Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Lösung für den homogenen Ansatz

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

Falle in drei Abschnitte, von denen der erste und dritte homogen sind. Diese werden daher für $\delta_{n0}=1$ (Lösung a) und für $\delta_{10}=1$ (Lösung b) berechnet.

Lösung für den homogenen Ansatz. Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0$, $\Delta_{k+1} \neq 0$.

Die Lösung a bedient sich der Kennbeziehungen der Vorwärtselimination, indem das Verhältnis $-\varkappa_{(k-1)k} = X_{k-1}/X_k$ zweier nach links aufeinanderfolgender Ordinaten als Verhältnis der Strecken $a_{(k-1)k}$, $b_{(k-1)k}$ dargestellt wird. Der Abstand $\Delta_k = \overline{A_{k-1}A_k}$ wird dabei durch den Punkt $F_{(k-1)k}$ geteilt. Er fällt nach (433) in die Schwerlinie der den Endpunkten A'_{k-1}, A'_k zugeordneten Massen $\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}$ und $\delta_{(k-1)k}$.

$$\frac{X_{k-1}}{X_k} = -\varkappa_{(k-1)k} = -\frac{a_{(k-1)k}}{b_{(k-1)k}}\,; \quad a_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1+\varkappa_{(k-1)k}}\Delta_k, \quad b_{(k-1)k} = \frac{1}{1+\varkappa_{(k-1)k}}\Delta_k. \qquad (435)$$

Dasselbe gilt für die Lösung b, bei welcher die Kennbeziehungen der Rückwärtselimination verwendet werden. Das Verhältnis $-\varkappa_{k(k-1)} = X_k/X_{k-1}$ zweier nach rechts aufeinanderfolgender Ordinaten wird geometrisch durch die Strecken $a_{k(k-1)}$, $b_{k(k-1)}$ und den Punkt $F_{k(k-1)}$ ausgedrückt. Dieser liegt nach (434) auf der Schwer-

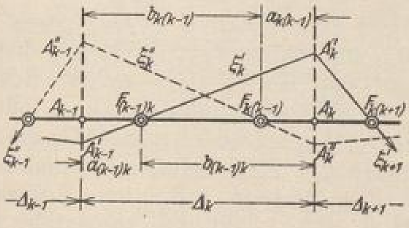

Abb. 222.

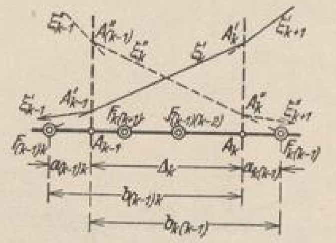

Abb. 223.

linie der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und $\delta^{(n-k)}_{kk}$, welche den Endpunkten A''_{k-1} und A''_k zugeordnet sind (Abb. 222).

$$\frac{X_k}{X_{k-1}} = -\varkappa_{k(k-1)} = -\frac{a_{k(k-1)}}{b_{k(k-1)}}\,; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\varkappa_{k(k-1)}}{1+\varkappa_{k(k-1)}}\Delta_k, \quad b_{k(k-1)} = \frac{1}{1+\varkappa_{k(k-1)}}\Delta_k. \qquad (436)$$

Die Punkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ sind unabhängig von den Belastungsgliedern und allein durch die elastische Struktur des Systems bestimmt. Sie werden daher als Festpunkte bezeichnet.

Sind die Verhältniszahlen X_{k-1}/X_k und X_k/X_{k-1} positiv, die Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$ und $\varkappa_{k(k-1)}$ also negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ außerhalb des Intervalls Δ_k (Abb. 223). Die Strecken $a_{(k-1)k}$, $b_{(k-1)k}$ werden daher im Sinne $\overrightarrow{A_{k-1}, A_k}$ und $\overrightarrow{A_k, A_{k-1}}$ positiv gerechnet. Negative Verhältniszahlen X_{k-1}/X_k, X_k/X_{k-1}, also positive Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ ergeben Festpunkte zwischen A_{k-1} und A_k (Abb. 222). Da der Nenner der Kennbeziehungen

$$\varkappa_{(k-1)k} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}}, \qquad \varkappa_{k(k-1)} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta^{(n-k)}_{kk}} \qquad (437)$$

in jedem Falle positiv ist, wird die Lage der beiden Festpunkte zu den Grenzen des Intervalls durch das Vorzeichen der Nebenglieder $\delta_{(k-1)k}$ der Matrix entschieden.

Die Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ der Achse werden entweder mit den Strecken $a_{(k-1)k}$, $a_{k(k-1)}$ eingetragen oder durch geometrische Teilung der Abschnitte Δ_k im Verhältnis

$$\varkappa_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)k}/\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}, \qquad \varkappa_{k(k-1)} = \delta_{k(k-1)}/\delta^{(n-k)}_{kk} \qquad (438)$$

erhalten, wenn die Kennbeziehungen mit den Kettenbrüchen (394) und (404) bestimmt worden sind.

Der Festpunkt $F_{k(k-1)}$ kann jedoch auch mit Hilfe des Festpunktes $F_{(k-1)k}$ und der Gleichung k des Ansatzes geometrisch gefunden werden, wenn die bei jeder zeichnerischen Lösung unvermeidliche Fehlerfortpflanzung in Kauf genommen wird.

Nach Abb. 224a ist die Gerade ξ'_k im homogenen Bereich a durch den Festpunkt $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Sie schneidet sich mit ξ'_{k+1} im Punkte A'_k der Geraden k. Nach der Gleichung k

$$X_{k-1}\,\delta_{k(k-1)} + X_k\,\delta_{kk} + X_{k+1}\,\delta_{k(k+1)} = 0 \tag{439}$$

ist der Schwerpunkt E_k der fiktiven Massen $\delta_{k(k-1)}$, δ_{kk}, $\delta_{k(k+1)}$ ein Punkt der Achse ($T_k = 0$). Er liegt auf der Geraden $\mathfrak{w}_k$ im Abstand e_k vom Punkte A_k.

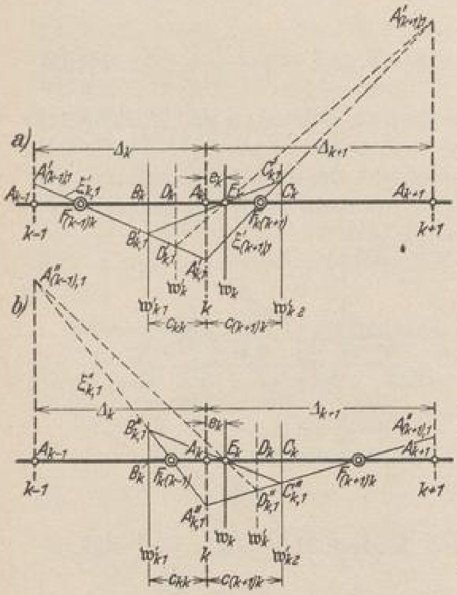

Abb. 224.

$$e_k = \frac{\delta_{k(k+1)}\,\Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)}\,\Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}. \tag{440}$$

Die Gleichung k kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$Y_{(k-1)k}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) + X_{k+1}\,\delta_{k(k+1)} = 0. \tag{441}$$

Hierbei ist $Y_{(k-1)k}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) = X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk}$ und daher $Y_{(k-1)k} = \overline{D_k D'_k}$ diejenige Ordinate der Geraden ξ'_k, welche den Abschnitt Δ_k im Verhältnis $\delta_{kk} : \delta_{k(k-1)}$ teilt. Die Gerade $D'_k A'_{k+1}$ schneidet nach (441) die Achse im Punkte E_k. Eine beliebige Annahme $\xi_{k,1}$ liefert das Dreiseit mit den Eckpunkten $D'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $A'_{(k+1),1}$ auf drei zueinander parallelen Geraden k, $(k+1)$, $\mathfrak{w}'_k$. Da zwei Seiten durch die festen Punkte $F_{(k-1)k}$ und E_k bestimmt sind, ist auch $F_{k(k+1)}$ ein Festpunkt.

Die geometrische Auslegung der Gleichung k wird durch deren Umformung nach

$$Z_{(k-1)k}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) + Z_{k(k+1)}(\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}) = 0 \tag{442}$$

wesentlich günstiger. Dabei ist die Aufteilung der Vorzahl $\delta_{kk} = \delta_{kk,1} + \delta_{kk,2}$ beliebig und richtet sich nach den besonderen Eigenschaften des Ansatzes. Die Ordinate $Z_{(k-1)k} = \overline{B_k B'_k}$ liegt auf der Schwerlinie $\mathfrak{w}'_{k1}$ der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{kk,1}$, die Ordinate $Z_{k(k+1)} = \overline{C_k C'_k}$ auf der Schwerlinie $\mathfrak{w}'_{k2}$ von $\delta_{kk,2}$ und $\delta''_{k(k+1)}$. Die Punkte $B'_{k,1}$, E_k, $C'_{k,1}$ bilden nach (442) wieder eine gerade Linie, so daß ein Dreiseit $B'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $C'_{k,1}$ mit den vorgeschriebenen Festpunkten $F_{(k-1)k}$ und E_k entsteht. In derselben Weise kann auch die geometrische Konstruktion des Festpunktes $F_{k(k-1)}$ aus $F_{(k+1)k}$ nach Abb. 224b begründet werden. Die Schwerlinien $\mathfrak{w}'_{k,1}$, $\mathfrak{w}'_{k,2}$ sind durch die Strecken c_{kk}, $c_{(k+1)k}$ bestimmt (Abb. 224).

$$c_{kk} = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}}\,\Delta_k, \qquad c_{(k+1)k} = \frac{\delta_{k(k+1)}}{\delta_{kk,2} + \delta_{k(k+1)}}\,\Delta_{k+1}. \tag{443}$$

Punktfolge A_k, A_{k+1} mit $\Delta_k \neq 0$, $\Delta_{k+1} = 0$.

In einzelnen Fällen werden die Punkte A_k, A_{k+1} zusammengelegt ($\Delta_{k+1} = 0$), um das Bild der geometrischen Lösung in einfacher Weise mit dem Kräftebild des Tragwerks zu verbinden. Die Kennbeziehungen $\varkappa_{k(k+1)}$, $\varkappa_{(k+1)k}$ sind in diesem Falle stets negativ. Dem Punkte (A_k, A_{k+1}) der Achse sind daher zwei Punkte A'_k, A'_{k+1} des Linienzuges ξ'_k, ξ'_{k+2} zugeordnet.

Die beiden Geraden ξ'_k, ξ'_{k+2} schneiden sich im Abstand $u_{k(k+1)}$ von der Ordinate k. Dieser ist im homogenen Bereich der Lösung a durch die Kennbeziehung

$X_k/X_{k+1} = -\varkappa_{k(k+1)}$ vorgeschrieben und geometrisch durch $X_{k+1} = 1$, $X_k = -\varkappa_{k(k+1)}$ und die als bekannt anzusehenden Festpunkte $F_{(k+1)(k+2)}$, $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Der Abstand $u_{k(k+1)}$ ist im homogenen Bereich a für alle X_{k+1} konstant, der geometrische Ort der Punkte $U_{k(k+1)}$ daher eine zu k parallele Gerade, die Übergangslinie $\mathfrak{u}_{k(k+1)}$. Ähnliche geometrische Beziehungen gelten für die Lösung b mit $X_{k+1} = -\varkappa_{(k+1)k} X_k$. Der Linienzug ξ''_{k-1}, ξ''_{k+1} schneidet sich jetzt auf der Übergangslinie $\mathfrak{u}_{(k+1)k}$ im Abstand $u_{(k+1)k}$ von k (Abb. 225).

Die Übergangslinien $\mathfrak{u}_{k(k+1)}$ und die Festpunkte $F_{(k+1)(k+2)}$ lassen sich aus dem Festpunkt $F_{(k-1)k}$ auch geometrisch ableiten, ohne die Kennbeziehungen $\varkappa_{k(k+1)}$ usw. zu verwenden. Um dies einzusehen, werden die beiden Gleichungen k und $(k+1)$ umgeformt und addiert.

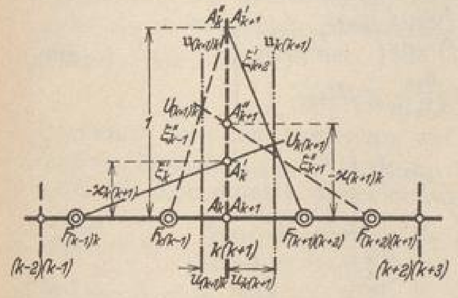

Abb. 225.

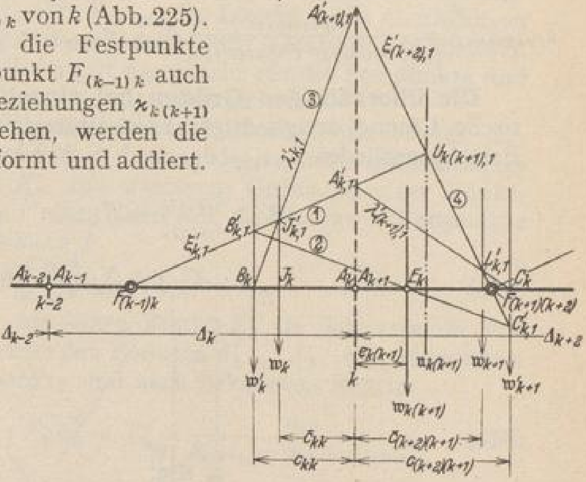

Abb. 226.

$$\left.\begin{aligned}
X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk} \qquad\quad - X_{k+1}\delta_{k(k+1)} &= 0\,,\\
-X_k\delta_{(k+1)k} \quad + X_{k+1}\delta_{(k+1)(k+1)} + X_{k+2}\delta_{(k+1)(k+2)} &= 0\,,\\
\delta_{kk} - \delta_{k(k+1)} = \delta_{kk,1}\,, \quad \delta_{(k+1)(k+1)} - \delta_{k(k+1)} &= \delta_{(k+1)(k+1),1}\,,\\
Y_{k(k-1)}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k)\delta_{k(k+1)} &= 0\,,\\
(X_{(k+1)} - X_k)\delta_{k(k+1)} + Y_{(k+1)(k+2)}(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) &= 0\,,\\
Y_{k(k-1)}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) + Y_{(k+1)(k+2)}(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) &= 0\,.
\end{aligned}\right| \qquad (444)$$

Hiernach sind $Y_{k(k-1)} = \overline{B_k B'_k}$ und $Y_{(k+1)(k+2)} = \overline{C_k C'_k}$ Ordinaten der Geraden ξ'_k und ξ'_{k+2} der homogenen Lösung (a), die mit den Schwerlinien $\mathfrak{w}'_k$, $\mathfrak{w}'_{k+1}$ der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k-1)}$, $\delta_{kk,1}$ und $\delta_{(k+1)(k+2)}$, $\delta_{(k+1)(k+1),1}$ zusammenfallen. Nach (444) schneiden sich die beiden Geraden ξ'_k, λ'_k der Abb. 226 auf der Schwerlinie $\mathfrak{w}_k$ der fiktiven Gewichte $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1})$ und $\delta_{k(k+1)}$. Der Punkt E_k ist nach (439) mit $T_k = 0$ ein Punkt der Achse und der Schwerlinie $\mathfrak{w}_{k(k+1)}$ der fiktiven Gewichte $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1})$ und $(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)})$. Mit einer Annahme $\xi'_{k,1}$ werden die geometrisch voneinander abhängigen Punkte $B'_{k,1}$, $J'_{k,1}$, $A'_{k,1}$, $A'_{(k+1),1}$, $C'_{k,1}$, $U_{k(k+1),1}$ gefunden. Sie bestimmen ein Vierseit, dessen Ecken auf vier vorgeschriebenen Geraden $\mathfrak{w}'_k$, $\mathfrak{w}_k$, k, $\mathfrak{w}'_{k+1}$ liegen, von dem außerdem drei Seiten durch je einen Festpunkt $F_{(k-1)k}$, B_k, E_k gehen. Daher ist auch $F_{(k+1)(k+2)}$ ein Festpunkt und der geometrische Ort des Schnittpunktes $U_{k(k+1)}$ eine zu k parallele Gerade, die Übergangslinie $\mathfrak{u}_{k(k+1)}$.

Der Ansatz (444) enthält außerdem die Beziehung

$$(X_{k+1} - X_k)\,\delta_{k(k+1)} + Y_{(k+1)(k+2)}(\delta_{(k+1)(k+2),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = 0\,, \qquad (445)$$

nach der sich die Geraden ξ'_{k+2} und λ'_{k+1} auf der Schwerlinie $\mathfrak{w}_{k+1}$ der fiktiven Gewichte $\delta_{k(k+1)}$ und $(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)})$ schneiden. Dies dient zur Nachprüfung der geometrischen Konstruktion. Die Festpunkte $F_{k(k-1)}$ und die Übergangslinien $\mathfrak{u}_{(k+1)\,k}$ werden aus den Festpunkten $F_{(k+2)\,(k+1)}$ ebenso bestimmt. Die Schwerlinien $\mathfrak{w}'_k$, $\mathfrak{w}_k$, $\mathfrak{w}'_{k+1}$, $\mathfrak{w}_{k+1}$ und $\mathfrak{w}_{k\,(k+1)}$ werden mit den Strecken $c_{k\,k}$, $\bar{c}_{k\,k}$, $c_{(k+2)\,(k+1)}$, $\bar{c}_{(k+2)\,(k+1)}$ und $e_{k\,(k+1)}$ eingerechnet (Abb. 226).

$$\left.\begin{aligned} c_{k\,k} &= \frac{\delta_{k\,(k-1)}}{\delta_{k\,(k-1)} + \delta_{k\,k,1}}\,\varDelta_k,\quad \bar{c}_{k\,k} = \frac{\delta_{k\,(k-1)}}{\delta_{k\,(k-1)} + \delta_{k\,k}}\,\varDelta_k,\quad c_{(k+2)\,(k+1)} = \frac{\delta_{(k+1)\,(k+2)}}{\delta_{(k+1)\,(k-1),1} + \delta_{(k+1)\,(k+2)}}\,\varDelta_{k+2},\\ \bar{c}_{(k+2)\,(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)\,(k+2)}}{\delta_{(k+1)\,(k+1)} + \delta_{(k+1)\,(k+2)}}\,\varDelta_{k+2},\quad e_{k\,(k+1)} = \frac{\delta_{(k+1)\,(k+2)}\,\varDelta_{k+2} - \delta_{k\,(k-1)}\,\varDelta_k}{\delta_{k\,(k-1)} + \delta_{k\,k,1} + \delta_{(k+1)\,(k+1),1} + \delta_{(k+1)\,(k+2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{446}$$

Die überzähligen Größen bei einzelnen Belastungsgliedern. Die analytische Lösung dreigliedriger Elastizitätsgleichungen für zwei aufeinanderfolgende Belastungsglieder $\delta_{(k-1)\,0}$, $\delta_{k\,0}$ nach S. 239 kann durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} X_{k-1}\frac{b_{(k-1)\,k}}{a_{(k-1)\,k}} + X_k &= \frac{\delta_{(k-1)\,0}}{\delta_{(k-1)\,k}} = R_{(k-1)\,k},\\ X_{k-1} + X_k\frac{b_{k\,(k-1)}}{a_{k\,(k-1)}} &= \frac{\delta_{k\,0}}{\delta_{k\,(k-1)}} = R_{k\,k} \end{aligned}\right\} \tag{447}$$

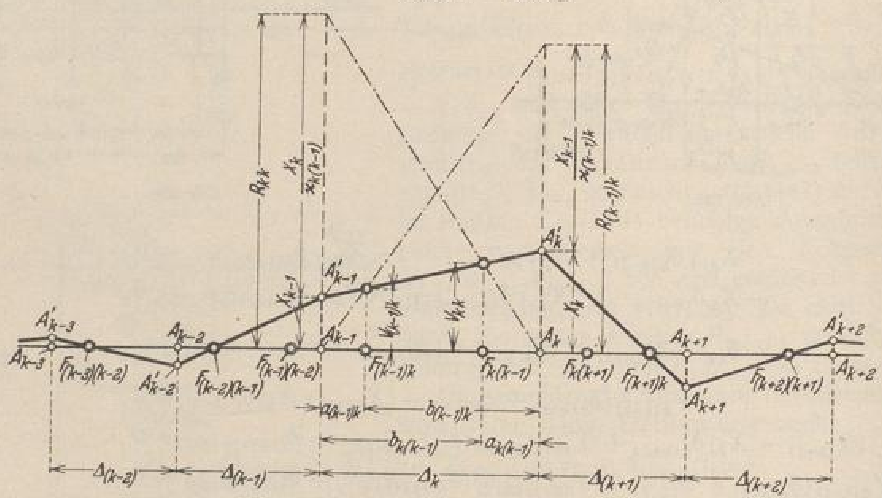

Abb. 227.

ersetzt werden. Er gilt allgemein für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und beweist die geometrische Lösung nach Abb. 227. Die Belastungsglieder erhalten die Dimension der überzähligen Größen X_{k-1}, X_k und sind von diesen unabhängig. Sie

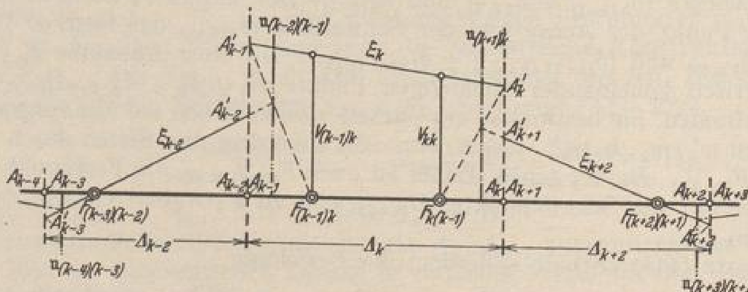

Abb. 228.

werden nach der Art ihrer geometrischen Verwendung als Kreuzlinienabschnitte bezeichnet, jedoch hierfür besser durch die Ordinaten $V_{(k-1)\,k}$, $V_{k\,k}$ in den Festpunkten ersetzt.