



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Anwendung auf dreigleidrige Elastizitätsgleichungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

Die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ einer jeden Zeile k sind unveränderlich und besitzen damit die wesentliche Eigenschaft der Masse, so daß den n Gleichungen des Ansatzes auch massengeometrische Bedeutung beigelegt werden kann. Darnach werden nach P. Pasternak die Vorzahlen jeder Zeile k als die fiktiven Gewichte einer räumlichen Gruppe von n Punkten A'_k behandelt, deren Abstand von einer Grundrißebene durch die zunächst unbekanntes Strecken X_k vorgeschrieben ist. Die Gleichung k

$$\sum_{h=1}^n \delta_{kh} X_h = \delta_{k0} = T_k \sum_{h=1}^n \delta_{kh} = T_k s_k, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{s_k} \tag{431}$$

bestimmt daher den Abstand T_k des Schwerpunktes E'_k der fiktiven Gewichte δ_{kh} von der Grundrißebene. Die Koordinaten der Grundrißprojektion E_k werden nach bekannten Regeln berechnet, indem die Massen $\delta_{k1} \dots \delta_{kk} \dots \delta_{kn}$ der Projektion A_k der Punkte beigelegt werden. Damit ist jeder Bedingungsgleichung k ein ausgezeichneter Punkt E'_k zugeordnet, dessen Lage durch die Vorzahlen $\delta_{k1} \dots \delta_{kn}$ und die Belastungszahl δ_{k0} bekannt ist. Dieses massengeometrische Bild des Ansatzes enthält, zum Teil ergänzt durch die analytische Auflösung der Gleichungen nach C. F. Gauß, geometrische Beziehungen zwischen den Endpunkten der Ordinaten X_k , die in zwei Ebenen, in einfachen Fällen aber auch in einer Ebene verfolgt werden.

Anwendung auf dreigliedrige Elastizitätsgleichungen.

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= \delta_{10} \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= \delta_{20} \\ \dots &\dots \\ X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} &= \delta_{(k-1)0} \\ X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} &= \delta_{k0} \\ \dots &\dots \\ X_{n-2} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)} + X_n \delta_{(n-1)n} &= \delta_{(n-1)0} \\ X_{n-1} \delta_{nn} + X_n \delta_{nn} &= \delta_{n0} \end{aligned} \right\} \tag{432}$$

Der Gaußsche Algorithmus liefert nach (388 und 399) bei

Vorwärtselimination (433)	Rückwärtselimination (434)
$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \delta_{10},$	$X_1 \delta_{11}^{(n-1)} = \delta_{10}^{(n-1)},$
$X_2 \delta_{22}^{(1)} + X_3 \delta_{23} = \delta_{20}^{(1)},$	$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}^{(n-2)} = \delta_{20}^{(n-2)},$
\dots	\dots
$X_k \delta_{kk}^{(k-1)} + X_{k+1} \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}^{(k-1)},$	$X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk}^{(n-k)} = \delta_{k0}^{(n-k)},$
\dots	\dots
$X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} + X_n \delta_{(n-1)n} = \delta_{(n-1)0}^{(n-2)},$	$X_{n-2} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{n-1} \delta_{(n-1)(n-1)}^{(1)} = \delta_{(n-1)0}^{(1)},$
$X_n \delta_{nn}^{(n-1)} = \delta_{n0}^{(n-1)},$	$X_{n-1} \delta_{nn} + X_n \delta_{nn} = \delta_{n0}.$

Die zeichnerische Darstellung wird hier auf eine Ebene beschränkt. Sie enthält die räumliche Punktgruppe A'_1 bis A'_n , deren Grundriß $A_1 \dots A_n$ auf einer Achse abgebildet ist (Abb. 222). Die Abstände Δ_k zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten A_{k-1}, A_k sind beliebig. Sie können gleichgroß gewählt werden oder zum Teil auch Null sein.

Die Belastungsspalte der Ansätze (433), (434) ist entweder voll oder teilweise besetzt. Die allgemeine Aufgabe kann mit dem Superpositionsgesetz stets auf die Lösung für wenige Belastungszahlen zurückgeführt werden. Der Ansatz zerfällt in diesem

Fälle in drei Abschnitte, von denen der erste und dritte homogen sind. Diese werden daher für $\delta_{n0} = 1$ (Lösung a) und für $\delta_{10} = 1$ (Lösung b) berechnet.

Lösung für den homogenen Ansatz. Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0, \Delta_{k+1} \neq 0$.

Die Lösung a bedient sich der Kennbeziehungen der Vorwärtselimination, indem das Verhältnis $-\kappa_{(k-1)k} = X_{k-1}/X_k$ zweier nach links aufeinanderfolgender Ordinaten als Verhältnis der Strecken $a_{(k-1)k}, b_{(k-1)k}$ dargestellt wird. Der Abstand $\Delta_k = A_{k-1}A_k$ wird dabei durch den Punkt $F_{(k-1)k}$ geteilt. Er fällt nach (433) in die Schwerlinie der den Endpunkten A'_{k-1}, A'_k zugeordneten Massen $\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}$ und $\delta_{(k-1)k}$.

$$\frac{X_{k-1}}{X_k} = -\kappa_{(k-1)k} = -\frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}}; \quad a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k}}{1 + \kappa_{(k-1)k}} \Delta_k, \quad b_{(k-1)k} = \frac{1}{1 + \kappa_{(k-1)k}} \Delta_k. \quad (435)$$

Dasselbe gilt für die Lösung b, bei welcher die Kennbeziehungen der Rückwärtselimination verwendet werden. Das Verhältnis $-\kappa_{k(k-1)} = X_k/X_{k-1}$ zweier nach rechts aufeinanderfolgender Ordinaten wird geometrisch durch die Strecken $a_{k(k-1)}, b_{k(k-1)}$ und den Punkt $F_{k(k-1)}$ ausgedrückt. Dieser liegt nach (434) auf der Schwer-

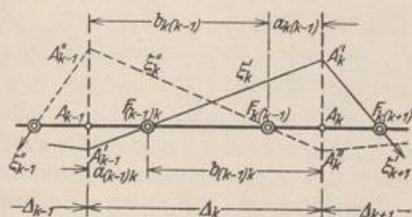


Abb. 222.

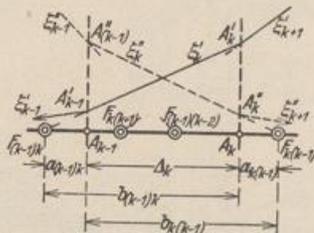


Abb. 223.

linie der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und $\delta_{k(k-1)}^{(n-k)}$, welche den Endpunkten A''_{k-1} und A''_k zugeordnet sind (Abb. 222).

$$\frac{X_k}{X_{k-1}} = -\kappa_{k(k-1)} = -\frac{a_{k(k-1)}}{b_{k(k-1)}}; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)}}{1 + \kappa_{k(k-1)}} \Delta_k, \quad b_{k(k-1)} = \frac{1}{1 + \kappa_{k(k-1)}} \Delta_k. \quad (436)$$

Die Punkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ sind unabhängig von den Belastungsgliedern und allein durch die elastische Struktur des Systems bestimmt. Sie werden daher als Festpunkte bezeichnet.

Sind die Verhältniszahlen X_{k-1}/X_k und X_k/X_{k-1} positiv, die Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}$ und $\kappa_{k(k-1)}$ also negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ außerhalb des Intervalls Δ_k (Abb. 223). Die Strecken $a_{(k-1)k}, b_{(k-1)k}$ werden daher im Sinne A_{k-1}, A_k und A_k, A_{k-1} positiv gerechnet. Negative Verhältniszahlen $X_{k-1}/X_k, X_k/X_{k-1}$, also positive Kennbeziehungen $\kappa_{(k-1)k}, \kappa_{k(k-1)}$ ergeben Festpunkte zwischen A_{k-1} und A_k (Abb. 222). Da der Nenner der Kennbeziehungen

$$\kappa_{(k-1)k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}}, \quad \kappa_{k(k-1)} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)}^{(n-k)}} \quad (437)$$

in jedem Falle positiv ist, wird die Lage der beiden Festpunkte zu den Grenzen des Intervalls durch das Vorzeichen der Nebenglieder $\delta_{(k-1)k}$ der Matrix entschieden.

Die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k-1)}$ der Achse werden entweder mit den Strecken $a_{(k-1)k}, a_{k(k-1)}$ eingetragen oder durch geometrische Teilung der Abschnitte Δ_k im Verhältnis

$$\kappa_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)k} / \delta_{(k-1)(k-1)}^{(k-2)}, \quad \kappa_{k(k-1)} = \delta_{k(k-1)} / \delta_{k(k-1)}^{(n-k)} \quad (438)$$

erhalten, wenn die Kennbeziehungen mit den Kettenbrüchen (394) und (404) bestimmt worden sind.