Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Allgemeiner Belastungsfall

urn:nbn:de:hbz:466:1-74292

$$\left.\begin{aligned} V_{(k-1)k} &= \frac{a_{(k-1)k}}{\Delta_k} R_{(k-1)k} = \frac{\varkappa_{(k-1)k}}{1+\varkappa_{(k-1)k}} \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k}} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)k} + \delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{s^{(k-2)}_{(k-1)}}, \\ V_{kk} &= \frac{a_{k(k-1)}}{\Delta_k} \quad R_{kk} = \frac{\varkappa_{k(k-1)}}{1+\varkappa_{k(k-1)}} \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)}} = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta^{(n-k)}_{kk}} = \frac{\delta_{k0}}{s^{(n-k)}_{k}}. \end{aligned}\right\} \tag{448}$$

Die überzähligen Größen $X_1 \ldots X_{k-2}$ sind bei gleichen Vorzeichen der Nebenglieder einer Gleichung durch die Festpunkte $F_{(h-1)h}$ der Lösung a, die überzähligen Größen $X_{k+1} \ldots X_h$ durch die Festpunkte $F_{r(r-1)}$ der Lösung b bestimmt (Abb. 227). Bei ungleichen Vorzeichen der Nebenglieder gilt das gleiche für die Festpunkte und Übergangslinien $F_{(h-1)h}$, $\mathfrak{u}_{(h-1)h}$ und $F_{r(r-1)}$, $\mathfrak{u}_{r(r-1)}$ (Abb. 228).

Allgemeiner Belastungsfall. Die geometrischen Hilfsmittel des letzten Abschnitts lassen sich auch bei der zeichnerischen Lösung des vollständigen Ansatzes verwenden. Die überzähligen Größen X_k sind wiederum Ordinaten einer Punktreihe A_k in beliebigen Abständen Δ_k. Jedem Intervall Δ_k sind zwei Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ zugeordnet. Jede Gleichung k

$$X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} + X_{k+1}\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0} \tag{449}$$

bestimmt nach der Auslegung auf S. 256 einen Punkt E'_k als Schwerpunkt von fiktiven Massen $\delta_{k(k-1)}$, δ_{kk}, $\delta_{k(k+1)}$, welche den Punkten A'_{k-1}, A'_k, A'_{k+1} zugeordnet sind. Die Koordinaten dieses Schwerpunkts sind nach bekannten Regeln

$$\overline{A_k E_k} = e_k = \frac{\delta_{k(k+1)}\Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)}\Delta_k}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}, \qquad \overline{E_k E'_k} = T_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}}. \tag{450}$$

Ebenso darf in (449)

$$X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} = Y_{k(k-1)}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) \tag{451}$$

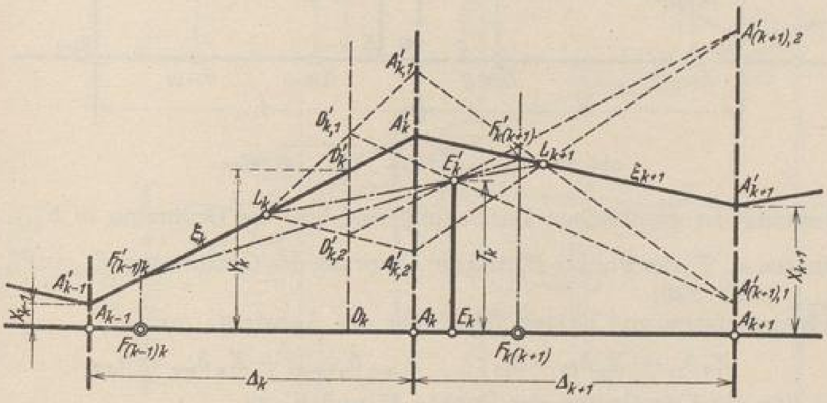

Abb. 229. Zur Ableitung für positive $\varkappa_{k(k+1)}$.

gesetzt und $Y_{k(k-1)}$ als Ordinate des Schwerpunkts der Massen $\delta_{k(k-1)}$ und δ_{kk} in A'_{k-1}, A'_k angesehen werden. Sie unterteilt den Abschnitt Δ_k in D_k nach dem Verhältnis $\delta_{k(k-1)} : \delta_{kk}$. Aus (449) wird dann

$$Y_{k(k-1)}(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk}) + X_{k+1}\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0} = T_k(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}). \tag{452}$$

Demnach ist T_k auch Ordinate des Schwerpunkts der fiktiven Massen $(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk})$ und $\delta_{k(k+1)}$, so daß die Punkte D'_k, E'_k und A'_{k+1} eine gerade Linie bilden (Abb. 229).

Auf diese Weise entsteht das Dreiseit A'_{k-1}, D'_k, A'_k, A'_{k+1}, dessen Eckpunkte auf einer Schar paralleler Geraden liegen. Ihre Ordinaten sind unbekannt. Allen möglichen Dreiseiten ist jedoch der Punkt E'_k der Seite $D'_k A'_{k+1}$ gemeinsam. Ist außerdem noch ein Punkt L_k der Seite $\xi_k \equiv \overline{A'_{k-1} A'_k}$ gegeben, so besitzen auch die Seiten $\overline{A'_k A'_{k+1}}$ dieser Dreiseite einen gemeinsamen Punkt L_{k+1}, da die Punktreihe D'_k

ähnlich zur Punktreihe A'_k (Ähnlichkeitspunkt L_k) und die Punktreihe D'_k ähnlich zur Punktreihe A'_{k+1} ist (Ähnlichkeitspunkt E'_k). Daher ist auch die Punktreihe A'_k ähnlich zur Punktreihe A'_{k+1}. Der Ähnlichkeitspunkt L_{k+1} ist allen möglichen Geraden ξ_{k+1} gemeinsam und liegt nach Konstruktion mit L_k und E'_k auf einer Geraden. Bewegt sich der Punkt L_k auf einer Geraden, so ist die zugeordnete Punktreihe L_{k+1} zu E'_k perspektiv und daher ähnlich zu L_k. Ist die Punktreihe L_k senkrecht zur Achse, so gilt das gleiche von der Punktreihe L_{k+1}.

Dieses geometrische Bild kann für jede Ordinate T_k, also auch für $T_k = 0$ angegeben werden, so daß die Punkte E'_k mit E_k in die Achse fallen. Der Geradenzug $\xi_k \equiv \xi'_k$ oder $\xi_k \equiv \xi''_k$ des homogenen Ansatzes ist dann für jede Lage des Punktes A'_k durch die Festpunkte $F_{(k-1)k}, F_{k(k+1)}$ oder $F_{(k+1)k}, F_{k(k-1)}$ bestimmt, je nachdem $\delta_{n0} = 1$ oder $\delta_{10} = 1$ gesetzt wird. Daher ist bei der Entwicklung der geometrischen Lösung nach rechts eine Gruppe der zugeordneten Punkte L_h, L_{h+1} durch die Ordinaten in den Festpunkten $F_{(k-1)k}$ bestimmt. Der zweite geometrische Ort für die Punkte $L_{k+1} \equiv F'_{k(k+1)}$ besteht aus dem Geradenzug $\zeta_{0n} \equiv \overrightarrow{F'_{(k-1)k} E'_k}$ (Koordinaten für E'_k sind e_k, T_k), dessen Ursprung daher mit den Randbedingungen für F'_{12} bestimmt ist. Dasselbe gilt für die Entwicklung der Lösung von rechts nach links.

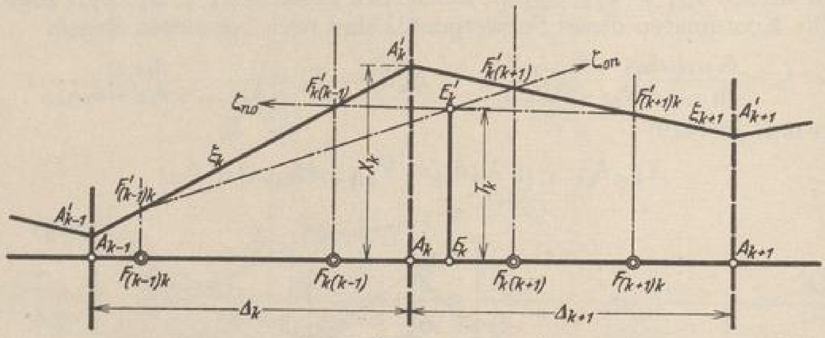

Abb. 230. $\overrightarrow{F'_{(k-1)k} E'_k} \equiv \zeta_{0n}$, $\overrightarrow{F'_{(k+1)k} E'_k} \equiv \zeta_{n0}$.

Die Elemente der graphischen Darstellung sind hier die Ordinaten in $F_{k(k-1)}$, die Koordinaten e_k, T_k der Punkte E'_k und der Ursprung des Geradenzugs $\zeta_{n0} \equiv \overrightarrow{F'_{(k+1)k} E'_k}$ in $F'_{n(n-1)}$ (Abb. 230).

Nach der ersten und letzten Gleichung des Ansatzes

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = \delta_{10}; \qquad X_{n-1} \delta_{n(n-1)} + X_n \delta_{nn} = \delta_{n0}$$

ergeben sich die Koordinaten der Punkte E'_1 und E'_n zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{E_1 E'_1} &= T_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11} + \delta_{12}}; & \overline{A_1 E_1} &= e_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11} + \delta_{12}} \Delta_1, \\ \overline{E_n E'_n} &= T_n = \frac{\delta_{n0}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}}; & \overline{A_n E_n} &= e_n = \frac{-\delta_{n(n-1)}}{\delta_{nn} + \delta_{n(n-1)}} \Delta_n. \end{aligned}\right\} \quad (453)$$

Nach (435) und (437) ist $e_1 = a_{12}$; nach (436) und (437) $e_n = -a_{n(n-1)}$. Der Ursprung F'_{12} des Geradenzugs ζ_{0n} ist daher E'_1, der Ursprung $F'_{n(n-1)}$ des Geradenzugs ζ_{n0} der Punkt E'_n.

Diese Rechenvorschrift kann durch Verwendung der Gleichungen ergänzt werden, welche bei Vorwärtselimination oder Rückwärtselimination nach Gauß erhalten werden. Sie bestimmen nach (433), (434) die Ordinaten von $F'_{(k-1)k}$ und $F'_{k(k-1)}$ des Geradenzugs ξ_k als die Ordinaten der Schwerpunkte der fiktiven Massen $\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)}$, $\delta_{(k-1)k}$ und $\delta^{(n-k)}_{kk}$, $\delta_{k(k-1)}$. Ihre Verwendung ist naturgemäß für die zeichnerische Lösung ohne Bedeutung. Da aber die Gleichung k im Gaußschen

Algorithmus von der reduzierten Gleichung $(k-1)^{(k-2)}$ abgezogen wird, um die reduzierte Gleichung $(k)^{(k-1)}$ zu erhalten, kann der ihr zugeordnete Punkt $F'_{k(k+1)}$ als Schwerpunkt der Massen $(\delta^{(k-2)}_{(k-1)(k-1)} + \delta_{(k-1)k})$ in $F'_{(k-1)k}$ und δ_{k0} in E'_k angesehen werden. Die drei Punkte liegen daher, wie bereits geometrisch bewiesen, auf einer Geraden.

Um diese geometrischen Beziehungen bei der Lösung einer Aufgabe zu verwenden, werden n Punkte $A_1 \ldots A_n$ auf einer Achse in beliebigen, also auch gleichgroßen Abständen $\Delta_2 \ldots \Delta_n$ aufgetragen. Dabei ist die Struktur des Hauptsystems maßgebend. Die Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ werden mit Hilfe der Vorzahlen der Bedingungsgleichungen nach S. 256 geometrisch bestimmt oder nach (435), (436) mit den Kennbeziehungen $\varkappa_{(k-1)k}$, $\varkappa_{k(k-1)}$ eingerechnet. Dasselbe geschieht mit den Koordinaten e_k, T_k der Punkte E'_k, so daß sich die Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit die Geraden ξ_k eintragen lassen. Sie schneiden sich in den Punkten A'_k der Ordinaten A_k. Damit ist die Richtigkeit der Lösung nachgeprüft. $\overline{A_k A'_k} = X_k$.

Die Kennbeziehungen eines Ansatzes nach (387) mit negativen Nebengliedern, also mit Gleichungen von der Form

$$-X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk} - X_{k+1}\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}$$

sind negativ. Dasselbe gilt nach S. 255 auch für die Abszissen $a_{(k-1)k}$, $a_{k(k-1)}$ der Festpunkte. Diese liegen daher außerhalb des Abschnitts Δ_k. Die Koordinaten von E'_k sind:

$$\overline{A_k E_k} = e_k = -\frac{\delta_{k(k+1)}\Delta_{k+1} - \delta_{k(k-1)}\Delta_k}{-\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}}, \quad T_k = \frac{\delta_{k0}}{-\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} - \delta_{k(k+1)}}. \qquad (454)$$

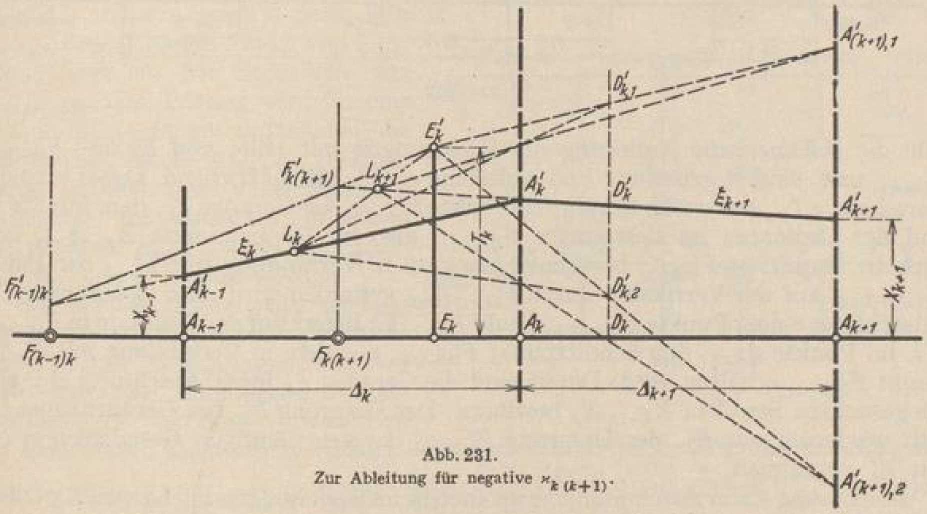

Abb. 231.
Zur Ableitung für negative $\varkappa_{k(k+1)}$.

Die geometrischen Beziehungen bleiben unverändert. Dasselbe gilt daher auch von der zeichnerischen Lösung (Abb. 231).

Wechseln die Vorzeichen der Nebenglieder des dreigliedrigen Ansatzes, ist also z. B. in der Gleichung k die Vorzahl $\delta_{k(k-1)}$ positiv und daher $a_{(k-1)k}$ positiv, die Vorzahl $\delta_{k(k+1)}$ negativ und daher $a_{k(k+1)}$ negativ, so liegen die Festpunkte $F_{(k-1)k}$, $F_{k(k-1)}$ zum Bereich Δ_k zwischen den Intervallgrenzen A_{k-1}, A_k, dagegen die Festpunkte $F_{k(k+1)}$, $F_{(k+1)k}$ zum Bereich Δ_{k+1} außerhalb. Werden dessen Intervallgrenzen mit $\Delta_{k+1} = 0$ in einem Punkte zusammengefaßt, so ist auch $a_{k(k+1)} = a_{(k+1)k} = 0$, d. h. die dem Bereich Δ_{k+1} zugeordneten Festpunkte $F_{k(k+1)}$, $F_{(k+1)k}$ fallen ebenfalls nach A_k, A_{k+1}.

Den Endpunkten A_{k-1}, A_k des Abschnittes Δ_k sind die Gleichungen $(k-1), k$ zugeordnet, die Gleichung $(k-1)$

$$-X_{k-2}\delta_{(k-1)(k-2)} + X_{k-1}\delta_{(k-1)(k-1)} + X_k\delta_{(k-1)k} = \delta_{(k-1)0}$$

geometrisch beschrieben durch den Punkt E'_{k-1} (Abb. 232) mit den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} e_{k-1} &= \frac{\delta_{(k-1)k}\Delta_k}{-\delta_{(k-1)(k-2)} + \delta_{(k-1)(k-1)} + \delta_{(k-1)k}} = \frac{\delta_{(k-1)k}}{\delta_{(k-1)(k-1),1} + \delta_{(k-1)k}}\Delta_k = c_{k(k-1)}, \\ \overline{E_{k-1}E'_{k-1}} &= T_{k-1} = \frac{\delta_{(k-1)0}}{\delta_{(k-1)(k-1),1} + \delta_{(k-1)k}}; \end{aligned}\right\} \tag{455}$$

die Gleichung k

$$X_{(k-1)}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk} - X_{k+1}\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}$$

geometrisch beschrieben durch den Punkt E'_k mit den Koordinaten

$$e_k = \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}}\Delta_k = c_{kk}, \qquad T_k = \frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}}. \tag{456}$$

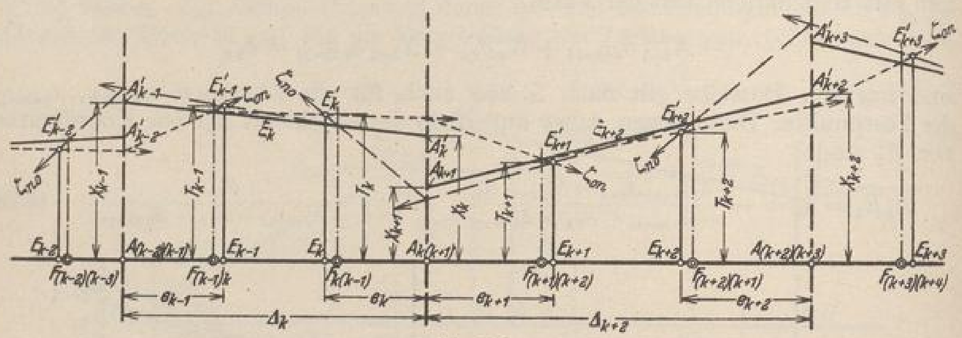

Abb. 232.

Für die zeichnerische Auflösung der Gleichungen mit Hilfe von E'_k und $F'_{(k-1)k}$, $F'_{k(k+1)}$ usw. sind Begründung und Ableitung auf S. 260 maßgebend. Dabei wird der Geradenzug ζ_{0n} aus einem bekannten Punkte $F'_{(k-1)k}$ der Geraden ξ_k, dem Punkte E'_k und der Ordinaten im Festpunkte $F_{k(k+1)}$, also im Doppelpunkte A_k, A_{k+1} entwickelt. Damit ist $F'_{k(k+1)}$ bestimmt, aus dem in Verbindung mit E'_{k+1} der Punkt $F'_{(k+1)(k+2)}$ auf der Vertikalen durch $F_{(k+1)(k+2)}$ gefunden wird. Der Geradenzug ξ_{n0} entsteht aus einem Punkte $F'_{(k+2)(k+1)}$ und E'_{k+1}. Er liefert auf der Ordinate in $F_{(k+1)k}$, d. i. im Punkte A_{k+1}, den Schnittpunkt $F'_{(k+1)k}$, aus dem in Verbindung mit E'_k der Punkt $F'_{k(k-1)}$ erhalten wird. Damit sind die Geraden ξ_k jedes Abschnitts Δ_k, also die gesuchten Strecken X_{k-1}, X_k bestimmt. Der Ursprung F'_{12} des Geradenzuges ζ_{0n} fällt wiederum mit E'_1, der Ursprung $F'_{n(n+1)}$ des gegenläufigen Geradenzuges ζ_{n0} mit E'_n zusammen.

Die Lösung kann durch ähnliche geometrische Beziehungen nachgeprüft werden. Durch Addition der Gleichungen k und $(k+1)$ entsteht nach (444)

$$X_{k-1}\delta_{k(k-1)} + X_k\delta_{kk,1} + X_{k+1}\delta_{(k+1)(k+1),1} + X_{k+2}\delta_{(k+1)(k+2)} = \delta_{k0} + \delta_{(k+1)0} \tag{457}$$

und damit eine geometrische Beziehung zwischen vier fiktiven Massen in $A'_{k-1}\ldots A'_{k+1}$, oder deren Zusammenfassung in zwei Punkten B'_k, C'_k mit den Ordinaten $Y_{(k-1)k}$, $Y_{(k+1),(k+2)}$ mit dem Schwerpunkt $E'_{k(k+1)}$ (Abb. 233).

$$\left.\begin{aligned} \overline{A_kB_k} &= \frac{\delta_{k(k-1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}}\Delta_k = c_{kk}, \\ \overline{A_{k+1}C_k} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}}{\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}}\Delta_{k+2} = c_{(k+2)(k+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{458}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{A_{k(k+1)}\,E_{k(k+1)}} = e_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)}\,\Delta_{k+2} - \delta_{(k-1)k}\,\Delta_{k-1}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}},\\ T_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{k0} + \delta_{(k+1)0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}}.\end{aligned}\right\} \tag{459}$$

Die Punkte B'_k, $E'_{k(k+1)}$, C'_k liegen daher auf einer Geraden, für die E'_k Festpunkt ist. In ähnlicher Weise werden die Gleichungen k und $(k+1)$ geometrisch ausgelegt.

$$\begin{aligned}&X_{k-1}\,\delta_{k(k-1)} + X_k\,\delta_{kk,1} - (X_{k+1} - X_k)\,\delta_{k(k+1)}\\ &\qquad = Y_{(k-1)k}\,(\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k)\,\delta_{k(k+1)} = \delta_{k0},\\ &(X_{k+1} - X_k)\,\delta_{(k+1)k} + X_{k+1}\,\delta_{(k+1)(k+1),1} + X_{k+2}\,\delta_{(k+1)(k+2)}\\ &\qquad = (X_{k+1} - X_k)\,\delta_{(k+1)k} + Y_{(k+1)(k+2)}\,(\delta_{(k+1)(k+1),1} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = \delta_{(k+1)0},\end{aligned}$$

d. h. die Geraden $B'_k A'_k$ und $B_k A'_{k+1}$ schneiden auf der Schwerlinie $\mathfrak{w}_k$ eine Strecke von der vorgeschriebenen Länge

$$\frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} - \delta_{k(k+1)}} = S_k \tag{460}$$

ab. Ähnliches gilt für die zweite Gleichung.

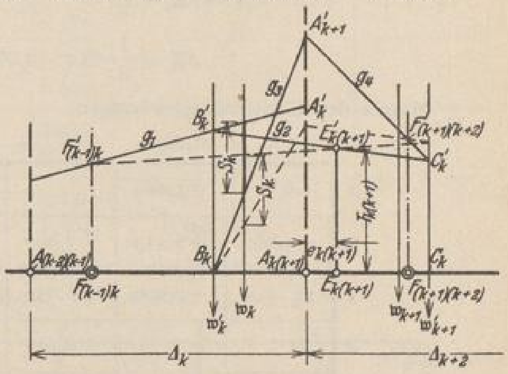

Abb. 233.

Wird daher eine Gerade g_1 mit dem vorgegebenen Punkt $F'_{(k-1)k}$ angenommen, so ist g_2 mit B'_k und $E'_{k(k+1)}$, also auch C'_k bestimmt. Dasselbe gilt für die Gerade g_3 mit B_k und der Strecke S_k auf $\mathfrak{w}_k$. Daher besitzt auch die Gerade A'_{k+1}, C'_k einen festen, dem Punkte $F'_{(k-1)k}$ zugeordneten Punkt von ξ_{k+2}. Dieser liegt auf der Ordinaten von $F_{(k+1)(k+2)}$. Die Lösung wird für eine Gerade $F'_{(k-1)k}B'_k$ am einfachsten, die gleichzeitig durch $E'_{k(k+1)}$ verläuft. Damit ist eine zweite zeichnerische Auflösung des Ansatzes mit den Festpunkten $E'_{k(k+1)}$ und den Strecken S_k, S_{k+1} gefunden worden.

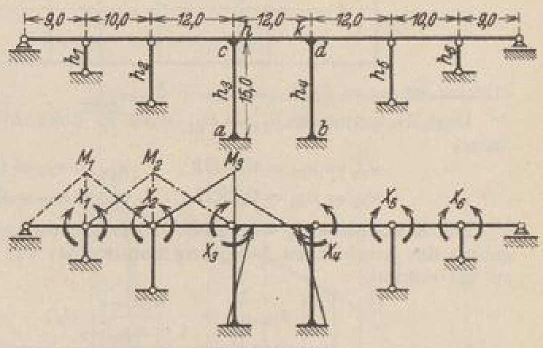

Abb. 234.

Um die Genauigkeit der zeichnerischen Lösung festzustellen, wird die Identität der Gleichungen des Ansatzes mit den Ergebnissen für die überzähligen Größen untersucht. Sie kann durch Iteration verbessert oder auch durch die Berechnung der ΔX_k aus

$$\Delta T_k = T_k - \frac{X_{(k-1),1}\,\delta_{k(k-1)} + X_{k,1}\,\delta_{kk} + X_{(k+1),1}\,\delta_{k(k+1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}} \tag{461}$$

nach $X_{k,2} = X_{k,1} + \Delta X_k$ berichtigt werden.

Die Lösung wird an der Berechnung eines **symmetrischen Brückenträgers** gezeigt (Abb. 234), dessen mittlerer Teil als steif eingespannter Rahmen ausgebildet ist. Hierzu dient ein dreifach statisch unbestimmtes Hauptsystem, an dem außer der Belastung die Stützenmomente $X_1 \ldots . X_6$ als überzählige Größen angreifen. Die Formänderungen des statisch bestimmten Abschnitts des Hauptsystems sind bei Annahme eines für alle Stäbe gleich großen Trägheitsmomentes

$$\delta_{11} = \delta_{66} = \frac{1}{3}\,(9{,}0 + 10{,}0) = 6{,}333\,; \qquad \delta_{12} = \delta_{56} = \frac{10}{6} = 1{,}667\,;$$

$$\delta_{22} = \delta_{55} = \frac{1}{3}\,(10{,}0 + 12{,}0) = 7{,}333\,; \qquad \delta_{23} = \delta_{45} = \frac{12}{6} = 2{,}000\,.$$