



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik im Stahlbetonbau

Beyer, Kurt

Berlin [u.a.], 1956

Zahlenbeispiel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-74292](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-74292)

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_{k(k+1)} E_{k(k+1)}} = e_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{(k+1)(k+2)} \Delta_{k+2} - \delta_{(k-1)k} \Delta_{k-1}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \\ T_{k(k+1)} &= \frac{\delta_{k0} + \delta_{(k+1)0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} + \delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}} \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Die Punkte $B'_k, E'_{k(k+1)}, C'_k$ liegen daher auf einer Geraden, für die E'_k Festpunkt ist. In ähnlicher Weise werden die Gleichungen k und $(k+1)$ geometrisch ausgelegt.

$$\begin{aligned} X_{k-1} \delta_{k(k-1)} + X_k \delta_{kk,1} - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} \\ = Y_{(k-1)k} (\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1}) - (X_{k+1} - X_k) \delta_{k(k+1)} = \delta_{k0}, \\ (X_{k+1} - X_k) \delta_{(k+1)k} + X_{k+1} \delta_{(k+1)(k+1,1)} + X_{k+2} \delta_{(k+1)(k+2)} \\ = (X_{k+1} - X_k) \delta_{(k+1)k} + Y_{(k+1)(k+2)} (\delta_{(k+1)(k+1,1)} + \delta_{(k+1)(k+2)}) = \delta_{(k+1)0}, \end{aligned}$$

d. h. die Geraden $B'_k A'_k$ und $B_k A'_{k+1}$ schneiden auf der Schwerlinie w_k eine Strecke von der vorgeschriebenen Länge

$$\frac{\delta_{k0}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk,1} - \delta_{k(k+1)}} = S_k \quad (460)$$

ab. Ähnliches gilt für die zweite Gleichung.

Wird daher eine Gerade g_1 mit dem vorgegebenen Punkt $F'_{(k-1)k}$ angenommen, so ist g_2 mit B'_k und $E'_{k(k+1)}$, also auch C'_k bestimmt. Dasselbe gilt für die Gerade g_3 mit B_k und der Strecke S_k auf w_k . Daher besitzt auch die Gerade A'_{k+1}, C'_k einen festen, dem Punkte $F'_{(k-1)k}$ zugeordneten Punkt von ξ_{k+2} .

Dieser liegt auf der Ordinaten von $F_{(k+1)(k+2)}$. Die Lösung wird für eine Gerade $F'_{(k-1)k} B'_k$ am einfachsten, die gleichzeitig durch $E'_{k(k+1)}$ verläuft. Damit ist eine zweite zeichnerische Auflösung des Ansatzes mit den Festpunkten $E'_{k(k+1)}$ und den Strecken S_k, S_{k+1} gefunden worden.

Um die Genauigkeit der zeichnerischen Lösung festzustellen, wird die Identität der Gleichungen des Ansatzes mit den Ergebnissen für die überzähligen Größen untersucht.

Sie kann durch Iteration verbessert oder auch durch die Berechnung der ΔX_k aus

$$\Delta T_k = T_k - \frac{X_{(k-1),1} \delta_{k(k-1)} + X_{k,1} \delta_{kk} + X_{(k+1),1} \delta_{k(k+1)}}{\delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}} \quad (461)$$

nach $X_{k,2} = X_{k,1} + \Delta X_k$ berichtigt werden.

Die Lösung wird an der Berechnung eines symmetrischen Brückenträgers gezeigt (Abb. 234), dessen mittlerer Teil als steif eingespannter Rahmen ausgebildet ist. Hierzu dient ein dreifach statisch unbestimmtes Hauptsystem, an dem außer der Belastung die Stützenmomente $X_1 \dots X_6$ als überzählige Größen angreifen. Die Formänderungen des statisch bestimmten Abschnitts des Hauptsystems sind bei Annahme eines für alle Stäbe gleich großen Trägheitsmomentes

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{66} &= \frac{1}{3} (9,0 + 10,0) = 6,333; & \delta_{12} = \delta_{56} &= \frac{10}{6} = 1,667; \\ \delta_{22} = \delta_{55} &= \frac{1}{3} (10,0 + 12,0) = 7,333; & \delta_{27} = \delta_{45} &= \frac{12}{6} = 2,000. \end{aligned}$$

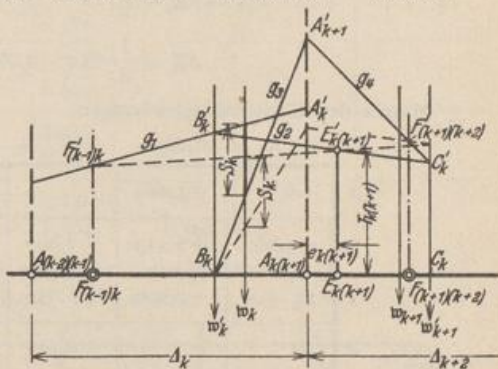


Abb. 233.

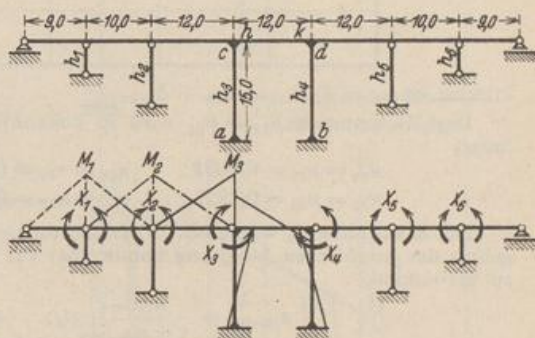


Abb. 234.

Die Formänderungen des statisch unbestimmten Abschnitts aus $-X_3 = 1$ werden mit Hilfe der Tabellen Abschn. 61 bestimmt. Für diesen Belastungsfall ist:

$$M_{h,k} = -\frac{1}{2} \cdot 1,25 \left(\frac{1}{3,25} \pm \frac{6}{8,5} \right) = -0,192 \mp 0,442 \text{ mt};$$

$$H = -\frac{3}{2} \frac{1}{15,0} \frac{1}{3,25} = -0,0308 \text{ t} = N_3^{(9)}.$$

Biegemomente am

Riegel h_k : $M_h = -0,634 \text{ mt}$; $M_k = +0,250 \text{ mt}$.

Stütze h_3 : $M_c = +0,366 \text{ mt}$; $M_d = 0,366 - 0,0308 \cdot 15,0 = -0,096 \text{ mt}$,

Stütze h_4 : $M_d = +0,250 \text{ mt}$; $M_b = 0,250 - 0,0308 \cdot 15,0 = -0,212 \text{ mt}$.

$$\delta_{33}^{(9)} = \delta_{44}^{(9)} = \frac{1}{3} 12 + \frac{1}{3} 12 \left(0,634 - \frac{0,250}{2} \right) = 6,036;$$

$$\delta_{34}^{(9)} = \frac{1}{3} 12 \left(-0,250 + \frac{0,634}{2} \right) = 0,268.$$

Matrix der Elastizitätsgleichungen

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	s_k
1	+6,333	+1,667					8,000
2	+1,667	+7,333	+2,000				11,000
3		+2,000	+6,036	+0,268			8,304
4			+0,268	+6,036	+2,000		8,304
5				+2,000	+7,333	+1,667	11,000
6					+1,667	+6,333	8,000

Hierbei ist $s_k = \delta_{k(k-1)} + \delta_{kk} + \delta_{k(k+1)}$.

Der Kettenbruch $\beta_{11} = \beta_{66}$ wird in bekannter Weise nach (404) und (394) gebildet und liefert

$$\kappa_{65} = \kappa_{12} = 0,2632; \quad \kappa_{54} = \kappa_{23} = 0,2901; \quad \kappa_{43} = \kappa_{34} = 0,04912;$$

$$\kappa_{32} = \kappa_{45} = 0,3321; \quad \kappa_{21} = \kappa_{56} = 0,2500; \quad \beta_{11} = \beta_{66} = 0,1690.$$

Die Abschnitte Δ_k werden in Übereinstimmung mit den Feldweiten festgesetzt, um das Ergebnis der graphischen Auflösung unmittelbar zur Bestimmung der Schnittkräfte des Stabwerks zu verwenden.

$$a_{(k-1)k} = \frac{\kappa_{(k-1)k}}{1 + \kappa_{(k-1)k}} l_k; \quad a_{k(k-1)} = \frac{\kappa_{k(k-1)}}{1 + \kappa_{k(k-1)}} l_k.$$

Riegelstab l_k	2	3	4	5	6
$a_{(k-1)k}$	2,084	2,698	0,562	2,992	2,000
$a_{k(k-1)}$	2,000	2,992	0,562	2,698	2,084

$$e_k = \frac{\delta_{k^{(k+1)}} l_{k+1} - \delta_{k(k-1)} l_k}{s_k}.$$

Bedingung h	1	2	3	4	5	6
e_k	+2,084	+0,666	-2,503	+2,503	-0,666	-2,084

Vorgeschriebene Belastungsannahmen.

Die überzähligen Größen sollen für Eigengewicht $g = 1 \text{ t/m}$, Belastung des Feldes l_2 mit Nutzlast $p = 1 \text{ t/m}$, ferner für gleichförmige Temperaturerniedrigung des Riegels um 15° und für eine gemessene Verdrehung des linken Rahmenstützpunktes um $19'$ angegeben werden. $Ej_c = 60000 \text{ tm}^2$.

Soweit sich die Formänderungen auf den statisch bestimmten Teil des Hauptsystems beziehen, ist eine nähere Erklärung unnötig.

Die statisch unbestimmten Formänderungen $\delta_{30}^{(3)}$, $\delta_{40}^{(3)}$ werden aus

$$\delta_{k0}^{(3)} = \int M_0^{(0)} M_k^{(3)} \frac{J_e}{J} ds$$

berechnet. Die Momente $M_3^{(3)}$, $M_4^{(3)}$ sind mit Hilfe der Tabelle Abschn. 61 in Abb. 234 aufgetragen worden. Hieraus folgt die

Übersicht der $T_k = \frac{\delta_{k0}^{(3)}}{s_k}$ in mt.

k	1	2	3	4	5	6
Eigengewicht 1 t/m	+ $\frac{90,4}{8,000}$	+ $\frac{172,5}{11,000}$	+ $\frac{155,7}{8,304}$	+ 18,75	+ 15,68	+ 11,30
Nutzlast $p=1$ t/m auf l_3		+ $\frac{112,5}{11,000}$	+ $\frac{112,5}{8,304}$			
Riegel $t = -15^\circ$			+ $\frac{3,450}{8,304}$	+ 0,415		
$\Delta\varphi_3 = 19'$			- $\frac{31,6}{8,304}$	- $\frac{62,1}{8,304}$		

$$\delta_{3t}^{(3)} = EJ_c \alpha_1 t l_4 N_3^{(3)} = -60000 \cdot 0,00015 \cdot 12 \cdot (-0,0308) = +3,45,$$

$$\delta_{3t}^{(3)} = -EJ_c \Sigma C_3^{(3)} \Delta_c = -60000 \cdot 0,096 \cdot 19 \cdot 0,000291 = -31,6.$$

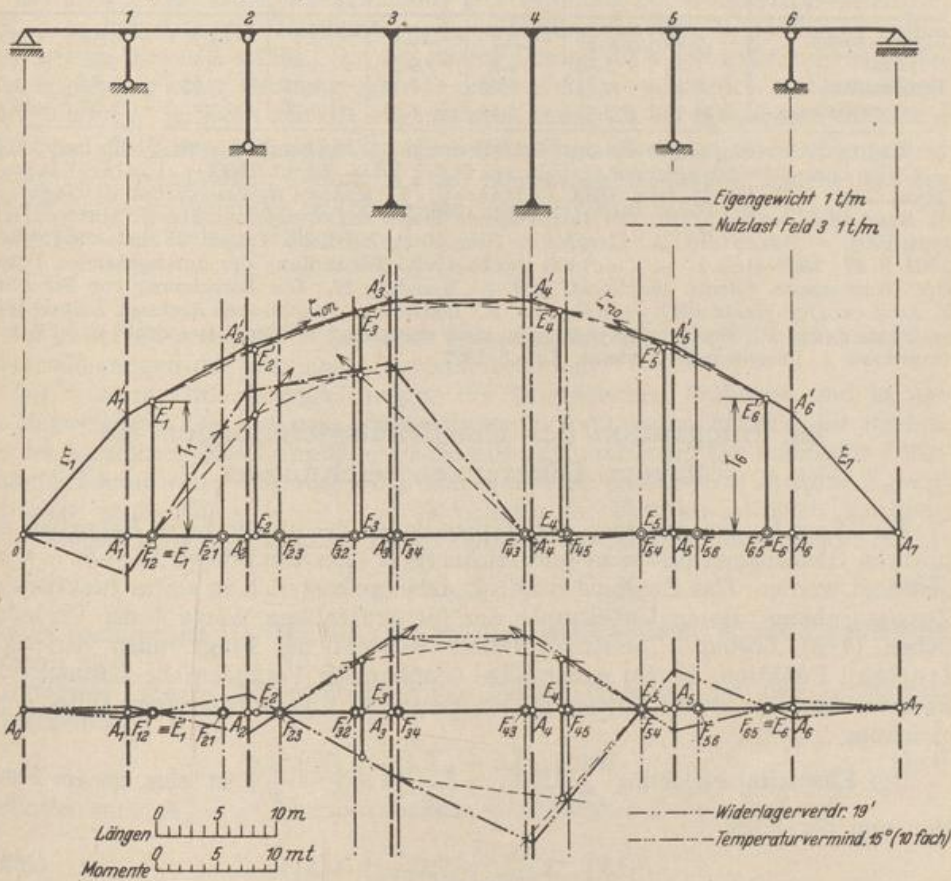


Abb. 235.

Um die Gleichungen zeichnerisch aufzulösen, werden nach S. 261 zuerst die Festpunkte $F_{12} \dots F_{56}, F_{65} \dots F_{21}$ und die Punkte $E_1 \dots E_6$ mit den Ergebnissen $a_{12} \dots a_{56}, a_{65} \dots a_{21}, e_1 \dots e_6$ der Rechnung auf der Achse $A_1 \dots A_6$ eingetragen und die Ordinaten $T_1 \dots T_6$ für jeden einzelnen Belastungsfall in $E_1 \dots E_6$ abgesteckt. Die positiven Werte erscheinen in der oberen Halbebene. Daher gilt das gleiche von den überzähligen Schnittkräften X_k . Mit den Ordinaten T_1, T_6 in den Festpunkten F_{12}, F_{65} und den Endpunkten E'_k der Strecken T_k sind die beiden Geradenzüge ζ_{0n}, ζ_{n0} und damit in jedem Abschnitt A_k zwei Punkte $F'_{(k-1)k}, F''_{(k-1)k}$ des Geradenzuges ξ_k bestimmt, welcher auf den Ordinaten A_1, A_2 usw. die gesuchten Strecken X_1, X_2 usw. abschneidet.

Die statisch unbestimmten Stützenmomente nach Abb. 235 in mt für jeden Belastungsfall:

Belastung	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Eigengewicht. . .	10,2	15,8	19,7	19,7	15,8	10,2 mt
Nutzlast.	-3,4	12,1	14,5	-0,7	0,3	0 „
Temperatur	0,05	-0,18	0,63	0,63	-0,18	0,05 „
Lagerverdrehung .	-0,50	1,50	-5,40	-11,20	3,30	-0,80 „

Die Schnittkräfte des statisch unbestimmten Bereichs des Hauptsystems sind

$$M = M_0^{(3)} - X_3 M_3^{(3)} - X_4 M_4^{(3)}.$$

Die Momente $M_0^{(3)}$ aus den einzelnen Belastungen werden nach den Tabellen Abschn. 61 berechnet.

Biegemomente in mt.

Belastung	M_a	M_e	$M_3 = -X_3$	M_h	M_k	$M_4 = -X_4$	M_d	M_b
Eigengewicht. . .	-0,29	+0,58	-19,7	-19,1	-19,1	-19,7	+0,58	-0,29
Nutzlast.	-1,24	+5,13	-14,5	-9,38	+4,06	+0,7	+3,36	-3,01
Temperatur	-1,03	+0,85	-0,63	+0,22	+0,22	+0,63	+0,85	-1,03
Lagerverdrehung .	+32,70	-3,94	+5,40	+1,41	-5,78	+11,2	-16,98	+19,47

Mohr, O.: Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, 3. Aufl. S. 83. Berlin 1928.
 — Culmann: Anwendungen der graphischen Statik Bd. 3. Zürich 1900. — Fidler, Claxton: Trans. Inst. C. E. Bd. 74. Okt. 1883. — Massau, J.: Annales de l'association des ingénieurs de Gand 1889. — Vianello: Der durchgehende Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Hamburg 1904. — Ostenfeld, A.: Graphische Behandlung der kont. Träger. Z. Arch.-Ing.-Wesen 1905 S. 47; 1908 Heft 1. — Vlachos: Zeichnerische Behandlung der durchgehenden Träger. Ost. Wochenschr. öffentl. Baudienst 1908. — Marcus, H.: Die Berechnung von Silozellen. Z. Arch.-u. Ing.-Wesen 1911. — Mehmke, R.: Leitfaden z. graphischen Rechnen. Leipzig 1917. — Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biege-fester Stab- und Flächen-tragwerke. I. Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927.

33. Integration der Elastizitätsgleichungen als lineare Differenzgleichungen.

Die Wurzeln des Ansatzes sind bisher durch die algebraische Rekursion der linearen Gleichungen bestimmt und zeichnerisch einer Punktfolge $1 \dots k \dots n$ zugeordnet worden. Das Ergebnis erscheint dabei geometrisch in einem funktionalen Zusammenhang, dessen Unbekannte nur für ganzzahlige Werte k der Veränderlichen ($k \cdot A$) Lösungen besitzen. Damit entsteht die Frage nach derjenigen stetigen Funktion, die für ganzzahlige unabhängige Veränderliche Lösungen des linearen Ansatzes ergibt. Dieser erhält damit die Eigenschaft einer Differenzgleichung.

Die Elastizitätsgleichung $\sum_{h=k}^{k+m} \delta_{rh} X_h = \delta_{r0}$, ($k = r - \frac{m}{2}$) ist eine lineare Funktion von der Form

$$F_1(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+m}) = N_r \quad (462a)$$