehungen bei der Lösung einer Aufgabe zu verwenden, werden n Punkte $A_1 \dots A_n$ auf einer Achse in beliebigen, also auch gleichgroßen Abständen $\Delta_2 \dots \Delta_n$ aufgetragen. Dabei ist die Struktur des Hauptsystems maßgebend. Die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ werden mit Hilfe der Vorzahlen der Bedingungsgleichungen nach S. 256 geometrisch bestimmt oder nach (435), (436) mit den Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}, \kappa_{k(k-1)}$ eingerechnet. Dasselbe geschieht mit den Koordinaten e_k, T_k der Punkte E'_k , so daß sich die Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit die Geraden ξ_k eintragen lassen. Sie schneiden sich in den Punkten A'_k der Ordinaten A_k . Damit ist die Richtigkeit der Lösung nachgeprüft. $A_k A'_k = X_k$.

Die Kennbeziehungen eines Ansatzes nach (387) mit negativen Nebengliedern, also mit Gleichungen von der Form

$$-X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}$$

sind negativ. Dasselbe gilt nach S. 255 auch für die Abszissen $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ der Festpunkte. Diese liegen daher außerhalb des Abschnitts Δ_k . Die Koordinaten von E'_k sind:

$$\overline{A_k E_k} = e_k = -\frac{\delta_{k(k+1)} \Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)} \Delta_k}{-\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}}, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{-\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}}. \quad (454)$$

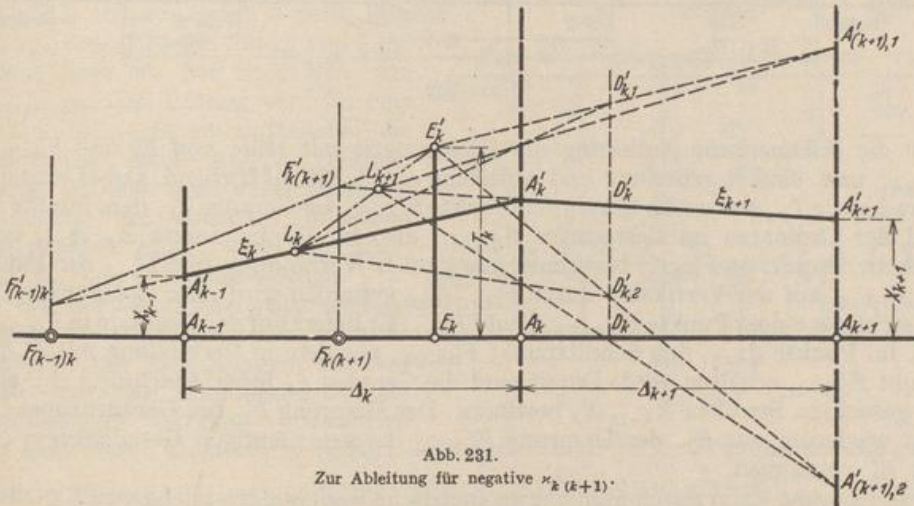


Abb. 231.
Zur Ableitung für negative $\kappa_{k(k+1)}$.

Die geometrischen Beziehungen bleiben unverändert. Dasselbe gilt daher auch von der zeichnerischen Lösung (Abb. 231).

Wechseln die Vorzeichen der Nebenglieder des dreigliedrigen Ansatzes, ist also z. B. in der Gleichung k die Vorzahl $\delta_{k(k-1)}$ positiv und daher $a_{(k-1)k}$ positiv, die Vorzahl $\delta_{k(k+1)}$ negativ und daher $a_{k(k+1)}$ negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ zum Bereich Δ_k zwischen den Intervallgrenzen A_{k-1}, A_k , dagegen die Festpunkte $F_{k(k+1)}, F_{(k+1)k}$ zum Bereich Δ_{k+1} außerhalb. Werden dessen Intervallgrenzen mit $\Delta_{k+1} = 0$ in einem Punkte zusammengefaßt, so ist auch $a_{k(k+1)} = a_{(k+1)k} = 0$, d. h. die dem Bereich Δ_{k+1} zugeordneten Festpunkte $F_{k(k+1)}, F_{(k+1)k}$ fallen ebenfalls nach A_k, A_{k+1} .

Den Endpunkten A_{k-1}, A_k des Abschnittes Δ_k sind die Gleichungen $(k-1), k$ zugeordnet, die Gleichung $(k-1)$

$$-X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0}$$

geometrisch beschrieben durch den Punkt E'_{k-1} (Abb. 232) mit den Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} c_{k-1} &= \frac{\delta_{(k-1)k} \Delta_k}{-\delta_{(k-1)(k-2)} + \delta_{(k-1)(k-1)} + \delta_{(k-1)k}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1),1} + \delta_{(k-1)k}} \Delta_k = c_{k(k-1)}, \\ \overline{E_{k-1} E'_{k-1}} &= T_{k-1} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)(k-1),1} + \delta_{(k-1)k}}; \end{aligned} \right\} \quad (455)$$

die Gleichung k

$$X_{(k-1)} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}$$

geometrisch beschrieben durch den Punkt E'_k mit den Koordinaten

$$c_k = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k = c_{kk}, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}}. \quad (456)$$

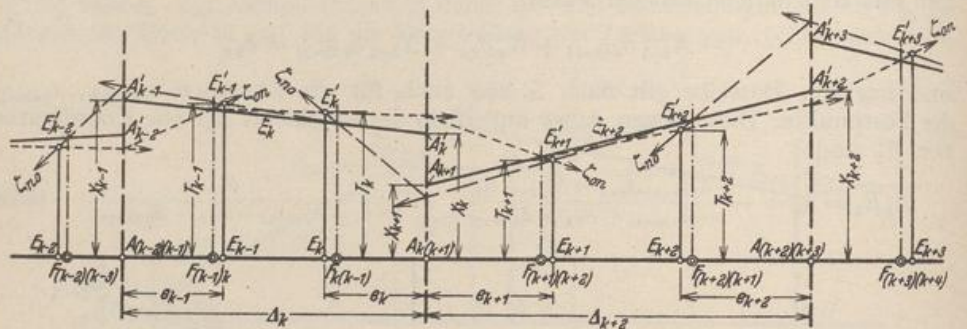


Abb. 232.

Für die zeichnerische Auflösung der Gleichungen mit Hilfe von E'_k und $F'_{k(k+1)}$, $F'_{k(k+1)}$ usw. sind Begründung und Ableitung auf S. 260 maßgebend. Dabei wird der Geradenzug ζ_{0n} aus einem bekannten Punkte $F'_{(k-1)k}$ der Geraden ξ_k , dem Punkte E'_k und der Ordinaten im Festpunkte $F_{k(k+1)}$, also im Doppelpunkte A_k, A_{k+1} entwickelt. Damit ist $F'_{k(k+1)}$ bestimmt, aus dem in Verbindung mit E'_{k+1} der Punkt $F'_{(k+1)(k+2)}$ auf der Vertikalen durch $F_{(k+1)(k+2)}$ gefunden wird. Der Geradenzug ξ_{n0} entsteht aus einem Punkte $F'_{(k+2)(k+1)}$ und E'_{k+1} . Er liefert auf der Ordinate in $F_{(k+1)k}$, d. i. im Punkte A_{k+1} , den Schnittpunkt $F'_{(k+1)k}$, aus dem in Verbindung mit E'_k der Punkt $F'_{k(k-1)}$ erhalten wird. Damit sind die Geraden ξ_k jedes Abschnittes Δ_k , also die gesuchten Strecken X_{k-1}, X_k bestimmt. Der Ursprung F'_{12} des Geradenzuges ζ_{0n} fällt wiederum mit E'_1 , der Ursprung $F'_{n(n+1)}$ des gegenläufigen Geradenzuges ζ_{n0} mit E'_n zusammen.

Die Lösung kann durch ähnliche geometrische Beziehungen nachgeprüft werden. Durch Addition der Gleichungen k und $(k+1)$ entsteht nach (444)

$$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk,1} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1),1} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} = \delta_{k0} + \delta_{(k+1)0} \quad (457)$$

und damit eine geometrische Beziehung zwischen vier fiktiven Massen in $A'_{k-1} \dots A'_{k+1}$, oder deren Zusammenfassung in zwei Punkten B'_k, C'_k mit den Ordinaten $Y_{(k-1)k}$, $Y_{(k+1)(k+2)}$ mit dem Schwerpunkt $E'_{k(k+1)}$ (Abb. 233).

$$\left. \begin{aligned} \overline{A'_k B'_k} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}} \Delta_k = c_{kk}, \\ \overline{A'_{k+1} C'_k} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \Delta_{k+2} = c_{(k+2)(k+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_{k(k+1)} E_{k(k+1)}} = e_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)} \Delta_{k+2} - \delta_{(k-1)k} \Delta_{k-1}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \\ T_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{k0} + \delta_{(k+1)0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Die Punkte $B'_k, E'_{k(k+1)}, C'_k$ liegen daher auf einer Geraden, für die E'_k Festpunkt ist. In ähnlicher Weise werden die Gleichungen k und $(k+1)$ geometrisch ausgelegt.

$$\begin{aligned} X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk,1} - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} \\ = Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}, \\ (X_{k+1} - X_k) \delta_{(k+1)k} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1,1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} \\ = (X_{k+1} - X_k) \delta_{(k+1)k} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = \delta_{(k+1)0}, \end{aligned}$$

d. h. die Geraden $B'_k A'_k$ und $B_k A'_{k+1}$ schneiden auf der Schwerlinie w_k eine Strecke von der vorgeschriebenen Länge

$$\frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} - \delta_{k(k+1)}} = S_k \quad (460)$$

ab. Ähnliches gilt für die zweite Gleichung.

Wird daher eine Gerade g_1 mit dem vorgegebenen Punkt $F'_{(k-1)k}$ angenommen, so ist g_2 mit B'_k und $E'_{k(k+1)}$, also auch C'_k bestimmt. Dasselbe gilt für die Gerade g_3 mit B_k und der Strecke S_k auf w_k . Daher besitzt auch die Gerade A'_{k+1}, C'_k einen festen, dem Punkte $F'_{(k-1)k}$ zugeordneten Punkt von ξ_{k+2} .

Dieser liegt auf der Ordinaten von $F_{(k+1)(k+2)}$. Die Lösung wird für eine Gerade $F'_{(k-1)k} B'_k$ am einfachsten, die gleichzeitig durch $E'_{k(k+1)}$ verläuft. Damit ist eine zweite zeichnerische Auflösung des Ansatzes mit den Festpunkten $E'_{k(k+1)}$ und den Strecken S_k, S_{k+1} gefunden worden.

Um die Genauigkeit der zeichnerischen Lösung festzustellen, wird die Identität der Gleichungen des Ansatzes mit den Ergebnissen für die überzähligen Größen untersucht.

Sie kann durch Iteration verbessert oder auch durch die Berechnung der ΔX_k aus

$$\Delta T_k = T_k - \frac{X_{(k-1),1} \delta_{k(k-1)} + X_{k,1} \delta_{kk} + X_{(k+1),1} \delta_{k(k+1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}} \quad (461)$$

nach $X_{k,2} = X_{k,1} + \Delta X_k$ berichtigt werden.

Die Lösung wird an der Berechnung eines symmetrischen Brückenträgers gezeigt (Abb. 234), dessen mittlerer Teil als steif eingespannter Rahmen ausgebildet ist. Hierzu dient ein dreifach statisch unbestimmtes Hauptsystem, an dem außer der Belastung die Stützenmomente $X_1 \dots X_6$ als überzählige Größen angreifen. Die Formänderungen des statisch bestimmten Abschnitts des Hauptsystems sind bei Annahme eines für alle Stäbe gleich großen Trägheitsmomentes

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{66} &= \frac{1}{3} (9,0 + 10,0) = 6,333; & \delta_{12} = \delta_{56} &= \frac{10}{6} = 1,667; \\ \delta_{22} = \delta_{55} &= \frac{1}{3} (10,0 + 12,0) = 7,333; & \delta_{27} = \delta_{45} &= \frac{12}{6} = 2,000. \end{aligned}$$

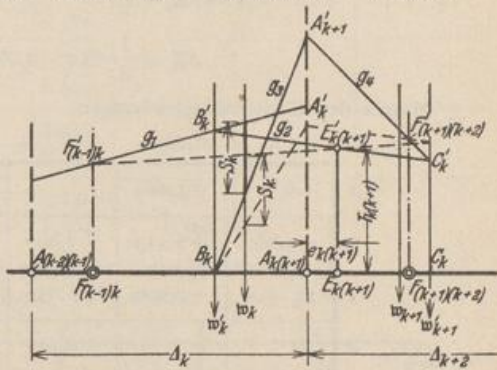


Abb. 233.

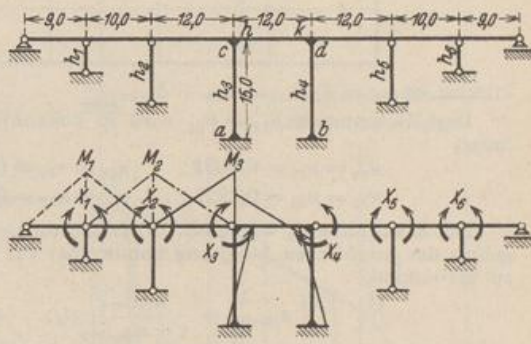


Abb. 234.

Die Formänderungen des statisch unbestimmten Abschnitts aus $-X_3 = 1$ werden mit Hilfe der Tabellen Abschn. 61 bestimmt. Für diesen Belastungsfall ist:

$$M_{h,k} = -\frac{1}{2} \cdot 1,25 \left(\frac{1}{3,25} \pm \frac{6}{8,5} \right) = -0,192 \mp 0,442 \text{ mt};$$

$$H = -\frac{3}{2} \frac{1}{15,0} \frac{1}{3,25} = -0,0308 \text{ t} = N_3^{(9)}.$$

Biegemomente am

Riegel h_k : $M_h = -0,634 \text{ mt}$; $M_k = +0,250 \text{ mt}$.

Stütze h_3 : $M_c = +0,366 \text{ mt}$; $M_d = 0,366 - 0,0308 \cdot 15,0 = -0,096 \text{ mt}$,

Stütze h_4 : $M_d = +0,250 \text{ mt}$; $M_b = 0,250 - 0,0308 \cdot 15,0 = -0,212 \text{ mt}$.

$$\delta_{33}^{(9)} = \delta_{44}^{(9)} = \frac{1}{3} 12 + \frac{1}{3} 12 \left(0,634 - \frac{0,250}{2} \right) = 6,036;$$

$$\delta_{34}^{(9)} = \frac{1}{3} 12 \left(-0,250 + \frac{0,634}{2} \right) = 0,268.$$

Matrix der Elastizitätsgleichungen

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	s_k
1	+6,333	+1,667					8,000
2	+1,667	+7,333	+2,000				11,000
3		+2,000	+6,036	+0,268			8,304
4			+0,268	+6,036	+2,000		8,304
5				+2,000	+7,333	+1,667	11,000
6					+1,667	+6,333	8,000

Hierbei ist $s_k = \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}$.

Der Kettenbruch $\beta_{11} = \beta_{66}$ wird in bekannter Weise nach (404) und (394) gebildet und liefert

$$\kappa_{65} = \kappa_{12} = 0,2632; \quad \kappa_{54} = \kappa_{23} = 0,2901; \quad \kappa_{43} = \kappa_{34} = 0,04912;$$

$$\kappa_{32} = \kappa_{45} = 0,3321; \quad \kappa_{21} = \kappa_{56} = 0,2500; \quad \beta_{11} = \beta_{66} = 0,1690.$$

Die Abschnitte Δ_k werden in Übereinstimmung mit den Feldweiten festgesetzt, um das Ergebnis der graphischen Auflösung unmittelbar zur Bestimmung der Schnittkräfte des Stabwerks zu verwenden.

$$a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k}}{1 + \kappa_{(k-1)k}} l_k; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)}}{1 + \kappa_{k(k-1)}} l_k.$$

Riegelstab l_k	2	3	4	5	6
$a_{(k-1)k}$	2,084	2,698	0,562	2,992	2,000
$a_{k(k-1)}$	2,000	2,992	0,562	2,698	2,084

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)} l_{k+1} - \delta_{k(k-1)} l_k}{s_k}.$$

Bedingung h	1	2	3	4	5	6
e_k	+2,084	+0,666	-2,503	+2,503	-0,666	-2,084

Vorgeschriebene Belastungsannahmen.

Die überzähligen Größen sollen für Eigengewicht $g = 1 \text{ t/m}$, Belastung des Feldes l_2 mit Nutzlast $p = 1 \text{ t/m}$, ferner für gleichförmige Temperaturerniedrigung des Riegels um 15° und für eine gemessene Verdrehung des linken Rahmenstützpunktes um $19'$ angegeben werden. $Ej_c = 60000 \text{ tm}^2$.

Soweit sich die Formänderungen auf den statisch bestimmten Teil des Hauptsystems beziehen, ist eine nähere Erklärung unnötig.

Die statisch unbestimmten Formänderungen $\delta_{30}^{(3)}$, $\delta_{40}^{(3)}$ werden aus

$$\delta_{k0}^{(3)} = \int M_0^{(0)} M_k^{(3)} \frac{J_e}{J} ds$$

berechnet. Die Momente $M_3^{(3)}$, $M_4^{(3)}$ sind mit Hilfe der Tabelle Abschn. 61 in Abb. 234 aufgetragen worden. Hieraus folgt die

Übersicht der $T_k = \frac{\delta_{k0}^{(3)}}{s_k}$ in mt.

k	1	2	3	4	5	6
Eigengewicht 1 t/m	+ $\frac{90,4}{8,000}$	+ $\frac{172,5}{11,000}$	+ $\frac{155,7}{8,304}$	+ 18,75	+ 15,68	+ 11,30
Nutzlast $p=1$ t/m auf l_3		+ $\frac{112,5}{11,000}$	+ $\frac{112,5}{8,304}$			
Riegel $t = -15^\circ$			+ $\frac{3,450}{8,304}$	+ 0,415		
$\Delta\varphi_3 = 19'$			- $\frac{31,6}{8,304}$	- $\frac{62,1}{8,304}$		

$$\delta_{3t}^{(3)} = EJ_c \alpha_1 t l_4 N_3^{(3)} = -60000 \cdot 0,00015 \cdot 12 \cdot (-0,0308) = +3,45,$$

$$\delta_{3t}^{(3)} = -EJ_c \Sigma C_3^{(3)} \Delta_c = -60000 \cdot 0,096 \cdot 19 \cdot 0,000291 = -31,6.$$

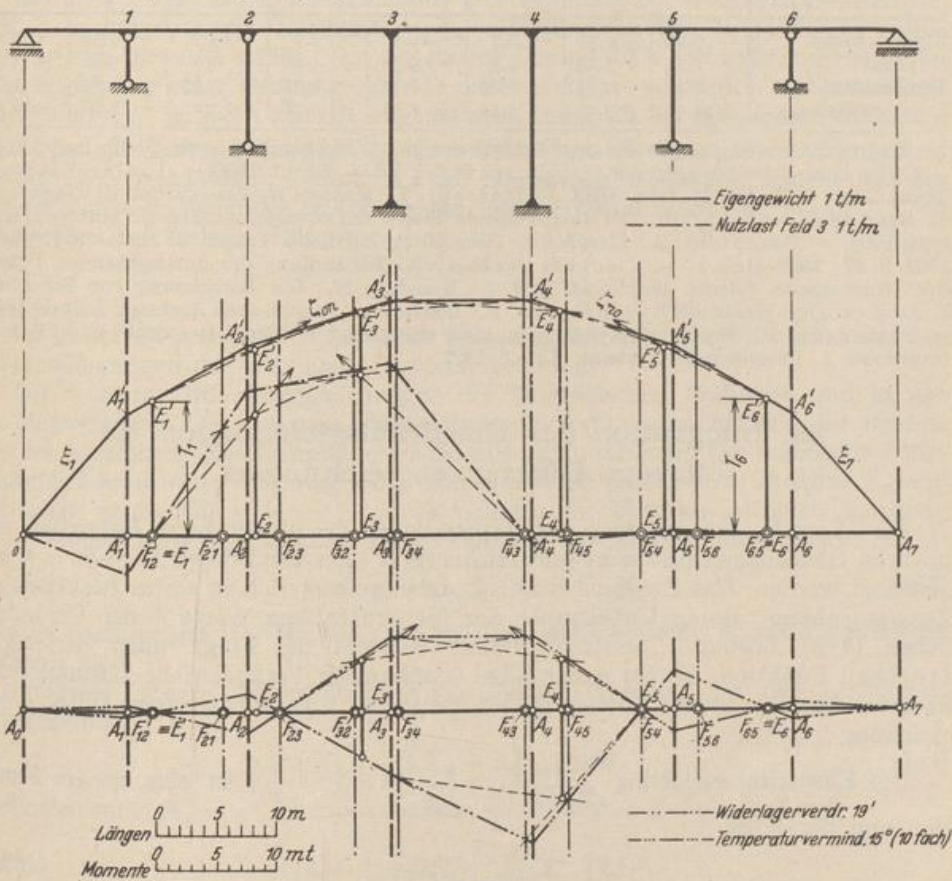


Abb. 235.

Um die Gleichungen zeichnerisch aufzulösen, werden nach S. 261 zuerst die Festpunkte $F_{12} \dots F_{56}$, $F_{65} \dots F_{21}$ und die Punkte $E_1 \dots E_6$ mit den Ergebnissen $a_{12} \dots a_{56}$, $a_{65} \dots a_{21}$, $e_1 \dots e_6$ der Rechnung auf der Achse $A_1 \dots A_6$ eingetragen und die Ordinaten $T_1 \dots T_6$ für jeden einzelnen Belastungsfall in $E_1 \dots E_6$ abgesteckt. Die positiven Werte erscheinen in der oberen Halbebene. Daher gilt das gleiche von den überzähligen Schnittkräften X_k . Mit den Ordinaten T_1, T_6 in den Festpunkten F_{12}, F_{65} und den Endpunkten E'_k der Strecken T_k sind die beiden Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit in jedem Abschnitt A_k zwei Punkte $F'_{(k-1)k}, F''_{(k-1)k}$ des Geradenzuges ξ_k bestimmt, welcher auf den Ordinaten A_1, A_2 usw. die gesuchten Strecken X_1, X_2 usw. abschneidet.

Die statisch unbestimmten Stützenmomente nach Abb. 235 in mt für jeden Belastungsfall:

Belastung	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Eigengewicht. . .	10,2	15,8	19,7	19,7	15,8	10,2 mt
Nutzlast.	-3,4	12,1	14,5	-0,7	0,3	0 „
Temperatur . . .	0,05	-0,18	0,63	0,63	-0,18	0,05 „
Lagerverdrehung .	-0,50	1,50	-5,40	-11,20	3,30	-0,80 „

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Bereichs des Hauptsystems sind

$$M = M_0^{(3)} - X_3 M_3^{(3)} - X_4 M_4^{(3)}.$$

Die Momente $M_0^{(3)}$ aus den einzelnen Belastungen werden nach den Tabellen Abschn. 61 berechnet.

Biegemomente in mt.

Belastung	M_a	M_e	$M_3 = -X_3$	M_h	M_k	$M_4 = -X_4$	M_d	M_b
Eigengewicht. . .	-0,29	+0,58	-19,7	-19,1	-19,1	-19,7	+0,58	-0,29
Nutzlast.	-1,24	+5,13	-14,5	-9,38	+4,06	+0,7	+3,36	-3,01
Temperatur . . .	-1,03	+0,85	-0,63	+0,22	+0,22	+0,63	+0,85	-1,03
Lagerverdrehung .	+32,70	-3,94	+5,40	+1,41	-5,78	+11,2	-16,98	+19,47

Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, 3. Aufl. S. 83. Berlin 1928.
 — Culmann: Anwendungen der graphischen Statik Bd. 3. Zürich 1900. — Fidler, Claxton: Trans. Inst. C. E. Bd. 74. Okt. 1883. — Massau, J.: Annales de l'association des ingénieurs de Gand 1889. — Vianello: Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Hamburg 1904. — Ostenfeld, A.: Graphische Behandlung der kont. Träger. Z. Arch.-Ing.-Wesen 1905 S. 47; 1908 Heft 1. — Vlachos: Zeichnerische Behandlung der durchgehenden Träger. Ost. Wochenschr. öffentl. Baudienst 1908. — Marcus, H.: Die Berechnung von Silozellen. Z. Arch.-u. Ing.-Wesen 1911. — Mehmke, R.: Leitfaden z. graphischen Rechnen. Leipzig 1917. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biege-fester Stab- und Flächen-tragwerke. I. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

33. Integration der Elastizitätsgleichungen als lineare Differenzgleichungen.

Die Wurzeln des Ansatzes sind bisher durch die algebraische Rekursion der linearen Gleichungen bestimmt und zeichnerisch einer Punktfolge $1 \dots k \dots n$ zugeordnet worden. Das Ergebnis erscheint dabei geometrisch in einem funktionalen Zusammenhang, dessen Unbekannte nur für ganzzahlige Werte k der Veränderlichen ($k \cdot A$) Lösungen besitzen. Damit entsteht die Frage nach derjenigen stetigen Funktion, die für ganzzahlige unabhängige Veränderliche Lösungen des linearen Ansatzes ergibt. Dieser erhält damit die Eigenschaft einer Differenzgleichung.

Die Elastizitätsgleichung $\sum_{h=k}^{k+m} \delta_{rh} X_h = \delta_{r0}$, ($k = r - \frac{m}{2}$) ist eine lineare Funktion von der Form

$$F_1(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = N_r \quad (462a)$$